# Exercices de Mathématiques

Vincent Boucheny — Sup B1

27 mai 2003

# Table des matières

# 1 Loi Magma-Monoïde

## 1.1 Relation d'équivalence

### Enoncé :

On définit sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{S}$ par $f\mathcal{S}g$ s'il existe deux constantes strictement positives $\alpha$ et $\beta$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha f(x) \leq g(x) \leq \beta f(x)$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner des exemples d'applications $f$ et $g$ qui sont équivalentes mais pas égales.

### Corrigé :

1. $f\mathcal{S}g \Rightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^{2*}\ tq\ \alpha f(x) \leq g(x) \leq \beta f(x)$

   – Réfléxivité :

     Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une apllication quelconque et fixée. Montrons $f\mathcal{S}g$. On peut prendre $\alpha = \beta = 1$. Alors $1 \times f \leq f \leq 1 \times f$. Donc $f\mathcal{S}f$.

   – Symétrie :

     Soient $(f,g) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ tq\ f\mathcal{S}g$. Montrons $g\mathcal{S}f$. On veut trouver $\alpha'$ et $\beta'$ tels que $\alpha' g \leq f \leq \beta' g$.
     On a $\alpha f \leq g \Rightarrow f \leq \frac{1}{\alpha} g$. Donc, on peut prendre $\alpha' = \frac{1}{\beta}$ et $\beta' = \frac{1}{\alpha}$.
     Donc $f\mathcal{S}g \Rightarrow g\mathcal{S}f$.

   – Transitivité :

     On suppose $f\mathcal{S}g$ et $g\mathcal{S}h$. Montrons $f\mathcal{S}h$.

     $$\begin{array}{lcl} \alpha f \leq g \iff \alpha\alpha' f \leq \alpha' g \leq h. & \text{Donc} & \alpha'' = \alpha\alpha' \\ g \leq \beta f \iff h \leq \beta' g \leq \beta\beta' & \text{Donc} & \beta'' = \beta\beta' \end{array}$$

     D'où $\alpha'' f \leq h \leq \beta'' f$, donc $f\mathcal{S}h$

   Conclusion : $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
2. Soient $f(x) = 1$, $g(x) = \cos x + 3$, $\alpha = 2$ et $\beta = 4$. On a $2 \leq \cos x = 3 \leq 4$. Donc, $f \neq g$ et $f\mathcal{S}g$.

### 1.2 Quelques lois

## Enoncé :

1. Etudier les propriétés du produit vectoriel sur les vecteurs de l'espace : éléments neutres ? absorbants ? inversibles ? associativité ? commutativité ? parties stables ? etc...
2. Etudier les propriétés des deux lois d'oubli sur un ensemble E, définies par $x * y = x$ et $x * y = y$.
3. Soit $\mathbb{R}_+$ muni de la loi * définie par $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Montrer que * est associative, comutative et qu'elle a un élément neutre.
4. Etudier les propriétés des lois $\cup$ et $\cap$ sur l'ensemble des parties d'un ensemble.

## Corrigé :

1. – Si $\vec{N}$ non nul, $\vec{N} \wedge \vec{u} \neq \vec{u}$ car perpendiculaire au plan $(\vec{N}, \vec{u})$
   Si $\vec{N}$ nul, $\vec{N} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, alors il n'y a aucun élément neutre, aucune notion d'inverse et $\vec{0}$ est absorbant.
   – $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ donc pas de commutativité.
   – $\left.\begin{array}{r} \vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{0} = \vec{0} \\ (\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \end{array}\right\}$ donc pas d'associativité.
   – $\left.\begin{array}{l} A = \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{0}, -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k} \\ B = \mathbb{R}^3 \\ C = \vec{0} \\ D = \vec{u} \in \mathbb{R}^3 / \|\vec{u}\| \leq 1 \end{array}\right\}$ sont des parties stables.
2. Loi d'oubli à droite : $x * y = x$
   La loi * a un neutre $\iff \sharp E = 1$
   *Condition nécessaire ?* Supposons $e$ neutre. $\forall x \in E,\ x * e = e * x = x$. Donc $\forall x \in E, x = e$ donc $E = e$.
   *Condition suffisante ?* Si $E = a,\ a * a = a * a = a$. Donc $a$ est neutre.

   Donc la loi d'oubli à droite possède une infinité d'éléments neutres à droite.
   La loi est commutative $\iff \sharp E = 1$.
   $\left.\begin{array}{r} x * (y * z) = x \\ (x * y) * z = x * y = x \end{array}\right\}$ Donc la loi d'oubli à droite est associative.
   Elle ne possède cependant pas d'inverse.

   On procède de la même manière pour l'étude de la loi d'oubli à gauche.
3. –
   $$x * (y * z) = \sqrt{x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2})^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} = (x * y) * z$$
   Donc la loi * est associative.
   –
   $$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$
   Donc la loi * est commutative.

   – $x * 0 = 0 * x = \sqrt{x^2} = |x| = x$ car $x \geq 0$. Donc 0 est l'élément neutre.

4. – – $A \cup B = B \cup A \Rightarrow$ Commutativité.
   – $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \Rightarrow$ Associativité.
   – $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \Rightarrow$ Elément neutre $= \emptyset$.
   – $A \cup E = E \cup A = E \Rightarrow$ Elément absorbant $= E$
   – – $A \cap B = B \cap A \Rightarrow$ Commutativité.
   – $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \Rightarrow$ Associativité.
   – $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \Rightarrow$ Elément absorbant $= \emptyset$.
   – $A \cap E = E \cap A = A \Rightarrow$ Elément neutre $= E$

### 1.3 Différence symétrique

## Enoncé :

Soient $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. La fonction caractéristique de $A$ dans $E$ est l'application $f_A$ de $E$ valeurs $\{0,1\}$ telle que

$$f(x) = 1 \iff x \in A$$

1. Soient$A$ et $B$ deux parties de $E$. Que représentent les fonctions $g$ et $h$ définies par $g = max(f_A, f_B)$ et $h = min(f_A, f_B)$ ?
2. Quel est l'ensemble sur lequel la fonction $d = f_A + f_B$ prend des valeurs impaires ?
3. Soit $\Delta$ l'opération qui associe à deux parties $A$ et $B$ l'ensemble $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Montrer que $\Delta$ est associative.
4. Montrer que $\Delta$ admet un élément neutre. Y'a-t-il des éléments absorbants ?
5. Montrer que la loi $\Delta$ est abélienne, puis que tout élement de $P(E)$ est symétrisable pour $\Delta$. Conclure sur la structure de $(\mathcal{P}(E), \Delta)$.

## Corrigé :

1. $$g = max(f_A, f_B) \Rightarrow g \in E^{\{0,1\}} \Rightarrow g = f_{A\cup B}$$
$$h = min(f_A, f_B) \Rightarrow h \in E^{\{0,1\}} \Rightarrow h = f_{A\cap B}$$
2. $d$ prend des valeurs impaires sur l'ensemble $A$ ($d = 1+0$) ou sur l'ensemble $B$ ($d = 0+1$) mais pas sur l'intersection de $A$ et de $B$ ($d = 1+1$). Donc $d$ est impair sur l'ensemble $(A\cup B)\backslash(A\cap B) \iff A\Delta B$. On dit que $A\Delta B$ est la différence symétrique et $d' = (f_A + f_B) \mod 2$ est la fonction caractéristique de $A\Delta B$.
3. $$\begin{aligned} (A\Delta B)\Delta C &\overset{?}{=} A\Delta(B\Delta C) \\ &= [(A\cup B)\backslash(A\cap B)]\Delta C \\ &= [[(A\cup B)\backslash(A\cap B)]\cup C]\backslash[[(A\cup B)\backslash(A\cap B)\cap C]] \\ &= etc\ldots \end{aligned}$$

   Calculons plutôt les fonctions caractéristiques des deux ensembles :

   $$\begin{aligned} f_{(A\Delta B)\Delta C} &= (f_{A\Delta B} + f_C) \mod 2 \\ &= ([(f_A + f_B) \mod 2] + f_C) \mod 2 \\ &= [(f_A + f_B) + f_C] \mod 2 \\ &= [f_A + (f_B + f_C)] \mod 2 \\ &= f_{A\Delta(B\Delta C)} \end{aligned}$$

   Donc $\Delta$ est associative.
4. $f_{neutre}$ = neutre de l'addition des fonctions. Donc $f_{neutre} = 0 \Rightarrow neutre = \emptyset$.
5. – $f_{A\Delta B} = (f_A + f_B) \mod 2 = (f_B + f_A) \mod 2 = f_{B\Delta A}$. Donc $\Delta$ est une loi abélienne.
   – Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $f_{A\Delta A} = (2f_A) \mod 2 = 0 = f_\emptyset$. Tous les ensembles sont donc leur propre inverse.

### 1.4 Le magma des arbres binaires

## Enoncé :

On appelle $\Gamma_n$ le nombre d'arbres binaires complets à $2n+1$ sommets.

1. Démontrer par récurrence que tout arbre binaire complet avec $2n+1$ sommets comporte $n$ nœuds internes et $n+1$ feuilles.
2. On note $P_n$ le nombre de triplets de la forme $(x, B, N)$ où $x$ désigne un des deux éléments de l'ensemble $(G, D)$, où $B$ désigne un arbre binaire complet à $2n+1$ sommets et où $N$ désigne un nœud quelconque. On note de même $Q_n$ l'ensemble des couples de la forme $(B, F)$ où $B$ désigne un arbre binaire complet à $n$ nœuds et où $F$ désine une feuille quelconque de $B$.
Montrer que l'on peut construire un bijection, que l'on explicitera, entre l'ensemble $P_n$ et l'ensemble $Q_{n+1}$.
3. Se servir de la bijection précédente pour établir l'identité :
$$2(2n+1)\Gamma_n = (n+2)\Gamma_{n+1}$$
4. Montrer que $\Gamma(n)$ est le nombre de Catalan d'ordre $n$ :
$$\Gamma_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

## Corrigé :

**Rappels :** On définit l'ensemble $\mathcal{A}$ des arbres binaires complets par induction structurelle comme étant le plus petit ensemble vérifiant les deux axiomes suivants :

- Base : $\Box \in \mathcal{A}$ avec $\Box$ une feuille.

- Hérédité : Si $A_1$ et $A_2$ sont deux éléments de $\mathcal{A}$, alors $\underset{A_1 A_2}{/\ \backslash}$ est un arbre binaire complet.

1. Soit $\mathcal{T}$ un prédicat de domaine $\mathcal{A}$
   - Base :$\mathcal{T}(\Box)$ est vrai.

   - Hérédité : Si $A_1$ et $A_2$ sont deux élements de $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{T}(A_1) \wedge \mathcal{T}(A_2) \Rightarrow \mathcal{T}(\underset{A_1 A_2}{/\ \backslash})$ alors $\forall \Gamma \in \mathcal{A},\ \mathcal{T}(\Gamma)$.

   Soit $\mathcal{T}(\Gamma)$ le prédicat de domaine $\mathcal{A}$ : "Si $\Gamma$ a $n$ nœuds internes, alors $\Gamma$ a $n+1$ feuilles."
   - Base : $\mathcal{T}(\Box)$ : 0 nœud interne et 1 feuille.

   - Hérédité : Soit $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}^2$ tels que $\mathcal{T}(A_1) \wedge \mathcal{T}(A_2)$. Soit $\Gamma = \mathcal{T}(A_1) \wedge \mathcal{T}(A_2)$.
     Le nombre de nœuds internes de $\Gamma = 1 + n_1 + n_2 = N$
     Le nombre de feuils de $\Gamma = n_1 + 1 + n_2 + 1 = N + 1$
     Donc $\mathcal{T}(\Gamma)$.

   Donc d'après le principe de récurrence, $\forall \Gamma \in \mathcal{A}, \mathcal{T}(\Gamma)$.
2.

### 1.5 Le monoïde des mots

## Enoncé :

Si $u$ est un mot de $A^*$ et $L$ est un langage sur $A$, on définit le langage résiduel $u^{-1}L$ de $L$ par rapport à $u$ en posant

$$u^{-1}L = \{v \in A^*,\ uv \in L\}$$

1. Calculez le résiduel par rapport à une lettre des langages suivants :
   - L'ensemble de tous les mots.
   - L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ ayant autant de $a$ que de $b$.
   - L'ensemble des mots dont la longueur est un multiple de 3.
2. Soit $a$ une lettre de $A$ et soient $K$ et $L$ deux langages sur $A$. Montrer que les identités suivantes sont alors vérifiées :

$$a^{-1}(K \cup L) = a^{-1}K \cup a^{-1}L,$$

$$a^{-1}(KL) = \begin{cases} (a^{-1}K)L \cup a^{-1}L & si\ \varepsilon \in K, \\ (a^{-1}K)L & sinon \end{cases}$$

## Corrigé :

1. Soit $x$ une lettre.
   - $x^{-1}A* = A*$
   - Si $L = \{\text{mots sur } \{a, b\} \text{ avec autant de } a \text{ que de } b\}$ :
     - $x^{-1}L = L$ si $x \neq \{a, b\}$
     - $a^{-1}L = \{\text{mots sur } \{a, b\} \text{ avec un } a \text{ de moins que de } b\}$
     - $b^{-1}L = \{\text{mots sur } \{a, b\} \text{ avec un } b \text{ de moins que de } a\}$
   - $x^{-1}L = \{v \in A*\ \ tq\ |v| = 3k + 2\}$
2. - *Première equation :*
     Montrons que $a^{-1}(K \cup L) \subset a^{-1}K \cup a^{-1}L$ :
     Soit $v \in a^{-1}(K \cup L)$. $av \in (K \cup L) \Rightarrow av \in K$ ou $av \in L \Rightarrow v \in a^{-1}K$ ou $v \in a^{-1}L$.
     Réciproquement, soit $v \in a^{-1}K \cup a^{-1}L$. Si $v \in a^{-1}K$, alors $av \in K$ donc $av \in (K \cup L)$ et donc $v \in a^{-1}(K \cup L)$. De même si $v \in a^{-1}L$. On en déduit donc que
   - *Deuxième équation :*
     Soit $v \in a^{-1}(KL)$. Alors $av = kl$ où $k \in K$ et $l \in L$.
     - Si $\varepsilon$ n'est pas dans $K$, $k \neq \varepsilon$ et $k$ s'écrit $k = ak'$ où $k' \in a^{-1}K \Rightarrow av = ak'l \Rightarrow v = k'l \Rightarrow v \in (a^{-1}K)L$.
     - Si $\varepsilon \in K$, il y a deux cas :
       - $k = \varepsilon$ alors $av = l \in L$ donc $v \in a^{-1}L$
       - $k \neq \varepsilon$ et comme ci-dessus, $v \in (a^{-1}K)L$

       Il reste à montrer que $(a^{-1}K)L \cup a^{-1}(KL)$. Soit $v \in (a^{-1}K)L \cup a^{-1}L$.
       - Si $v \in a^{-1}L$, $av = l \in L$ et $l = \varepsilon l \in K$. Dans ce cas, $av \in KL$ donc $v \in a^{-1}(KL)$.
       - Si $v \in (a^{-1}K)L$, $v = k'l$ avec $k' \in a^{-1}K$ et $l \in L$. Alors $k = ak' \in K$. Donc $av = ak'l = kl \in KL$, c'est-à-dire $v \in a^{-1}(KL)$.

# 2 Groupes I

## 2.1 Exercice 1

### Enoncé :

Soit $G$ un groupe vérifiant la propriété suivante : $\forall x \in G,\ x^2 = e$. Montrez que $G$ est commutatif.

### Corrigé :

$\forall x \in G,\ x^2 = e$, c'est-à-dire $x^{-1} = x$. Donc $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. $G$ est donc commutatif.

## 2.2 Exercice 2 (Sous-groupe conjugué par un élément)

### Enoncé :

Soit $G$ un groupe sur lequel on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$(x\mathcal{R}y \iff \exists a \in G\ tq\ y = axa^{-1})$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $a \in G$, $H$ un sous-groupe de $G$, montrer que $H' = aHa^{-1} = \{axa^{-1},\ x \in H\}$ est un sous-groupe de $G$. $H'$ est appelé le sous-groupe conjugué de $H$ par $a$.

### Corrigé :

1. – Refléxivité :
   Soit $x \in G$ quelconque fixé, montrons $x\mathcal{R}x$, c'est-à-dire $\exists a \in G\ tq\ x = axa^{-1}$.
   Posons $a = e$, alors $x = exe^{-1} = x$. Or x est quelconque dans $G$, donc $x\mathcal{R}x$.
   – Symétrie :
   Soit $(x, y) \in G^2\ tq\ x\mathcal{R}y$. On doit montrer $y\mathcal{R}x$, c'est-à-dire $\exists z \in G\ tq\ x = zyz^{-1}$.
   On a $y = bxb^{-1}$, donc $x = b^{-1}yb$. On peut donc prendre $z = b^{-1}$ pour que $y\mathcal{R}x$.
   – Transitivité :
   Soit $(x, y, z) \in G^3$ quelconques fixés et tels que $x\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}y$. On a donc $x = aya^{-1}$ et $y = bzb^{-1}$, d'où $x = abzb^{-1}a^{-1}$.
   On pose $c = ab$, donc $c^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Donc $x = czc^{-1}$ avec $c \in G$. D'où $x\mathcal{R}z$.

   Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On veut montrer que $H'$ est un sous-groupe de $G$ :
   – $H' \subset G$ évident car $a \in G$, $x$ parcourt $H$ dans $G$ et $a^{-1} \in G$. Donc $axa^{-1} \in G$.

   – $H' \neq \emptyset$. On sait que $e \in H$ car $H$ sous-groupe. En prenant $x = e$, on a $axa^{-1} = aa^{-1} = e$. Donc $e \in H'$.

   – Soit $\begin{cases} y_1 = ax_1a^{-1} \in H' & avec \quad x_1 \in H \\ y_2 = ax_2a^{-1} \in H' & avec \quad x_2 \in H \end{cases}$ On veut montrer $y_1y_2^{-1} \in H'$.

   $$y_1y_2^{-1} = (ax_1a^{-1})(ax_2a^{-1})^{-1} = ax_1a^{-1}(a^{-1})^{-1}x_2^{-1}a^{-1} = ax_1x_2^{-1}a^{-1}$$

   $x_1x_2^{-1} \in H$, $a \in G$, donc $y_1y_2^{-1} \in H'$

   $\Rightarrow H'$ est un sous-groupe de $G$.

## 2.3 Exercice 3 (Une réunion de groupe qui est un groupe)

### Enoncé :

Soient $G$ un groupe $(H_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de sous-groupes de $G$.
On suppose que $\forall i \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbf{N}\ tq\ H_i \subset H_k$ et $H_j \subset H_k$. Montrer que $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} H_i$ est un groupe de $G$.

### Corrigé :

Posons $H = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} H_i$. Montrer que $H$ est un ss-groupe :

- $H \subset G$ car $\forall n \in \mathbb{N}, H_n \subset G$.

- $H_i$ est un ss-groupe donc $H \neq \emptyset$ puisque $H_i \subset H$.

- Soit $(x, y) \in H^2$, montrons que $xy^{-1} \in H$ :
  On a $x \in H \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}\ tq\ x \in H_i$ et $y \in H \Rightarrow \exists j \in \mathbb{N}\ tq\ y \in H_j$ et comme $H_j$ est un ss-groupe, $y^{-1} \in H_j$. Or, d'après l'énoncé, il existe un surgroupe commun $H_k$ à $H_i$ et $H_j$. Donc $x \in H_k$ et $y^{-1} \in H_K$, donc $xy^{-1} \in H$.

$\rightarrow H$ est un ss-groupe de $G$.

## 2.4 Exercice 4

### Enoncé :

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on définit une loi * par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', \frac{y'}{x} + x'y)$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ muni de * est un groupe.
2. Trouver $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe $\Gamma$ soit un sous-groupe du groupe défini au 1).

### Corrigé :

1. On pose $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On veut montrer que $(E, *)$ est un groupe :
   - ** est-elle interne sur E ?*
     $$\left.\begin{array}{l} xx' \in \mathbb{R}^* \text{ car } x \neq 0 \text{ et } x' \neq 0 \\ \frac{y'}{x} + x'y \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow (E, *) \text{ est un magma.}$$
   - ** est-elle associative ?*
     Soit $[(x, y), (x'y), (x'', y'')] \in E^3$ On a
     $$A = (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] = \left(xx'x'', \frac{\frac{y''}{x'} + x''y'}{x} + x'x''y\right)$$
     et
     $$B = [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = A$$
     Donc * est associative.
   - *Existe-t-il un élément neutre ?*
     Soit $(e_1, e_2) \in E\ tq\ \forall (x, y) \in E^2$. On a
     $$(x, y) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (x, y) = (x, y)$$
     et
     $$(x, y) * (e_1, e_2) = \left(xe_1, \frac{e_2}{x} + e_1 y\right) = (x, y) \Rightarrow e_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad e_2 = 0$$
     Donc $(1, 0)$ est un neutre à droite. De la même manière, on a $(1, 0)$ neutre à gauche.
     $\Rightarrow (E, *)$ est un monoïde.
   - ** est-elle inversible ?*
     Soit $(x, y) \in E^2$, on cherche $(x', y') \in E\ tq\ (x, y) * (x', y') = (1, 0)$
     $$\left(xx', \frac{y'}{x} + x'y\right) = (1, 0) \Rightarrow x' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad y' = -y$$
     Donc $(\frac{1}{x}, -y)$ est un inverse à droite. De la même manière, on a $(\frac{1}{x}, -y)$ inverse à gauche.

$\Rightarrow (E, *)$ est un groupe.

2. $\Gamma_f = \{(x, f(x))\ tq\ x \in E\}$
   Soient $M_1 = (x_1, f(x_1)$ et $M_2 = (x_2, f(x_2))$.
   On a $M_2^{-1} = (\frac{1}{x_2}, -f(x_2))$ et $M_1 * M_2^{-1} = (\frac{x_1}{x_2}, \frac{-f(x_2)}{x_1} + \frac{f(x_1)}{x_2})$
   $M_1 * M_2^{-1} \in \Gamma_f$, donc $M_1 * M_2^{-1}$ doit s'écrire sous la forme $(x, f(x))$, donc $f$ doit vérifier

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2*},\ f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{f(x_1)}{x_2} - \frac{f(x_2)}{x_1}$$

   De plus, $\Gamma_f$ doit être un ss-groupe et donc comporter l'élément $(1, 0)$.
   *Exemple de fonction :* $f(x) = 0$. On a bien $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 0 + 0 = 0$ et $(1, 0) \in \Gamma_f$.

### 2.5 Exercice 5 (Centre d'un groupe)

## Enoncé :

Soit $G$ un groupe. On note $Z(G) = \{x \in G\ tq\ xy = yx, \forall\ y \in G\}$.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $G$.
2. (Question bonus) Montrer que le conjugué de $Z(G)$ par n'importe quel élément de $G$ est lui-même. (cf Exercice 2, question 2).

## Corrigé :

1. – $Z(G) \subset G$
   – $Z(G) \neq \emptyset$ car $e \in G$ et $ye = ey\ \forall\ y \in G$.
   – Soit $(x, x') \in Z(G)^2$, montrons que
     – *$xx'$ commute avec tous les éléments de $G$*
       On pose $x'' = xx'$ et soit $y \in G$ quelconque. $(xx')y = x(x'y) = x(yx') = yxx'$. Donc le produit $xx'$ commute avec n'importe quel élément de $G$.

     – *$x^{-1}$ commute avec tous les éléments de $G$*
       Soit $y \in G$, on veut montrer que $\forall x \in Z(G),\ x^{-1} \in Z(G)$. On a

$$xy^{-1} = y^{-1}x \iff (xy^{-1})^{-1} = (y^{-1}x)^{-1} \iff yx^{-1} = x^{-1}y$$

       . Donc $x^{-1}$ commute avec n'importe quel élément de $G$.

   $\Rightarrow Z(G)$ est un sous-groupe de $G$.
2. Soit $a \in G$, montrons que $aZ(G)a^{-1} = Z(G)$ :
   – $aZ(G)a^{-1} \subset Z(G)$
     Soit $y \in aZ(G)a^{-1}$, montrons que $y \in Z(G)$.

$$y \in Z(G) \Rightarrow \exists x \in Z(G)\ tq\ y = axa^{-1} \iff y = a(xa^{-1}) = a(a^{-1}x) = (aa^{-1})x = x$$

     . Donc $y \in Z(G)$, d'où $aZ(G)a^{-1} \subset Z(G)$.

   – $Z(G) \subset aZ(G)a^{-1}$
     Soit $x \in Z(G)$, montrons que $x$ peut s'écrire sous la forme $aya^{-1}$ pour $y \in Z(G)$. Posons $y = a^{-1}xa \in Z(G)$. Alors $x = aya^{-1} = aa^{-1}xaa^{-1} = x$. Donc $\exists y \in Z(G)\ tq\ x = aya^{-1}$. Donc $Z(G) \subset aZ(G)a^{-1}$.

   $\Rightarrow Z(G) = aZ(G)a^{-1}$.

# 3 Groupes II

## 3.1 Exercice 1

### Enoncé :

Soit $G$ un groupe non commutatif. On désigne par $Aut\ G$ l'ensemble de tous les automorphismes de $G$ et par $Int\ G$ l'ensemble $(f_a)_{a \in G}$ de tous les automorphismes intérieurs de $G$ ($f_a$ est défini en posant, pour tout élément $x$ de $G$, $f_a(x) = axa^{-1}$).

1. Montrer que $Aut\ G$ est un groupe pour la composition des applications.
2. Montrer que $Int\ G$ est un sous-groupe de $Aut\ G$.
3. Montrer que l'application $\varphi : G \to Int\ G$, définie en posant pour chaque élément $a$ de $G$, $\varphi(a) = f_a$, est un homomorphisme de $G$ sur $Int\ G$.
4. Montrer que $Ker\ \varphi = Z(G)$ (cf Exercice 5 de la feuille précédente).

### Corrigé :

1. Pour montrer que $(Aut\ G, \circ)$ est un groupe, on montre que $(Aut\ G, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_G, \circ)$ avec $\mathcal{S}_G$ l'ensemble des bijections de $G$ :
   - $(Aut\ G, \circ) \neq \emptyset$ car la fonction identité est un automorphisme.
   - $(Aut\ G, \circ) \subset (\mathcal{S}_G, \circ)$ car un automorphisme est une bijection.
   - Soit $(f, g) \in (Aut\ G)^2$. Montrons que :
     - $f \circ g \in Aut\ G$. $f \circ g$ est une bijection de $G$ dans $G$. $h = f \circ g$ est un morphisme car
       $$\forall (x,y) \in G^2, (f \circ g)(xy) = f(g(xy)) = f(g(x)g(y)) = f(g(x))f(g(y)) = [(f \circ g)(x)][(f \circ g)(y)]$$
       Donc $f \circ g$ est un morphisme bijectif de $G$ dans $G$.
     - $f^{-1} \in Aut\ G$. Soit $f \in Aut\ G$, on a $f^{-1} : G \to G$ et $f^{-1}$ est une bijection.
       Soit $(x, y) \in G^2$. Notons $x'$ et $y'$ les antécédents de $x$ et $y$ par $f$. On a
       $$f^{-1}(xy) = f^{-1}(f(x')f(y')) = f^{-1}(f(x'y')) = x'y' = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$$
       Donc $f^{-1}$ est un morphisme bijectif de $G$ dans $G$.

   $\Rightarrow (Aut\ g, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_G, \circ)$, donc c'est un groupe.
2. 
   - $Int\ G \subset Aut\ G$ :
     - $f_a : G \to G$ par définition de $f_a$.
     - $f_a$ bijective. Si $y = f_a(x) = axa^{-1}$, alors $x = a^{-1}ya = f_{a^{-1}}(y)$.
     - $f_a$ morphisme. Soit $(x, y) \in G^2$, $f_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f_a(x)f_a(y)$.
   - $Int\ G \neq \emptyset$ car $Id_e(x) = exe^{-1} = x$.
   - 
     - Soit $(f_a, f_b) \in (Int\ G)^2$ fixé et quelconque. Soit $h = f_a \circ f_b$, montrons qu'il existe $c \in G$ $tq$ $h = f_c$.
       $h(x) = f_a(f_b(x)) = a(bxb^{-1})a^{-1}$. Soit $c = ab$, alors $c^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. On a donc $h = cxc^{-1}$.
     - Pour l'inverse, on a $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$.

   $\Rightarrow (Int\ G, \circ)$ est un sous-groupe de $(Aut\ G, \circ)$.
3. $\begin{array}{rcl} \varphi : (G, \cdot) & \to & (Int\ G, \circ) \\ a & \to & f_a \end{array}$

   On doit démontrer que $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, c'est-à-dire que $f_{ab} = f_a \circ f_b \longrightarrow$ voir question 2.
4. $\varphi(e) = f_e = Id_G$
   $$\begin{array}{rcll} Ker\ \varphi & = & \{a \in G\ tq\ \varphi(a) = Id_G\} & \\ & = & \{a \in G\ tq\ f_a = Id_G\} & \\ & = & \{a \in G\ tq\ \forall x \in G, f_a(x) = (x)\} & \\ & = & \{a \in G\ tq\ \forall x \in G, axa^{-1} = x\} & \\ & = & \{a \in G\ tq\ \forall x \in G, ax = xa\} & = Z(G) \end{array}$$

### 3.2 Exercice 2

## Enoncé :

Montrer que $f_a$ défini dans l'exercice 1 est un isomorphisme du groupe $G$ sur lui-même, quelque soit $a$ appartenant à $G$.

## Corrigé :

$Int\ G \subset Aut\ G$. De plus, un automorphisme est un endomorphisme bijectif. Donc $f_a$ est un isomorphisme de $G$ sur lui-même.

### 3.3 Exercice 3 (Description d'un sous-groupe engendré par la réunion de deux sous-groupes)

## Enoncé :

Soient $A$ et $B$ deux sous-groupes de $G$, et $S$ le sous-groupe engendré par $A \cup B$.

1. Montrer que $S$ est l'ensemble des éléments $x_1x_2 \ldots x_{2n+1},\ n \in \mathbb{N}$ où le n-uplet $(x_{2i})$ pour $1 \leq i \leq n$ est constitué d'éléments de $A$ ; et le (n+1)-uplet $(x_{2i+1})$ pour $0 \leq i \leq n$ est constitué d'éléments de $B$.

2. Montrer que $S = AB \iff AB = BA$.

## Corrigé :

1. Soit $X = \{y = x_1x_2 \ldots x_{2n+1}\ tq\ \forall i$ impair, $x_i \in B$ et $\forall i$ pair, $x_i \in A\}$, c'est-à-dire
$$X = B \cup (BAB) \cup (BABAB) \cup (BABABAB) \cup \ldots$$
. On veut montrer $S = X$, on procède donc par double inclusion :
   - $S \subset X$. Il suffit de montrer que $X$ est un sous-groupe de $G$ qui contient $A \cup B$ :
     - $X \subset G$ par définition.
     - $X \neq \emptyset$ car $e = e_B = e_Be_Ae_B \in X$.
     - Soit $(x, y) \in X^2$, montrons que $xy \in X$ et $x^{-1} \in X$ :
       - $x = b_0a_0b_1a_1 \ldots b_{n-1}a_{n-1}b_n$, donc $x^{-1} = b_n^{-1}a_{n-1}^{-1}b_{n-1}^{-1} \ldots b_1^{-1}a_1^{-1}b^0$. Donc $x^{-1} \in X$.
       - $y = b'_0a'_0b'_1a'_1 \ldots b'_{n-1}a'_{n-1}b'_n$. On a donc
       $$xy = xe_Ay = b_0a_0b_1a_1 \ldots b_{n-1}a_{n-1}b_ne_Ab'_0a'_0b'_1a'_1 \ldots b'_{n-1}a'_{n-1}b'_n$$
       . Donc $xy \in X$.
       
       $\Rightarrow X$ est un sous-groupe de $G$.
       $$\left.\begin{array}{l} Soit\ a \in A,\ a = e_Bae_B \in X \\ Soit\ b \in B,\ b = b \in X \end{array}\right\} \text{donc } A \cup B \in X \text{ et } S \in X$$
   - $X \subset S$. Soit $x \in X,\ x = b_0a_0b_1a_1 \ldots b_{n-1}a_{n-1}b_n$. Chaque facteur est dans $A \cup B$. Or, d'après la caractérisation de $< A \cup B >$, $x \in< A \cup B >$. Or $x$ est quelconque dans $X$, donc $X \subset S$.

   $\Rightarrow X = S$
2. <u>Indication :</u> montrer que $AB$ sous-groupe de $G \iff AB = BA$

   - $AB$ sous-groupe de $G \Rightarrow AB = BA$. On suppose que $AB$ est un sous-groupe de $G$, et on montre par double inclusion $AB = BA$ :
     - $AB \subset BA$. Soit $x \in AB$. Comma $AB$ ss-groupe, $x^{-1} \in AB$. Posons $x^{-1} = a'b'$.
       On a $x = b'^{-1}a'^{-1}$. Or $b'^{-1} \in B$ et $a'^{-1} \in A$. Donc $x \in BA$. Or $x$ est quelconque dans $AB$, donc $AB \subset BA$.
     - $BA \subset AB$. Soit $x \in BA$. Posons $x = ba \in G$. $x^{-1} = a^{-1}b^{-1} \in AB$. $AB$ est un sous-groupe, donc $x \in AB$. Or $x$ quelconque dans $BA$. Donc $BA \subset AB$.

     $\Rightarrow AB$ sous-groupe de $G \Rightarrow AB = BA$
   - $AB = BA \Rightarrow AB$ sous-groupe de $G$. On suppose $AB = BA$, on montre que $AB$ est un sous-groupe de $G$ :
     - $AB \subset G$ par définition.
     - $AB \neq \emptyset$ car $e = e_Ae_B$.
     - Soit $(x, y) \in (AB)^2$ avec $x = ab$ et $y = a'b'$.
       $xy^{-1} = abb'^{-1}a'^{-1} = a(bb'^{-1}a'^{-1})$.
       $bb'^{-1}a'^{-1} \in BA$, or $BA = AB$, donc, $\exists(a_1, b_1) \in A \times B\ tq\ bb'^{-1}a'^{-1} = a_1b_1$. Finalement, on a $xy^{-1} = aa_1b_1$ avec $aa_1 \in A$ et $b_1 \in B$. Or $(x, y) \in (AB)^2$, donc $xy^{-1} \in AB$.

$\Rightarrow AB = BA \Rightarrow AB$ sous-groupe de $G$.

$\Rightarrow AB$ sous-groupe de $G \iff AB = BA$.

### 3.4 Exercice 4

## Enoncé :

Soient $G_0,\ G_1,\ G_2$ des groupes, $f_1$ un homomorphisme surjectif de $G_0$ sur $G_1$ et $f_2$ un homomorphisme de $G_0$ dans $G_2$ tels que $Ker\ f_1 \subset Ker\ f_2$.

1. Montrer que l'on peut définir une application $g$ de $G_1$ dans $G_2$ telle que pour tout $y$ de $G_1$, $g(y) = f_2(x)$ où $x \in f_1^{-1}(\{y\})$.
2. Montrer que $g$ est un homomorphisme de $G_1$ dans $G_2$.
3. Montrer que $Ker\ g = f_1(Ker\ f_2)$.

## Corrigé :

1. On doit montrer :
   - que $g$ est défini partout. Tout élément de $G_1$ a au moins un antécédent dans $G_0$ par surjectivité de $f_1$. Donc on peut poser $g(y) = f_2(x)$.
   - que la valeur de $g(y)$ ne dépend pas de l'antécédent $x$ :
     Soient $x, x'$ deux antécédents de $y$ par $f_1$, montrons que $f_2(x) = f_2(x')$ :
     $$\begin{aligned} f_1(x) = f_1(x') = y &\Rightarrow f_1(x)[f_1(x')]^{-1} = e_1 \\ &\Rightarrow f_1(x)f_1(x'^{-1}) = e_1 \\ &\Rightarrow f_1(xx'^{-1}) = e_1 \\ &\Rightarrow xx'^{-1} \in Ker\ f_1 \end{aligned}$$
     Donc
     $$\begin{aligned} xx'^{-1} \in Ker\ f_2 \text{ (par hypothèse)} &\Rightarrow f_2(xx'^{-1} = e_2 \\ &\Rightarrow f_2(x)f_2(x'^{-1}) = e_2 \\ &\Rightarrow f_2(x)f_2^{-1}(x') = e_2 \\ &\Rightarrow f_2(x) = f_2(x') \end{aligned}$$
     Donc la valeur de $g(y)$ ne dépend pas de l'antécédent de $y$.
2. Soit $(y_1, y_2) \in G_1^2$, on doit montrer que $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$.
   Soient $x_1,\ x_2$ les antécédents respectifs de $y_1$ et $y_2$. On a $f_1(x_1) = y_1$ et $f_1(x_2) = y_2$
   $g(y_1) + g(y_2) = f_2(x_1) + f_2(x_2) = f_2(x_1 + x_2) = g(y_1 + y_2)$. Donc $g$ est bien un morphisme de $G_1$ dans $G_2$.
3. - Soit $y \in Ker\ g$ et soit $x \in f_1^{-1}(\{y\})$ $tq$ $g(y) = f_2(x) = e_2$ Donc $x \in Ker\ f_2$ et $x \in Ker\ f_1$.
     $y = f_1(x)$ avec $x \in Ker\ f_2$, donc $y \in f_1(Ker\ f_2)$.

   - Soit $y \in f_1(Ker\ f_2)$, $y$ s'écrit sous la forme $f_1(x)$ avec $x \in Ker\ f_2$. On a $g(y) = f_1(x) = e_2$ car $x \in Ker\ f_2$. Donc $y \in Ker\ g$.

   $\Rightarrow Ker\ g = f_1(Ker\ f_2)$

# 4 Espaces vectoriels I

## 4.1 Exercice 1

### Enoncé :

Soit $\Gamma$ l'ensemble des suites de nombres réels. On définit $\Gamma$ une loi de composition interne, notée $(+)$, par :

- $\forall \mathbb{U} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall \mathbb{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \mathbb{U} + \mathbb{V} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

et on définit une loi de composition externe notée $(\cdot)$, à coefficient dans $\mathbb{R}$, par :

- $\forall \mathbb{U} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot \mathbb{U} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que $\Gamma$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

### Corrigé :

Une suite à valeurs réelles est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Donc $\Gamma = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc $\Gamma$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

## 4.2 Exercice 2

### Enoncé :

Soit $E = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = a$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $E$ soit une sev de $\mathbb{R}^3$.

### Corrigé :

- Condition nécessaire : il faut que l'élément neutre soit dans E. Donc $(0, 0, 0) \in E$, donc $a = 0$.
- Condition suffisante : On suppose $a = 0$, est-ce que $\mathrm{E}_0$ est un sev ?
  - $\mathrm{E}_0 \neq \emptyset$ car $0 \in E_0$.

  - Soit $(M, M') \in E_0^2$.
    $(2x + y - z) + (2x' + y' - z') = 0 \iff 2(x + x') + (y + y') - (z + z') = 0$
    Donc $M'' \in E_0$ avec $M'' \left| \begin{array}{l} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{array} \right.$
    Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(2x + y - z) = 0 \iff 2\lambda x + \lambda y - \lambda z = 0$.
    Donc $\lambda M \in E_0$.

Donc $E_0$ est un espace vectoriel.

## 4.3 Exercice 3

### Enoncé :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $E$ l'ensemble des fonctions numériques $f$ définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f(2) = a$.
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ pour que $E$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

### Corrigé :

Soient $a \neq 0,\ (f, g) \in E_0^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $f(a) + g(a) = a + a = 2a$ et $\lambda f(a) = \lambda$. Il faut donc que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda a = 2a$, donc $a = 0$.
A contrario, $\mathrm{E}_0$ est un sev.

Donc, une condition nécessaire et suffisante pour que E soit un sev est $a = 0$.

### 4.4 Exercice 4 (Exemple de structure vectorielle sur $\mathbb{R}$)

## Enoncé :

Soit $\sigma$ une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit sur $\mathbb{R}$ les opérations * et $\perp$ suivantes :

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

$$x \perp y = \sigma(x) \cdot y$$

Déterminer $\sigma$ de façon que $\mathbb{R}$ soit un espace vectoriel sur lui-même vis-à-vis de ces deux opérations, la première étant un loi de composition internet et la seconde une loi de composition externe.

## Corrigé :

On doit avoir

1. (E,*) groupe abélien.
2. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\alpha + \beta) \perp x = (\alpha \perp x) + (\beta \perp y)$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \perp (x * y) = (\alpha \perp x) * (\beta \perp y)$.
4. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \perp (\beta \perp x) = (\alpha\beta) \perp x$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \perp x = x$.

On a :

1. (E,*) groupe (trivial à démontrer).
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma(1) \cdot x = x$. Donc il est nécessaire que $\sigma(1) = 1$.
3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R}, \sigma(\alpha = [\sigma(\beta)x] = \sigma(\alpha\beta)x$. Donc $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta)$.
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) \sqrt[3]{x^3 + y^3} &= \sqrt[3]{(\sigma(\alpha)x)^3 + (\sigma(\alpha)y)^3} \\
&= \sqrt[3]{[\sigma(\alpha)]^3 (x^3 + y^3)} \\
&= \sigma(\alpha) \sqrt[3]{x^3 + y^3} \\
&= \sigma(\alpha)(x * y)
\end{aligned}$$

   Ceci n'apporte aucune information sur $\sigma$.

5. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha + \beta)x &= \sqrt[3]{(\sigma(\alpha)x^3) + (\sigma(\beta)x^3)} \\
&= x \sqrt[3]{\sigma(\alpha)^3 + \sigma(\beta)^3} \\
\sigma(\alpha + \beta) &= \sqrt[3]{\sigma(\alpha)^3 + \sigma(\beta)^3} \\
&= \sigma(\alpha) * \sigma(\beta)
\end{aligned}$$

On pose $\tau(x) = \sigma^3(x)$
$\tau$ vérifie : $\tau(1)$=1, $\tau$ multiplicatrice, $\tau$ additive $\Rightarrow \tau(x) = x,\ \tau(xy) = \tau(x)\tau(y),\ \tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$.
On va montrer que pour tout rationel $\frac{p}{q}$, $\tau(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$.
Soit $n \in \mathbb{N},\ n = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$, donc $\tau(n) = \tau(1) + \tau(1) + \ldots + \tau(1) = n\tau(1) = n$ ;
$\tau(0) = 0 = \tau(-n) + \tau(n)$, donc $\tau(-n) = -n$ (avec $n \in \mathbb{Z}$).
$\tau(x.\frac{1}{x}) = \tau(x).\tau(\frac{1}{x}) = 1$, donc $\tau(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\tau(x)}$.

D'où $\tau(\frac{p}{q}) = \tau(p)\tau(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}$.

$\tau = \sigma^3$, donc $\sigma(x) = \sqrt[3]{\tau(x)} = \sqrt[3]{x}$.

### 4.5 Exercice 5

## Enoncé :

Soit (E, +) un groupe abélien, muni d'une loi de composiiton externe (*) sur $\mathbb{R}$ vérifient les postulats suivants :

Distributivité par rapport aux vecteurs : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y.$

Distributivé par rapport aux scalaires : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in E,\ (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x.$

Associativité mixte : $\forall (\alpha, \beta) \in {}^2,\ \forall x \in E,\ (\alpha\beta) * x = \alpha * (\beta * x).$

1. Montrer que $\forall \rho \in \mathbb{R}$, l'application $h_\rho$ de E dans lui-même définie par : $h_\rho(x) = \rho * x$ est un endomorphisme du groupe E.
2. On considère l'endomorphisme $h_1$. Soit $E_1$ son image, $E_2$ son noyau.
   Montrer que $E_1 = \{x \in E,\ 1 * x = x\}$.
3. Montrer que $E_1 \cap E_2 = 0$ et que tout $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$.
4. Montrer que $E_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les deux lois définies sur E.

## Corrigé :

1. Soit $h_\rho$ une homotétie de rapport $\rho$ telle que $h_\rho$ :

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \rho * x \end{array}$$

   $h_\rho$ morphisme car $\forall (x, y) \in E^2,\ h_\rho(x + y) = h_\rho(x) + h_\rho(y)$ (cf axiomes).
2. Soit $E_1 = Im\ h_1$ et $E_2 = Ker\ h_1$.
   $Im\ h_1 = \{y \in E / \exists x \in E,\ h_1(x) = y\}$.
   $Ker\ h_1 = \{x \in E / h_1(x) = 0\}$.
   Soit $X = \{x \in E / h_1(x) = x\}$.

   *Double inclusion*
   - $X \subset Im\ h_1$ : Soit $x \in X$, $x = h_1(x)$, donc $x \in Im\ h_1$.
   - $Im\ h_1 \subset X$ : Soit $x \in Im\ h_1,\ \exists x' \in E\ tq\ h_1(x') = x$. On a

   $$h_1(x) = h_1(h_1(x')) = 1 * (1 * x) = 1 * x = h_1(x') = x$$

     Donc $x \in X$.

   Donc on a $X = Im\ h_1$.
3. $Ker\ h_1 \cap Im\ h_1 = \{0\}$.

   *Double inclusion*
   - $\{0\} \subset E_1 \cap E_2$ : Evident ar $Ker\ h_1$ et $Im\ h_1$ sont des groupes.
   - $E_1 \cap E_2 \subset \{0\}$ : Soit $x \in E_1 \cap E_2$, $h_1(x) = 0$ et $h_1(x) = x$
     On pose $x_1 = h_1(x)$ et $x_2 = x - h_1(x)$ On a $x_1 \in Im\ h_1$.
     $h_1(x_2) = h_1(x) - h_1(h_1(x)) = 0 \Rightarrow x_2 \in Ker\ h_1$.

   Donc $x = x_1 + x_2$
4. Sur $E_1$, les axiomes 1,2 et 3 sont vrais. On vient de démontrer le quatrième, donc $E_1$ est un $\mathbb{R}$-ev.

# 5 Espaces vectoriels II

## 5.1 Exercice 1

Enoncé :

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev, $F$ et $G$ deux sev de $E$. Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$.

1. Montrer que $Vect(F \cup G) = F + G$.
2. Montrer que

$$Vect(X) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

Corrigé :

1. – $Vect(F \cup G) \subset F + G$.
   On démontre $F + G$ est un sev de $E$ contenant $F \cup G$

   – E est un $\mathbb{K}$-ev.
   – $F + G \neq \emptyset$ car $F$ et $G$ sont des sev et contiennent 0.
   – $F \subset E$, $G \subset E$, donc $F + G \subset E$.
   – Soit $(x, y) \in (F + G)^2$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$,
   $x + \lambda y = x_G + x_F + \lambda(y_G + y_F) = x_F + \lambda y_F + x_G + \lambda y_G$.
   Or $x_F + \lambda y_F \in F$ et $x_G + \lambda y_G \in G$.
   Donc $x_F + \lambda y_F + x_G + \lambda y_G \in F + G$.
   $\Rightarrow F + G$ est un sev de $E$.

   $F \subset F + G$, $G \subset F + G \Rightarrow F \cup G \subset F + G$.
   $\Rightarrow Vect(F \cup G) \subset F + G$.
   – $F + G \subset Vect(F \cup G)$.
   Soit $x \in F + G$, $x = x_F + x_G$. $x$ s'écrit donc comme combinaison linéaire sur $F \cup G$.
   $x \in CL(F \cup G)$, or $CL(F \cup G) = Vect(F \cup G)$. Donc $x \in Vect(F \cup G)$. Or $x$ quelconque dans $F + G$.
   $\Rightarrow F + G \subset Vect(F \cup G)$.

   $\Rightarrow Vect(F \cup G) = F + G$.
2. – $Vect(X) \subset CL(X)$.
   On démontre que $CL(X)$ est un sev de $E$ contenant $X$.
   – $CL(X) \neq \emptyset$, $X \in CL(X) \in E$, $E$ est un $\mathbb{R}$-ev.
   – Soient $a = \lambda x_1 + \ldots + \lambda x_n \in X$ et $b = \mu x_1 + \ldots + \mu x_n$.
   $a + b \in CL(X)$, $\alpha a \in CL(X) \Rightarrow CL(X)$ sev de $E$.
   $\Rightarrow Vect(X) \subset CL(X)$.
   – $CL(X) \subset Vect(X)$ (voir cours)
   Donc

$$Vect(X) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

## 5.2 Exercice 2

# Enoncé :

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev, $(x,y,z) \in E^3$ et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{K}^3$ tels que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

avec $\alpha\beta \neq 0$.
Montrer que $Vect(x,z) = Vect(y,z)$.

# Corrigé :

- $Vect(x,z) \subset Vect(y,z)$
  $u = ax + bz$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On cherche $(a',b') \in \mathbb{K}^2$ tels que $u = a'y + b'z$
  On a $x = \frac{-\beta}{\alpha}y - \frac{\gamma}{\alpha}z$ $(\alpha \neq 0)$.
  D'où $u = \frac{-a\beta}{\alpha}y + (b - \frac{a\gamma}{\alpha})z$. Donc $u \in Vect(y,z)$.
  $\Rightarrow Vect(x,z) \subset Vect(y,z)$.
- $Vect(y,z) \subset Vect(x,z)$
  Cette inclusion se démontre de la même façon en échangeant x avec y et $\alpha$ avec $\beta$.
  $\Rightarrow Vect(y,z) \subset Vect(x,z)$

$\Rightarrow Vect(x,z) = Vect(y,z)$.

## 5.3 Exercice 3

# Enoncé :

1. Soient $P_1$ et $P_2$ deux parties d'un $\mathbb{K}$-ev $E$. Montrer que

$$Vect\ (P_1 \cup P_2) = Vect(Vect\ P_1 \cup Vect\ P_2)$$

2. Montrer que

$$Vect(P_1 \cup P_2) = Vect\ P_1 \cup Vect\ P_2 \iff P_1 \subset Vect\ P_2 \vee P_2 \subset Vect\ P_1$$

3. On considère trois parties $P$, $P_1$ et $P_2$ de $E$. Montrer que

$$(Vect\ P_1 = Vect\ P_2) \Rightarrow (Vect(P_1 \cup P) = Vect(P_2 \cup P))$$

# Corrigé :

Posons $E_1 = Vect\ P_1$, $E_2 = Vect\ P_2$, $A = Vect\ (P_1 \cup P_2)$ et $B = Vect(E_1 \cup E_2)$.

1. On veut montrer que $A = B$. On procède par double inclusion :
   - $A \subset B$. On a $P_1 \subset E_1$ et $P_2 \subset E_2$. Donc $P_1 \cup P_2 \subset E_1 \cup E_2$, d'où $A \subset B$.
   - $B \subset A$. Soit $x \in B$. D'après l'exercice I, $Vect(E_1 \cup E_2) = E_1 + E_2$. Donc $\exists (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Comme $(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$, alors $(x_1,x_2) \in CL(P_1) \times CL(P_2)$. Donc

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i y_i$$

   . Donc $x \in CL(P_1 \cup P_2) \iff x \in A$. Or $x$ quelconque dans $B$, d'où $B \subset A$
   Donc $A = B$.
2. 
3. $E_1 = E_2 \iff Vect(P_1 \cup P)$. On suppose $E_1 = E_2$. D'après la première question, on a

$$\begin{aligned} Vect(P_1 \cup P) &= Vect(P_1) \cup VectP \\ &= Vect(P_2) \cup Vect\ P \\ &= Vect(P_2 \cup P) \end{aligned}$$

### 5.4 Exercice 4

## Enoncé :

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-ev, $F^E$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $E$ dans $F$, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{I}$ respectivement des fonctions paires et impaires de $E$ dans $F$.

1. Vérifier que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{I}$ sont des $\mathbb{R}$-ev.
2. Montrer que $F^E = \mathbb{P} \oplus \mathbb{I}$
3. Considérons $E = F = \mathbb{R}$. Décomposer la fonction exponentielle en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

## Corrigé :

On sait que $\mathbb{P} = \{f \in F^E \ tq \ f(-x) = f(x)\}$ et $\mathbb{I} = \{f \in F^E \ tq \ f(-x) = -f(x)\}$.

1. Pour montrer que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{I}$ sont des $\mathbb{R}$-ev, on montre que ce sont des ss-ev de $F^E$ :
   - $\mathbb{I} \subset F^E$ par définition.
   - $\mathbb{I} \neq \emptyset$ car la fonction nulle est impaire.
   - Soient $(f,g) \in (F^E)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $h = \alpha f + \beta g$ et on montre que $h$ est impaire :
     Soit $x \in E$,
     $$\begin{array}{rcl} h(-x) & = & \alpha f(-x) + \beta g(-x) \\ & = & -\alpha f(x) - \beta g(x) \\ & = & -(\alpha f(x) + \beta g(x)) \\ & = & -h(x) \end{array}$$
     Donc $h \in \mathbb{I}$.

   Donc $\mathbb{I}$ est un ss-ev de $F^E$. On procède de la même manière pour $\mathbb{P}$.
2. $F^E = \mathbb{P} \oplus \mathbb{I} \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P} + \mathbb{I} = F^E \\ \mathbb{P} \cap \mathbb{I} = \{\Theta\} \end{array} \right.$
   - On montre que $\{\Theta\}$ est la seule fonction paire et impaire.
     Soit $f \in \mathbb{P} \cap \mathbb{I}$ et $x \in E$. $f(-x) = f(x) = -f(x) \iff 2f(x) = 0 \iff f(x) = 0, \ \forall x \in E$. Donc, $\mathbb{P} \cap \mathbb{I} = \{\Theta\}$.
   - On doit montrer que toute fonction de $F^E$ se décompose (au moins d'une façon) sous la forme $f = p + i$ ($p \in \mathbb{P}, \ i \in \mathbb{I}$).
     Soit $x \in E$ quelconque, on a $\left| \begin{array}{l} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{array} \right.$ D'où $\left| \begin{array}{l} p(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ i(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{array} \right.$
     Donc $F^E = \mathbb{P} + \mathbb{I}$

   Donc $F^E = \mathbb{P} \oplus \mathbb{I}$

### 5.5 Exercice 5

## Enoncé :

Soient $F$ le sev d e$\mathbb{K}^2$ engendré par $x = (1,1)$ et $G = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2, x+y = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{K}^2$

## Corrigé :

$F = Vect[(1,1)]$ et $G = Vect[(1,-1)]$. On veut montrer $\left| \begin{array}{rcl} F+G & = & \mathbb{K}^2 \\ F \cap G & = & (0,0) \end{array} \right.$

- Soit $u \in F \cap G$. $u = (\alpha,\alpha)$ car $u \in F$ et $u = (\beta,-\beta)$ car $u \in G$. Donc $\beta = -\beta \iff \beta = 0$. Donc $u = (0,0)$. Or $u$ est quelconque dans $F \cap G$, donc $F \cap G = (0,0)$.
- Soit $u = (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, puis-je trouver $\lambda_1, \lambda_2$ tels que $u = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)$ ?

$$u = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) \Rightarrow \begin{array}{rcl} \alpha & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \beta & = & \lambda_1 - \lambda_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \lambda_2 & = & \frac{\alpha-\beta}{2} \end{array}$$

On a pu trouver $\lambda_1, \lambda_2$ tels que $u = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)$. Or $u$ quelconque dans $\mathbb{K}^2$, donc $F+G = \mathbb{K}^2$. Donc $F \oplus G = \mathbb{K}^2$

# 6 Espaces vectoriels III

## 6.1 Exercice 1

### Enoncé :

Soient $f_1, f_2$ les fonctions définies sur $]-1,1[$ par :

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, f_2(x) = \frac{1}{x+1}$$

1. Montrer que les fonctions $(f_1, f_2)$ sont linéairement indépendantes.
2. Montrer que la fonction $f$ définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par $(f_1, f_2)$.

### Corrigé :

1. Soient $I = ]-1,1[$ et $E = \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^I$. $E$ est le $\mathbb{R}$-ev des applications de $I \to \mathbb{R}$.
   Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *tq* $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$. Montrons que <u>nécessairement</u>, $\alpha = \beta = 0$. Ceci s'écrit

$$\forall x \in I, \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} = 0$$

   On prend $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\alpha + \beta & = & 0 \\ -2\alpha + \frac{2}{3}\beta & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \beta \\ \beta & = & 0 \end{array} \right.$$

   On a donc $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. Donc $(f_1, f_2)$ est une famille libre.
2. 

$$\begin{array}{rcl} f \in Vect(f_1,f_2) & \Longleftrightarrow & f \in CL(f_1,f_2) \\ & \Longleftrightarrow & \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \ tq \ f = \alpha f_1 + \beta f_2 \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in I, \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x+1} = \dfrac{2}{x^2-1} \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in I, \dfrac{\alpha(x+1)+\beta(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{2}{x^2-1} \\ & \Longleftrightarrow & (\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta) = 2 \end{array}$$

   Par la méthode des coefficient indéterminés, on a $\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha + \beta & = & 0 \\ \alpha - \beta & = & 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & -1 \end{array} \right.$ On a donc $f = \alpha f_1 + \beta f_2$, donc $f \in Vect(f_1, f_2)$

### 6.2 Exercice 2

## Enoncé :

Etudier la dépendence linéaire des systèmes suivants :

1. $(s; s \circ s; s \circ s \circ s)$ considéré dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec $s(x) = \sin(x)$.
2. $(f_1, f_2, f_3)$ définies respectivement sur $]-1, 2[$ par

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}},\ f_2(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$$

## Corrigé :

1. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ $tq$ $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \sin(\sin(x)) + \gamma \sin(\sin(\sin(x))) = 0$.
   On pose $y = \sin(\sin(x))$, on a alors

   $$\alpha \arcsin(y) + \beta y + \gamma \sin(y) = 0$$

   En dérivant, on obtient

   $$\alpha(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} + \beta + \gamma \cos(y) = 0$$

   . En dérivant de nouveau, on a

   $$\alpha y(1-y^2)^{-\frac{3}{2}} - \gamma \sin(y) = 0$$

   Or la famlle $(y \mapsto \sin(y);\ y \mapsto y(1-y^2)^{-\frac{3}{2}})$ est libre, donc $\alpha = \gamma = 0$. En réinjectant dans la première équation, on a $\beta = 0$. On a donc $\alpha \sin(x) + \beta \sin(\sin(x)) + \gamma \sin(\sin(\sin(x))) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.
   Donc $(s; s \circ s; s \circ s \circ s)$ est une famille libre.
2. $I = ]-1; 2[$ et $E = \mathcal{F}(I, R)$.
   On pose $h(x) = \sqrt{2-x}$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.
   On a

   $$f_1(x) = \frac{h(x)}{g(x)},\ f_2(x) = \frac{g(x)}{h(x)},\ f_3(x) = \frac{1}{g(x)h(x)}$$

   On cherche une relation de dépendence linéaire sur $(f_1, f_2, f_3)$. Existe-t-il $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$ tels que $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$ ?

   $$\begin{aligned}
   \frac{\alpha h^2 + \beta g^2 + \gamma}{gh} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha(2-x) + \beta(x-1) + \gamma = 0 \\
   &\Rightarrow \quad (\beta - \alpha)x + (2\alpha + \beta + \gamma) = 0 \\
   &\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \beta - \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array} \right. \\
   &\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \gamma = -3\beta \end{array} \right.
   \end{aligned}$$

   Il y a une infinité de solutions $(f_1 + f_2 = 3f_3)$ donc la famille $(f_1, f_2, f_3)$ est une famille liée.

### 6.3 Exercice 3

# Enoncé :

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, considérons la famille de fonctions $((f_k)_{1\leq k\leq n})$ où $f_k(x) = \exp(r_k x)$, avec les $r_k$ réels. Montrer l'équivalence suivante :

$$[\text{la famille de fonctions } ((f_k)_{1\leq k\leq n}) \text{ est libre}] \iff [\forall (p \neq q) \in \{1,\dots,n\}^2,\ r_p \neq r_q]$$

# Corrigé :

Soient $\mathcal{R} = (r_1, \dots, r_n)$ la famille des réels et $f = (f_1, \dots, f_n)$ où $f_k(x) = \exp(r_k x)$. On doit montrer : $f$ libre $\iff$ $r_k$ sont distincts 2 à 2.

- $\Rightarrow$. Par contraposée, on suppose $r_i = r_j$ pour $i \neq j$. Alors $f_i = f_j$, ce qui est une relation de dépendance sur $f$, donc $f$ est liée. Donc, d'parès la contraposée

$$[\text{la famille de fonctions } ((f_k)_{1\leq k\leq n}) \text{ est libre}] \Rightarrow [\forall (p \neq q) \in \{1,\dots,n\}^2,\ r_p \neq r_q]$$

- $\Leftarrow$. On suppose que tous les réels sont distincts 2 à 2. Soit $\mathcal{P}$ le prédicat de domaine $[\![1..n]\!]$ tel que : "la famille $(f_i)_{1\leq i\leq k}$ est libre". On va montrer que $\forall k \in [\![1..n]\!], \mathcal{P}(k)$.
  - *Base :* $\mathcal{P}(1)$ est vrai car $f_1 \neq 0$ donc $(f_1)$ est libre.
  - *Hérédité :* On suppose $\mathcal{P}(k-1)$ avec $k \in [\![2..n]\!]$. Montrons $\mathcal{P}(k)$.

    Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^k$ *tq* $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i = 0$, on doit montrer que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

    Soit $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x) = 0$. On a :

    $$g(x)e^{-r_k x} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e^{(r_i - r_k)x} + \alpha_k = 0$$

    En dérivant, on obtient :

    $$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (r_i - r_k) e^{(r_i - r_k)x} = 0$$

    On multiplie par $e^{r_k x}$, on a :

    $$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (r_i - r_k) e^{r_i x} = 0$$

    Ce qui est une $CL$ nulle sur $(f_1, \dots, f_{k-1})$ d'après l'hypothèse de récurrence.
    Donc $\forall i \in [\![1..k-1]\!], \alpha_i(r_i - r_k) = 0$ et comme $(r_i - r_k) \neq 0$ car $r_i \neq r_k$, on a $\forall i \in [\![1..k-1]\!], \alpha_i = 0$.
    On injecte dans la première équation et on obtient $\alpha_k = 0$, donc $\mathcal{P}(k)$.Donc $\forall k \in [\![1..n]\!], \mathcal{P}(k)$.

  Donc [la famille de fonctions $((f_k)_{1\leq k\leq n})$ est libre] $\Leftarrow [\forall (p \neq q) \in \{1,\dots,n\}^2,\ r_p \neq r_q]$

Donc [la famille de fonctions $((f_k)_{1\leq k\leq n})$ est libre] $\iff [\forall (p \neq q) \in \{1,\dots,n\}^2,\ r_p \neq r_q]$.

### 6.4 Exercice 4

## Enoncé :

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx \ ; \ \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)dx \ ; \ \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)dx$$

2. En déduire que les $(2n+1)$ fonctions $f_k$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_0(t) = 1 \\ \forall k \in \{1,\dots,n\} \ f_k(t) = \cos(kt) \\ \forall k \in \{n+1,\dots,2n\} \ f_k(t) = \sin((k-n)t) \end{cases}$$

forment un système libre.

## Corrigé :

1.

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q}\right]_0^{2\pi} + k \text{ si } p \neq q$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p-q)x)}{p-q} - \frac{\sin((p+q)x)}{p+q}\right]_0^{2\pi} + k \text{ si } p \neq q$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos((p-q)x)}{p-q} - \frac{\cos((p+q)x)}{p+q}\right]_0^{2\pi} + k \text{ si } p \neq q$$

Si $p \neq q$, toutes les intégrales valent 0.
Si $p = q$ alors il faut calculer $A = \int_0^{2\pi} \cos^2(px)dx$ ; $B = \int_0^{2\pi} \sin^2(px)dx$ et $C = \int_0^{2\pi} \sin(px)\cos(px)dx$

- Si $p = 0$, $B = C = 0$ et $A = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi$
- Si $p \neq 0$,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2p}[\sin^2(px)]_0^{2\pi} = 0 \\ B &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2px)}{2}\right) dx = \pi \\ A &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2px)}{2}\right) dx = \pi \end{aligned}$$

2. Soit $(\alpha_0,\dots,\alpha_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ $tq$ $\sum_{i=0}^{2n} \alpha_i f_i = 0$. On élève au carré et on obtient :

$$\sum_{i=0}^{2n} \alpha_i^2 f_i^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq 2n} (\alpha_i \alpha_j f_i f_j) = 0$$

Ceci est la fonction nulle dont l'intégrale entre O et $2\pi$ est nulle :

$$\sum_{i=0}^{2n} \left(\alpha_i^2 \int_0^{2\pi} f_i^2\right) + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq 2n} \left(\alpha_i \alpha_j \int_0^{2\pi} f_i f_j\right) = 0$$

D'où

$$\left.\begin{array}{lll} \int_0^{2\pi} f_0^2 = A_0 & \dots & \int_0^{2\pi} f_n^2 = A_n \\ \int_0^{2\pi} f_{n+1}^2 = B_1 & \dots & \int_0^{2\pi} f_{2n}^2 = B_n \end{array}\right\} A_0 = A_1 = \dots = A_n = B_1 = B_2 = \dots = B_n = \pi$$

D'autre part, $\int_0^{2\pi} f_i f_j = 0$ d'après la première question. On obtient donc $\prod \sum \alpha_i^2 = 0$. Une suite de termes positifs est nulles ssi tous les termes sont nuls. Donc $\forall i \in [\![0..2n]\!], \alpha_i = 0$

### 6.5 Exercice 5

## Enoncé :

Soit $A$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré 6 au plus.
On pose : $K = \{P \in A,\ P(2) = P(3) = 0\}$ et $Q = (X-2)(X-3)$

1. Montrer que $K$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que les ploynômes $\{Q, X.Q, X^2.Q, X^3.Q, X^4.Q\}$ sont linéairement indépendants.

## Corrigé :

1. On montre que $K$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ avec la démonstration habituelle.
2. Soit $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in \mathbb{R}^5$ tel que

   $$\alpha_2 Q + \alpha_3 X.Q + \alpha_4 X^2.Q + \alpha_5 X^3.Q + \alpha_6 X^4.Q = 0 \iff Q(\alpha_2 + \alpha_3 X + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 X^3 + \alpha_6 X^4) = 0$$

   Or $Q$ n'est pas la polynôme nul, donc $\alpha_2 + \alpha_3 X + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 X^3 + \alpha_6 X^4 = 0$ et par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient $\frac{\alpha}{2} = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$

# 7 Espaces vectoriels IV

## 7.1 Exercice 1

### Enoncé :

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

   où les $a_{ij}$ sont des réels.

2. $$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & Q \end{array} \right.$$

   où $Q(X) = 2(X+1)P(X) - (X^2 - 2X + 1)P'(X)$.

3. $$I : \left\{ \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{array} \right.$$

   où $C^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

### Corrigé :

1. Soient $(X,Y) \in (\mathbb{R}^p)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(X+\lambda Y) &= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1+\lambda y_1) + \ldots + a_{1p}(x_p + \lambda y_p) \\ \vdots \\ a_{n1}(x_1+\lambda y_1) + \ldots + a_{np}(x_p + \lambda y_p) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1p}y_p \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + \ldots + a_{np}y_p \end{pmatrix} \\ &= f(X) + \lambda f(Y) \end{aligned}$$

2. Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \Delta(P+\lambda Q) &= 2(X+1)(P+\lambda Q) - (X^2-2X+1)(P'+\lambda Q') \\ &= [2(X+1)P] + [2\lambda(X+1)Q] - [(X^2-2X+1)P'] - [\lambda(X^2-2X+1)Q'] \\ &= \Delta(P) + \lambda\Delta(Q) \end{aligned}$$

3. Soient $(f,g) \in (C^0\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} I(f+\lambda g) &= \int_0^1 (f+\lambda g)(t)dt \\ &= \int_0^1 f(t) + \lambda g(t)dt \\ &= \int_0^1 f(t)dt + \lambda \int_0^1 g(t)dt \\ &= I(f) + \lambda I(g) \end{aligned}$$

### 7.2 Exercice 2

## Enoncé :

Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

1. $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Ker(g))$
2. $Ker(g \circ f) \supset Ker(f)$
3. $Im(g \circ f) = g(Im(f))$
4. $Im(g \circ f) \subset Im(g)$

## Corrigé :

1. – $\subset$. Soit $x \in Ker(g \circ f) \iff (g \circ f)(x) = 0 \iff f(x) \in Ker(g) \iff x \in f^{-1}(Ker(g))$ Or $x$ est quelconque dans $Ker(g \circ f)$, donc $Ker(g \circ f) \subset f^{-1}(Ker(g))$.
   – $\supset$. Soit $x \in f^{-1}(Ker(g)) \iff f(x) \in Ker(g) \iff (g \circ f)(x) = 0 \iff x \in Ker(g \circ f)$. Or $x$ est quelconque dans $f^{-1}(Ker(g))$, donc $f^{-1}(Ker(g)) \subset Ker(g \circ f)$

   Donc $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Ker(g))$.
2. Soit $x \in Ker(f) \iff f(x) = 0 \iff (g \circ f)(x) = 0 \iff x \in Ker(g \circ f)$. Or $x$ est quelconque dans $Ker(f)$, donc $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$.
3. Soit $z \in Im(g \circ f) \iff \exists x \in E\ tq\ (g \circ f)(x) = z \iff \exists x \in E\ tq\ g(f(x)) = z \iff z \in g(Im(f))$
4.

### 7.3 Exercice 3

## Enoncé :

1. Factoriser le polynôme $X^2 - 5X + 6$.
2. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $f^2 - 5f + 6id = 0$
   (a) Vérifier que $(f - 2id) - (f - 3id) = id$.
   (b) Montrer que $Ker(f - 2id) \oplus Ker(f - 3id) = E$.

## Corrigé :

1. $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$.
2. (a) On pse $p = f - 2id$ et $q = f - 3id$. On a $p - q = f - 2id - f + 3id = id$.
   (b) On doit montrer $Ker(p) \oplus Ker(q) = E$ c'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{lll} Ker(p) \cup Ker(q) & = & \{0\} \\ Ker(p) + Ker(q) & = & E \end{array} \right.$.
   – Soit $x \in Ker(p) \cup Ker(q) \Rightarrow p(x) = 0 \wedge q(x) = 0$. On a $p(x) - q(x) = 0 \Rightarrow 0 - 0 = x \Rightarrow x = 0$. Or $x$ est quelconque dans $Ker(p) \cup Ker(q)$, donc $Ker(p) \cup Ker(q) = \{0\}$.
   – $p^2 = (f - 2id)^2 = f^2 - 4f + 4id = (f^2 - 5f + 6id) + f - 2id = p$. Donc $p$ est un projecteur. $q^2 = (f - 3id)^2 = f^2 - 6f + 9id = (f^2 - 5f + 6id) - (f - 3id) = -q$. En posant $q' = -q$, on a $(q')^2 = (-q)^2 = q^2 = -q = q'$. Donc $q$ est un projecteur.
   On doit montrer $Ker(p) + Ker(q') = E$. Soit $x \in E$, on a $x = p(x) + q'(x)$. On va montrer $p(x) \in Ker(q')$ et $q'(x) \in Ker(p)$ :
   On a $q'(p(x)) = (-q \circ p)(x) = 0$ et $p(q'(x)) = (-p \circ q)(x) = 0 \Rightarrow x = p(x) + q'(x)$ Donc $Ker(q') + Ker(p)$.

   Donc $Ker(f - 2id) \oplus Ker(f - 3id) = E$

### 7.4 Exercice 4

## Enoncé :

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u$ un endomorphisme de $E$ et $p$ un projecteur de $E$. Montrer que $p$ et $u$ commutent si et seulement si le noyau et l'image de $p$ sont stables par $u$.

## Corrigé :

On veut montrer $u \circ p = p \circ u \iff u(Ker(p)) \subset Ker(p) \wedge u(Im(p)) \subset Im(p)$

- $\Rightarrow$. On suppose $u \circ p = p \circ u$.
  1. Soit $x \in u(Ker(p))$, $x = u(y)$ avec $y \in Ker(p)$. On a $p(x) = p \circ u(y) = u \circ p(y) = u(0) = 0$ Donc $x \in Ker(p)$. Or $x$ est quelconque dans $u(Ker(p))$, donc $u(Ker(p)) \subset Ker(p)$.
  2. Soit $x \in u(Im(p))$. $x = u(y)$ avec $y \in Im(p)$. On a $p(y) = y$ car $p$ est un projecteur. Donc $x = u(y) = u(p(y)) = p(u(y)) \Rightarrow x \in Im(p)$. Or $x$ est quelconque dans $u(Im(p))$, donc $u(Im(p)) \subset Im(p)$.

  Donc $u \circ p = p \circ u \Rightarrow u(Ker(p)) \subset Ker(p) \wedge u(Im(p)) \subset Im(p)$.
- $\Leftarrow$. On suppose $u(Ker(p)) \subset Ker(p) \wedge u(Im(p)) \subset Im(p)$.
  1. Soit $x \in Ker(p)$, $(u \circ p)(x) = u(0) = O = (p \circ u)(0)$. Donc sur le noyau, $u$ et $p$ commutent.
  2. Soit $x \in Im(p)$. On a $p(x) = x$ car $p$ est un projecteur. Donc $(u \circ p)(x) = u(x) = (p \circ u)(x)$ car $u(x) \in Im(p)$. Donc sur l'image, $u$ et $p$ commutent.
  3. On sait que $p$ est un projecteur, donc $Ker(p) \oplus Im(p) = E$.
     Soit $y \in E$, $\exists!(y_1, y_2) \in Im(p) \times Ker(p)$ $tq$ $y = y_1 + y_2$. Donc

$$\begin{aligned}(p \circ u)(y) &= (p \circ u)(y_1) + (p \circ u)(y_2)\\ &= (u \circ p)(y_1) + (u \circ p)(y_2)\\ &= (u \circ p)(y_1 + y_2)\\ &= (u \circ p)(y)\end{aligned}$$

  Donc $u(Ker(p)) \subset Ker(p) \wedge u(Im(p)) \subset Im(p) \Rightarrow u \circ p = p \circ u$.

Donc $u \circ p = p \circ u \iff u(Ker(p)) \subset Ker(p) \wedge u(Im(p)) \subset Im(p)$.

### 7.5 Exercice 5

## Enoncé :

Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$. Montrer que $p + q$ est un projecteur de $E$ si et suelement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

## Corrigé :

Soient $p$ et $q$ deux projecteurs.

- $\Leftarrow$. Supposons $p \circ q = q \circ p = 0$.

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= (p \circ q)(p \circ q)\\ &= p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2\\ &= p + q + p \circ q + q \circ p\\ &= p + q\end{aligned}$$

  Donc $p \circ q = q \circ p = 0 \Rightarrow p + q$ projecteur.
- $\Rightarrow$. Supposons $p + q$ projecteur.

$$\left.\begin{aligned}(p+q)^2 &= p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2\\ &= p + q + p \circ q + q \circ p\\ &= p + q\end{aligned}\right\} p \circ q = q \circ p = 0$$

  On compose avec un des deux projecteurs à droite(prenons $p$), on a : $p^2 \circ q + p \circ q \circ p = 0$ Donc $p \circ q = -p \circ q \circ p$. Puis on compose à gauche : $p \circ q \circ p + q \circ p^2 = 0$ Donc $q \circ p = -p \circ q \circ p$. Donc $p \circ q = q \circ p$.
  Donc $2q \circ p = 2p \circ q = 0 \Rightarrow q \circ p = p \circ q = 0$

Donc $p + q$ projecteur $\iff p \circ q = q \circ p = 0$.

# 8 Espaces vectoriels V

## 8.1 Exercice 1

### Enoncé :

Considérons les 3 vecteurs de $\mathbb{C}^3$ suivants : $a = (1, 2i, -i),\ b = (2, 1+i, 1),\ c = (-1, 1, -i)$.

1. Montrer que $(a, b, c)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $u = (1, 2, 0)$ dans cette base.

### Corrigé :

1. Soit $E = \mathbb{C}^3$. $E$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 3. Pour montrer que $(a, b, c)$ est une base, il suffit de montrer que $(a, b, c)$ est génératrice. On montrer que pour tout vecteur $u = (x, y, c) \in \mathbb{C}^3$, le système $\alpha a + \beta b + \gamma c = u$ a une solution $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha + 2\beta - \gamma & = & x \\ 2\alpha i + \beta(1+i) + \gamma & = & y \\ -\alpha i + \beta - \gamma i & = & z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha + 2\beta - \gamma & = & x \\ 2\alpha i + \beta(1+i) + \gamma & = & y \\ \alpha + \beta i + \gamma & = & iz \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} \alpha + \beta i + \gamma & = & iz & \\ 2\alpha + \beta(2+i) & = & iz + x & (\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3) \\ \alpha(1-2i) - \beta & = & iz - y & (\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2) \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} \alpha + i\beta + \gamma & = & iz & \\ 2\alpha + \beta(2+i) & = & iz + x & \\ \alpha \underbrace{[(1-2i)(2+i) + 2]}_{\Delta} & = & (2+i)(iz-y) + (iz+x) & [(2+\mathrm{i})\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2] \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha + i\beta + \gamma & = & iz \\ 2\alpha + (2+i)\beta & = & iz + x \\ \Delta\alpha & = & (2+i)(iz-y) + (iz+x) \end{array} \right.$$

Le système est sous forme triangulaire supérieur, donc on peut trouve $\alpha, \beta, \gamma$ en fonction de $x, y, z$. Donc la famille $(a, b, c)$ est génératrice. Elle a trois vecteurs dans un espace vectoriel à 3 dimensions, donc c'est une base.

2. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma)$ *tq* $(\alpha a, \beta b + \gamma c) = (1, 2, 0)$. On trouve la solution en réutilisant le système précédent.

## 8.2 Exercice 2

### Enoncé :

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$a = (2, 3, -1, 0), b = (-3, 1, 0, 2), c = (-5, 9, -2, 6), d = (5, 2, -1, -2).$$

Montrer que $Vect(a, b) = Vect(c, d)$.

### Corrigé :

Propriété : en dimension finie, $F$ et $G$ sont deux sev de $E$ tels que $F \subset G$, on a

$$F = G \iff \dim(F) = \dim(G)$$

On remarque que $c = 2a + 3b$ et $d = a - b$.
Donc $c \in Vect(a, b)$ et $d \in Vect(a, b) \Rightarrow Vect(c, d) \subset Vect(a, b)$
On a $Vect(c, d) \subset Vect(a, b)$ et $\dim(Vect(a, b)) = \dim(Vect(c, d))$, donc $Vect(a, b) = Vect(c, d)$.

### 8.3 Exercice 3

## Enoncé :

Soient $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : E \to E$ définie par

$$\forall P \in E, f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. Vérifier que $f$ est linéaire. Déterminer $Im(f), rg(f)$ et $Ker(f)$.
2. Soit $Q \in Im(f)$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ $tq$ $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

### 8.4 Exercice 4

## Enoncé :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $u = (1, 1, 0, -1)$, $v = (1, 0, 0, -1)$ et $w = (1, 0, -1, 0)$, $F = Vect(\{u, v, w\})$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ tq \ x + y - z + 2t = 0\}$.

1. Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner sa dimension.
2. Déterminer une base de $F$, de $G$, de $F + G$ et $F \cap G$.

## Corrigé :

1. Pour démontrer que $G$ est un sev de $\mathbb{R}^4$, on utilise la démonstration habituelle. Pour donner la dimension de $G$, on peut utiliser deux méthodes :
   - On introduit le vecteur $a = (1, 1, -1, 2)$ et alors $G = \{M \in \mathbb{R}^4 \ tq \ a.M = 0\}$. $G$ est alors un hyperplan de normale $a$ dans $\mathbb{R}^4$, donc $\dim(G) = 3$.
   - On introduit la forme linéaire $f(x, y, z, t) = x + y - z + 2t$ ($f$ est linéaire de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$). On a $Ker(f) = G$ et $Im - f) = \mathbb{R}$. On applique le théorème du rang :

     $$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(G) + \dim(\mathbb{R}) \Rightarrow 4 = \dim(G) = +1 \Rightarrow \dim(G) = 3$$

2. – $\mathcal{B}_F$. Ici, $u$ et $v$ ont tous deux leur troisième coordonnées nulle, donc toutes les $CL$ de $u$ et de $v$ aussi. Or la troisième coordonnée de $w$ est non nulle, donc $w \notin CL(u, v)$. Donc $w$ n'est pas coplanaire à $u$ et $v$. $(u, v, w)$ est une famille libre et comme $F = Vect(u, v, w)$, $(u, v, w)$ est une base de $F$ de dimension 3.
   - $\mathcal{B}_G$.

     $$\begin{array}{rcl} u.a = 1 + 1 + 0 - 2 = 0 & \Rightarrow & u \in G \\ v.a = 1 + 0 + 0 - 2 \neq 0 & \Rightarrow & v \notin G \\ w.a = 1 + 0 + 1 + 0 \neq 0 & \Rightarrow & w \notin G \end{array}$$

     on essaie de résoudre $b.a = 0$ et $c.a = 0$ car il nous faut deux autres vecteurs pour construire une base. On trouve des solutions à $x + y - z + 2z = 0$ : $b = (1, 0, 1, 0)$ et $c = (2, 0, 0, -1)$. On a $(u, b, c)$ libre car $u \notin Vect(b, c)$, donc $(u, b, c)$ est une base.
   - $\mathcal{B}_{F+G}$.

     $$\begin{array}{rcl} \dim(F + G) & = & \dim(F) + \dim(G) - dim(F \cap G) \\ \dim(F + G) & = & 3 + 3 - ? \end{array}$$

     On a $\dim(F + G) = 3$ ou 4 car la diemnsion minimum est 3 et la maximum est $\mathbb{R}^4$. Donc $\dim(F \cap G) = 2$ ou 3. Si $\dim(F \cap G) = 3$, alors $F = G$, ce qui est impossible car $v \in F$ et $w \in F$. Donc $\dim(F + G) = 4$, ce qui nous donne $F + G = \mathbb{R}^4$.
     $\mathcal{B}_{F+G} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
   - $\mathcal{B}_{F \cap G}$. $\dim(F \cap G) = 2$ d'après précédemment. On a $u \in F \cap G$. Il sufit donc de trouver un autre vecteur $u'$ non colinéaire à $u$ tel que $u' \in F \cap G$. On a : $\left| \begin{array}{rcl} u' & = & \alpha u + \beta v + \gamma w \\ u'.a & = & 0 \end{array} \right. \iff$ $\alpha u.a + \beta v.a + \gamma w.a = 0$. On sait que $\alpha u.a = 0$. Donc,

     $$\begin{array}{rcl} \beta v.a + \gamma w.a = 0 & \iff & (\beta v + \gamma w).a = 0 \\ & \iff & (\beta + \gamma) + 0 + \gamma + (-2\beta) = 0 \\ & \iff & \beta = 2\gamma \end{array}$$

     Par exemple, $\gamma = 1$ et $\beta = 2$, $u' = 2v + w$ convient. Donc $(u, u')$ est une base de $\mathcal{B}_{F \cap G}$.

### 8.5 Exerccie 5

## Enoncé :

Soient $E$ un $\mathcal{K}$-ev de dimension 3 et $f \in \{(E)$ vérifiant $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, f(x), f^2(x)\}$ est une base de $E$.

## Corrigé :

On suppose

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3 \ tq \ \alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x) = 0$$

On compose par $f^2$ et on a :

$$\alpha f^2(x) + \beta f^3(x) + \gamma f^4(x) = 0$$

Or $f^4 = f^3 \circ f = 0$, d'où $\alpha f^2 = 0$ et comme $f^2 \neq 0$, $\alpha = 0$.
On compose la première équation par $f$ :

$$\beta f^2 + \gamma f^3 = 0$$

d'ou $\beta = 0$ comme précédemment. Finalement, on a

$$\gamma f^2 = 0$$

d'où $\gamma = 0$. Donc,

$$\alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc $\{x, f(x), f^2(x)\}$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, donc c'est une base de $E$.

### 8.6 Exercice 6

## Enoncé :

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$(Im(f) = Im(f^2)) \iff (E = Ker(f) \oplus Im(f))$$

# 9 Espaces vectoriels VI

## 9.1 Exercice 1

### Enoncé :

Déterminer la matrice d'une rotation vectorielle d'angle $\theta$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

### Corrigé :

$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On a : $f_\theta(z+\lambda z') = (z+\lambda z')e^{i\theta} = ze^{i\theta} + \lambda z' e^{i\theta} = f_\theta(z) + \lambda f_\theta(z')$. Donc $f_\theta$ est linéaire.

$$M = \underset{\vec{i},\vec{j}}{Mat}(f_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

## 9.2 Exercice 2

### Enoncé :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ définie par $f(P) = P'$. En ayant vérifié que $f$ est linéaire, écrire la matrice de $f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

### Corrigé :

$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \; tq \text{ degré}(p) \leq n\}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n+1$. $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, \dots, X^{n-1}, X^n)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## 9.3 Exercice 3

### Enoncé :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

En ayant vérifié que $f$ est bien linéaire, écrire la matrice de $f$ rélativmeent à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

### Corrigé :

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d+\lambda d' & -c-\lambda c \\ -b-\lambda b' & a+\lambda a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d' & -c' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda f \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $f$ est bien linéaire.

La base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. On a

$$M = \underset{\mathcal{B}}{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : $f \circ f = id$, d'où $M^2 = id_4$.

## 9.4 Exercice 4

**Enoncé :**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives $p$, $n$ et $q$. Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq p}$, $\mathbb{F} = (f_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{G} = (g_k)_{1\leq k\leq q}$ trois bases respectivement de $E$, $F$ et $G$. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Notons $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{F}}{Mat}(u)$ et $B = \underset{\mathcal{F},\mathcal{G}}{Mat}(v)$. Montrer que $\underset{\mathcal{B},\mathcal{G}}{Mat}(v\circ u) = BA$.

**Corrigé :**

Soit $x \in E$, on pose $y = u(x)$ et $z = v(y) = (v\circ u)(x)$. On introduit les matrices colonnes
X : les coordonnées de $x$ dans $\mathcal{B}$.
Y : les coordonneés de $y$ dans $\mathcal{F}$.
Z : les coordonnées de $z$ dans $\mathcal{G}$.

Matriciellement, les calculs $y = u(x)$ et $z = v(y)$ s'écrivent $Y = AX$ et $Z = BY$. On a donc $Z = B(A(X)) = (AB)(X)$. Donc $\underset{\mathcal{B},\mathcal{G}}{Mat}(v\circ u) = BA$.

## 9.5 Exercice 5

**Enoncé :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ telle que $A^2 + A + id_n = 0$. Montrer que $A$ est inversible.

**Corrigé :**

$$A^2 + A + id_n \iff -A^2 - A = id_n \iff A(-A - id_n) = id_n$$

On pose $B = (-A - id_n)$, alors $AB = BA = id_n$. Donc $A$ est inversible et $A^{-1} = -A - id_n$

## 9.6 Exercice 6

**Enoncé :**

Calculer l'inverse éventuel de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Corrigé :**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y + 2z & = & a \\ x + y + 2z & = & b \\ 2y + 3z & = & c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z & = & b \\ y + 2z & = & a \\ z & = & 2a - c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z & = & b \\ y & = & -3a + 2c \\ z & = & 2a - c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & b - a \\ y & = & -3a + 2c \\ z & = & 2a - c \end{cases}$$

$$\text{Donc :} A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 9.7 Exercice 7

# Enoncé :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est la matrice d'un projecteur de rang 2.

## 9.8 Exercice types Partiels

# Enoncé :

On considère les ensembles $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})\ tq\ M$ est symétrique $\}$ et $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})\ tq\ M$ est anti-symétrique $\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donnre leur dimension.
2. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit sous la forme $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$, et ce de façon unique.

# Corrigé :

1. – – $S \in \mathcal{S} \iff \forall i \geq j, s_{ij} = s_{ji}$ avec $S = [s_{ij}]$. Soit $(S, S') \in \mathcal{S}^2$,
     – $(s_{ij} + s'_{ij}) = s_{ji} + s'_{ji}$ donc $(S + S')^t = S^t + S'^t$.
     – $\lambda s_{ij} = \lambda s_{ji}$ donc $(\lambda S)^t = \lambda(S^t)$.
     Donc $\mathcal{S}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   – $A \in \mathcal{A} \iff \forall i \geq j, a_{ij} = -a_{ji}$ avec $A = [a_{ij}]$. Soit $(A, A') \in \mathcal{A}^2$,
     – $(a_{ij} + a'_{ij}) = ((-a_{ij}) - a'_{ij}) = -(a_{ij} + a'_{ij})$ donc $(A + A')^t = -(A^t + A'^t)$.
     – $\lambda a_{ij} = \lambda(-a_{ij}) = -\lambda a_{ij}$ donc $(\lambda A)^t = -\lambda A$.
     Donc $\mathcal{A}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   $\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}$ (c'est le nombre de termes au-dessus de la diagonale + les termes de la diagonale)
   $\dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$ (c'est le nombre de termes au-dessus de la diagonale)
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche des conditions nécessaires et suffisantes sur $A$ et $S$ pour que $M = A + S$. On a $M = S + A$ et $M^t = A^t + S^t = -A + S$. Donc

$$\left| \begin{array}{lcl} M & = & S + A \\ M^t & = & S - A \end{array} \right. \iff S = \frac{M + M^t}{2} \text{ et } A = \frac{M - M^t}{2}$$

   Donc $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A} \iff M^t = M$ et $M^t = M \Rightarrow M = 0$. Or $M$ est quelconque dans $\mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, donc $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.
   Donc $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui signifie que tout élement de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique, et ce de façon unique.

# 10 Suites I

## 10.1 Convergence des suites complexes

### Enoncé :

1. Suppons qu'une suite complexe $(z_n)$ converge vers une limite $l \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite $(|z_n|)$ des modules converge en utilisant l'inégalité triangulaire suivante
$$||z_{n+1}| - |z_n|| \leq |z_{n+1} - z_n|$$
2. On considère dans cette question la suite de terme général $z_n = \frac{1}{n} e^{i(-1^n)}$. Calculer les huit premiers termes de cette suite et les placer dans un dessin du plan complexe. Montrer qu'une suite complexe peut converger sans que la suite de ses arguments ne converge.
3. On considère maintenant la suite de terme général $z_n = \frac{n+1}{n} e^{i\pi(\frac{1}{4}+\frac{1}{n})}$. Montrer *soigneusement* (c'est-à-dire en utilisant des $\varepsilon$) que les suites $(|z_n|)$ et $(Arg(z_n))$ convergent et déterminer leurs limites. En déuire que $(z_n)$ converge.
4. Plus généralement, $(z_n)$ une suite. Montrer que si $(|z_n|)$ et $(Arg(z_n))$ convergent, alors $(z_n)$ converge.
5. Montrer (soigneusement !) que les deux hypothèses de la question précédente sont bien nécessaires en considérant les suites $z_n = e^n e^{i_f rac 1 n}$ puis $t_n = i^n$.

### Corrigé :

Rappel : $(z_n)$ converge vers $l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \|z_n - l\| < \varepsilon$

1. On doit montrer que $\|z_n\| \to \|l\|$ si $(z_n) \to l$. On majore $(\|z_n\| - \|l\|)$ en valeur absolue. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque fixé. On sait que $(z_n) \to l \iff \exists N \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \|z_n - l\| < \varepsilon$. Or, d'après l'inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbb{N}, |\|z_n\| - \|l\|| \leq \|z_n - l\| < \varepsilon$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |\|z_n\| - \|l\|| < \varepsilon$. On a donc $(z_n) CV \Rightarrow \|z_n\| CV$
2. $z_1 = e^{-i}; z_2 = \frac{1}{2}e^{i}; z_3 = \frac{1}{3}e^{-i}; z_4 = \frac{1}{4}e^{i}; z_5 = \frac{1}{5}e^{-i}; z_6 = \frac{1}{6}e^{i}; z_7 = \frac{1}{7}e^{-i}; z_8 = \frac{1}{8}e^{i};$. On "voit" géométriquement que $(z_n) \to 0$ (car $\|z_n\| = \frac{1}{n} \to 0$) mais $\arg(z_n) = (-1)^n$ est une suite périodique qui ne converge pas.
3. Montrons proprement que $\|z_n\| \to 1$ et $\arg(z_n) \to \frac{\pi}{4}$
   - $\|z_n\| - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n}$. $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque fixé, posons $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. Alors $\forall n \geq N$, on a $n > \left(N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil\right) > \frac{1}{n}$. Donc $\varepsilon > \frac{1}{n}$, donc $\|z_n\| - 1 < \varepsilon$.
   - $\arg(z_n) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque fixé, on pose $N = \left\lceil \frac{\pi}{4} \right\rceil$. $\forall n > N$, on a $\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{N} < \frac{\pi}{\left\lceil \frac{\pi}{\varepsilon} \right\rceil} < \varepsilon$.
   Donc $\| \arg(z_n) - \frac{\pi}{4} \| < \varepsilon$

   On a donc $(z_n)$ qui converge vers $e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc, $\|z_n\| CV \wedge \arg(z_n) CV \Rightarrow z_n CV$
4. *Hypothèse :* $\|z_n\| \to \rho$ et $\arg(z_n) \to \theta$.
Montrons que $(z_n)$ converge vers $\rho e^{i\theta} = l$. On pose $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ et on suppose $\rho_n \to \rho$ et $\theta_n \to \theta$. On a $\|z_n - l\| = \|\rho_n e^{i\theta_n} - \rho e^{i\theta}\|$. On introduit $z'_n$ le projeté de $z_n$ sur le cercle de rayon $\rho$. Alors $\|z_n - l\| = \|(z_n - z'_n) + (z'_n - l)\| \leq \|z_n - z'_n\| + \|z'_n - l\|$. On majore chacun de ces termes :
   -
   $$\begin{aligned} \|z_n - z'_n\| &= \|\rho_n e^{i\theta_n} - \rho e^{i\theta_n}\| \\ &= \|\rho_n - \rho\|.\|e^{i\theta_n}\| \\ &= 0 \end{aligned}$$
   *Rappel :* Par hypothèse, $\rho_n - \rho \to 0$.
   -
   $$\begin{aligned} \|z'_n - l\| &= \|\rho e^{i\theta_n} - \rho e^{i\theta}\| \\ &= \rho\|e^{i\theta_n} - e^{i\theta} \\ &\leq \rho\|\theta_n - \theta\| \\ &= 0 \end{aligned}$$
   *Rappel 1 :* La corde est plus petite que l'arc.
   *Rappel 2 :* Par hypothèse, $\theta_n - \theta \to 0$.

On a donc $\|z_n - l\|$ est majorée par la somme de $z$ suites qui tendent vers 0, donc $\|z_n - l\| \to 0$

Donc, $\|z_n\| CV$ et $\arg(z_n) CV \Rightarrow (z_n) CV$.

5. – Soit $\|u_n\| = e^n e^{i\frac{1}{n}}$
   – $\|u_n\| = e^n$. Soit $A > 0$ quelconque fixé. $e^n > A \iff n > \ln A$. Posons $N = \lceil \ln A \rceil$. Alors $\forall n > N, n > \lceil \ln A \rceil$. Donc $e^n > A$, donc $\|u_n\| \to \infty$.
   – $\arg(u_n) = e^{i\frac{1}{n}}$. Voir Question 3/.
   – $t_n = i^n$
   – $\|t_n\| = 1$
   – $\arg(t_n)$ est une suite périodique de période $\frac{\pi}{4}$ prenant 4 valeurs : $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$.
   Donc $t_n$ ne converge pas.

## 10.2 Théorème de Césaro

**Enoncé :**

Dans tout l'exercice, $(u_n)$ est une suite réelle.

1. Montrer que si
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$$
alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = a$$
2. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} (u_n - u_{n-1}) = a$, alors $\lim_{n\to+\infty} (\frac{u_n}{n}) = a$.
3. Montrer que si $u_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = a$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} = a$. *Indication :* on pourra passer aux logarithmes et utiliser le fait que l'image d'une suite convergente par une fonction conitue est une suite convergent dont la limite est l'image de la limite de la suite de départ.
4. Montrer que si $u_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$
5. Etudier la convergence des suites $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ et $u_n = \sqrt[n]{n^3 + n^2 - 1}$

**Corrigé :**

1. Posons $v_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ et $w_n = \frac{v_n}{n}$. On doit majorer $\|w_n - a\|$ sous l'hypothèse $\|u_n - a\| \to 0$.

$$\begin{aligned} \|w_n - a\| &= \left\| \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} - a \right\| \\ &= \left\| \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n - na}{n} \right\| \\ &= \left\| \frac{(u_1 - a) + (u_2 - a) + \ldots + (u_n - a)}{n} \right\| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n - a\| < \varepsilon$. On coupe la somme au rang $N$ :

$$\begin{aligned} \|w_n - a\| &= \left\| \frac{(u_1 - a) + (u_2 - a) + \ldots + (u_N - a)}{n} + \frac{(u_{N+1} - a) + \ldots + (u_n - a)}{n} \right\| \\ &\leq \underbrace{\left\| \frac{(u_1 - a) + (u_2 - a) + \ldots + (u_N - a)}{n} \right\|}_{(1)} + \underbrace{\frac{\|u_{N+1} - a\|}{n} + \ldots + \frac{\|u_n - a\|}{n}}_{(2)} \end{aligned}$$

(1) est une constante divisée par $n$. Donc (1)$\to 0$ quand $n \to {}^\circ\infty$. Chacun des $n - N$ termes de (2) est plus petit que $\frac{\varepsilon}{n}$, donc au total, (2)$< \varepsilon$.
Soit $N'$ tel que $\frac{(u_1 - a) + \ldots + (u_N - a)}{n} < \varepsilon$ pour $n > N'$ Alors $\forall n > N''$ avec $N'' = \max(N, N')$, on a $\|w_n - a\| < 2\varepsilon$. Donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = a$$

2. On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$. Par hypothèse, $v_n \to a$. On applique le théorème de Césaro à $v_n$ :

$$\frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n} = \frac{\cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \cancel{u_3} - \cancel{u_2} + \ldots + \cancel{u_{n-1}} - \cancel{u_{n-2}} + u_n - \cancel{u_{n-1}}}{n} = \frac{u_n - u_0}{n}$$

D'où

$$\frac{u_n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k}_{\to a} + \underbrace{\frac{u_0}{n}}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = a$$

3. On pose $v_n = \ln(u_n)$ et

$$w_n = \ln(\sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}) = \frac{\ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_n)}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$$

On a $v_n \to \ln(a)$. D'après le théorème de Césaro, $w_n \to \ln(a)$, donc $\exp(w_n) = \sqrt[n]{u_1 \ldots u_n} \to a$

4. D'après la question 2), on a

$$u_n - u_{n-1} \to a \Rightarrow \frac{u_n}{n} \to a \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} \frac{u_n}{u_{n-1}} \to a \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \to a$$

On suppose $u_n > 0$ et $\frac{u_n}{u_{n-1}} \to a$. On pose $v_n = \ln(u_n)$. On a

$$\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) \to \ln(a) \equiv v_n - v_{n-1} \to \ln(a)$$

D'après la question 2), $\frac{v_n}{n} \to \ln(a)$, donc $\frac{\ln(u_n)}{n} \to \ln(a)$ ce qui donne en passant par l'exponentielle : $\sqrt[n]{u_n} \to a$.

5. – $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$. Soit $v_k = \frac{1}{k}$. $v_n \to 0$ donc $u_n \to 0$.
   – $u_n = \sqrt[n]{n^3 + n^2 - 1} = \sqrt[n]{v_n}$ avec $v_n = n^3 + n^2 - 1$. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^3 + (n+1)^2 - 1}{{}^3 + n^2 - 1} \to 1$$

   Donc d'après la question 4), $u_n \to 1$.

### 10.3 Etude matricielle d'une suite

## Enoncé :

1. *Questoin préliminaire :* à quelle condition sur les coefficients $a, b, c, d$ la matrice $M$ suivante est-elle inversible ? Calculer l'inverse $M^{-1}$ de $M$.
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
2. On considère dnas le reste de l'exercice la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \alpha, u_1 = \beta, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(\alpha, \beta, a, b) \in \mathbb{C}^4$. On pose
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$
Montrer que $U_n = A^{n-1}U_1$.
3. On suppose que le polynôme $Q_A = X^2 - aX - b$ a deux raines distinctes $s$ et $t$. On pose
$$S = \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$T = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que $AS = sS$ et que $AT = tT$
4. On pose
$$P = \begin{pmatrix} s & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$
Calculer $P^{-1}$ et montrer que $A = PDP^{-1}$.
5. En déduire $A^{n-1}$.
6. Calculer $u_n$ en fonction de $n, \alpha, \beta, s, t$.

## Corrigé :

1. Supposons que $\Delta = ad - bc \neq 0$, $MX = Y \iff X = M^{-1}Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
$$\begin{aligned} MX = Y \quad & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} ax_1 + bx_2 & = & y_1 \\ cx_2 + dx_2 & = & y_2 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} bcx_2 - adx_2 & = & cy_1 - ay_2 \\ ax_1 + bx_2 & = & y_1 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{\Delta}(dy_1 - by_2) \\ x_2 & = & \frac{1}{\Delta}(-cy_1 + ay_2) \end{array} \right. \end{aligned}$$
Donc, si $ad - bc \neq 0$,
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
2. On remarque que $AU_n = U_{n+1}$ :
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} au_n + bu_{n-1} \\ un \end{pmatrix} \end{array}$$
La suite $(u_n)$ est donc une suite géométrique de raison $A$.
Soit $\mathcal{P}$ le prédicat de domaine $\mathbb{N}^*$ : "$U_n = A^{n-1}U_1$".

- *Base :* $U_1 = idU_1 = A^0U_1$, donc $\mathcal{P}(1)$.
- *Hérédité :* On suppose $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$ : $U_{n+1} = AU_n = AA^{n-1}U_1 = A^nU_1$. Donc $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = A^{n-1}U_1$

3. On suppose que $Q_A$ a deux racines distinctes $s$ et $t$. On a alors la liste des propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} s^2 - as - b &=& 0 \\ t^2 - at - b &=& 0 \\ s - t &\neq& 0 \\ s + t &=& a \\ st &=& -b \end{array}$$

On a $AS = \begin{pmatrix} sa + b \\ s \end{pmatrix}$ et $sS = \begin{pmatrix} s^2 \\ s \end{pmatrix}$. On a donc $AS = sS$ car $s^2 = as + b$. Même démonstration pour $AT = tT$

4. Puisque $s$ et $t$ sont distincts, on a

$$P^{-1} = \frac{1}{s-t} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -1 & s \end{pmatrix}$$

On désire calculer $PDP^{-1}$. On a

$$PD = \begin{pmatrix} s^2 & t^2 \\ s & t \end{pmatrix}$$

Puis

$$PDP^{-1} = \frac{1}{s-t} \begin{pmatrix} s^2 - t^2 & -s^2t + t^2s \\ s - t & st - ts \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

# 11 Suites II

## 11.1 Nature d'une suite

1. Donner un exemple différent de suite réelle pour chacun des adjectifs suivants :

   (a) croissante : $u_{n+1} = u_n + a$ avec $a \geq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$

   (b) décroissante : $u_{n+1} = -u_n - a$ avec $a \geq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

   (c) périodique : $u_n = n \mod k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ car $u_{n+k} = u_n$

   (d) ni croissante, ni décroissante : $u_n = (-1)^n$ car $u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 1 \ldots$

   (e) bornée : $u_n = \sin(n)$ car $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

   (f) alternée : $u_n = \cos(\pi n)$

   (g) bornée non convergente : $u_n$ est une suite périodique avec au moins deux valeurs différentes

   (h) majorée, non minorée : $u_n = -n$

   (i) ni majorée, ni minorée : $u_n = (-2)^n$

   (j) convergente vers $l$ : $u_n = \frac{1}{n} + l$

   (k) convergente, ni croissante, ni décroissante : $\frac{\cos(n)}{n}$

   (l) rationnelle convergente vers un irrationnel : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (= e)$

   (m) irrationnelle convergente vars un rationnel : $u_n 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

   (n) majorée par $l$ et convergente vers $l$ : $u_n = l$

   (o) majorée par $l$ et non convergente vers $l$ : $u_n = l - n$

   (p) divergente vers $+\infty$ : $u_n = e^n$

   (q) strictement croissante et bornée : $u_n = \arctan(n)$

   (r) alternée, ni majorée, ni minorée : $u_n = (-n)^n$

   (s) croissante et minorée : $u_n$ est une suite croissante

   (t) décroissante non minorée : $u_n = -e^n$

2. Parmi les suites suivantes, déterminer lesquelles sont majorée, minorées, bornées, croissantes, décroissantes, convergentes, devergentes :

   (a) $a_n = n^2 + n$ : croissante, non majorée, divergente, minorée.

   (b) $b_n = (-1)^n (n^2 + 1)$ : alternée, divergente.

   (c) $c_n = 1 + \frac{1}{1+n}$ : décroissante, minorée et majorée donc bornée, convergente.

   (d) $d_n = 10^{-n} \lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor$ : croissante, minorée et majorée donc bornée, convergente.

   (e) $e_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ : périodique, divergente (non-convergente), bornée.

### 11.2 Moyenne arithmético-géométrique

## Enoncé :

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a < b$. On va dans cet exercice étudier la convergence des suites $u$ et $v$ dont les termes sont définis par les récurrences croisées suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} u_0 = a & \\ v_0 = b & \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N} & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. On suppose (dans cette question seulement) que $a = 4$ et $b = 36$. Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$, $v_0$, $v_1$, $v_2$.
2. On revient au cas général $0 < a < b$. Calculer $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ et en déduire que $u_1 < v_1$.
3. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ((u_n < v_n) \wedge (u_{n-1} < u_n) \wedge (v_{n-1} > v_n))$$
4. En déduire que $u$ et $v$ sont convergentes.
5. On pose $l = \lim(u)$ et $l' = \lim(v)$. Démontrer que $l = l'$.

## Corrigé :

1.
$$\begin{array}{lll} u_0 = 4 & u_1 = 12 & u_2 = 4\sqrt{15} \\ v_0 = 36 & v_1 = 20 & v_2 = 16 \end{array}$$

2. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} > 0$ car $a \neq b$. D'où $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \iff v_1 > u_1$.
3. Soit $\mathcal{P}$ le prédicat de domaine $\mathbb{N}$ :
$$((u_n < v_n) \wedge (u_{n-1} < u_n) \wedge (v_{n-1} > v_n))$$
.

   Base : On a $(u_1 < v_1) \wedge (u_0 < u_1)$ $(car\ a < \sqrt{ab}) \wedge v_0 > v_1$ $(car\ \frac{a+b}{2} < b)$. Donc $\mathcal{P}(0)$.
   Hérédité : Soit $n$ quelconque fixé, on suppose $\mathcal{P}(n)$.

   - $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} > 0 \iff u_{n+1} < v_{n+1}$
   - $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} > \sqrt{u_n^2} = u_n$ $(car\ u_n < v_n)$. D'où $u_{n-1} < u_n$.
   - $\frac{u_n + v_n}{2} < \frac{2v_n}{2}$ $(car\ u_n < v_n)$. D'où $v_{n-1} > v_n$.

   D'où $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
   Donc, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.
4. On a
$$a = u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n < \ldots < v_1 < v_0 = b$$
Donc $u$ est une suite croissante majorée par $v_0 = b$, donc $u$ converge vers $l$.
Donc $v$ est une suite décroissante minorée par $u_0 = a$, donc $v$ converge vers $l'$.
5. On a $\left| \begin{array}{lll} u_{n+1} & = & \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} & = & \frac{u_n + v_n}{2} \end{array} \right.$. En passant à la limite, on obtient $\left| \begin{array}{lll} l & = & \sqrt{ll'} \\ l' & = & \frac{l+l'}{2} \end{array} \right.$.
D'où $l = l'$.

# 12 Suites III-IV

## 12.1 Suites adjacentes

### Enoncé :

1. Soient $u$ une suite réelle croissante et $v$ une suite réelle décroissante telles que $v_n - u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $u$ et $v$ sont convergentes et convergent vers la même limite.
2. Considérons la suite $u$ définie par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$
Montrer que $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont adjacentes. En déduire que $u$ converge.

### Corrigé :

1. On va montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$. On suppose par l'absurde que $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ tq\ u_{n_0} > v_{n_0}$. Posons $a = u_{n_0} - v_{n_0} > 0$.
   $u$ croissante, donc $\forall n \geq n_0, u_n > u_{n_0}$.
   $v$ décroissante, donc $\forall n \geq n_0, v_n < v_{n_0} \Rightarrow -v_n > v_{n_0}$.
   Donc $\forall n \geq n_0, u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} = a \geq 0$. Donc $u_n - v_n$ ne tend par vers O, d'où contradiction. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$. On a donc la chaîne des inégalités suivantes :
$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots v_n \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$
   $u$ et $v$ sont des suites adjacentes, donc $u$ est majorée par $v_0$ et $v$ est minorée par $u_0$, c'est-à-dire que les suites sont convergentes et convergent vers la même limite.
2. Soient $p_n = u_{2n}$ et $i_n = u_{2n+1}$. Montrons que $p$ et $i$ sont deux suites adjacentes :
   - $$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(4n+4)!} \\ &= \frac{-1}{(4n+2)!} + \frac{1}{(4n+4)!} \\ &< 0 \end{aligned}$$
     car $(4n+2)! < (4n+4)!$, donc $p$ est décroissante.
   - $$\begin{aligned} i_{n+1} - i_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \\ &= \frac{-1}{(4n)!} + \frac{1}{(4n+2)!} \\ &> 0 \end{aligned}$$
     Donc $i$ est croissante
   - $$\begin{aligned} p_n - i_n &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \\ &= -\frac{(-1)^{2n+1}}{(4n+2)!} \\ &= \frac{1}{(4n+2)!} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Les suites $p$ et $i$ sont adjacentes donc $u_{2n}$ et $u_{2n+1}$ convergent vers la même limite. Ces deux suites sont des suites extraites de $u$ couvrant $\mathbb{N}$, donc $u$ convergent également vers la même limite.

## 12.2 Segments emboîtés

# Enoncé :

Soit $(I_n)$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ telle que :
- $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \neq 0$.
- la longueur de $I_n$ tend vers 0.
- $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$.

1. Montrer que les suites formées par les extrémites hautes et basses des segments convergent, et ce vers une même limite $l$ (on pourra utiliser les résultats connus sur les suites adjacentes).
2. En déduire que toute suite $u$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I_n)$ est convergente de limite $l$.
3. En déduire le théorême de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

# Corrigé :

1. Posons $h_n = \sup(I_n)$ et $b_n = \inf(I_n)$. On sait que :
   - $\forall n \in \mathbb{N}, h_n > b_n$ (car $I_n \neq 0$).
   - $\lim(h_n - b_n) = 0$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1} \leq h_n \wedge b_{n+1} \geq b_n$

   Donc $h$ et $b$ sont des suites adjacentes et tendent vers la même limite $l$.
2. Les segments sont non-vides. On choisit $u_n \in I_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq u_n \leq h_n$. D'après le Théorème des Gendarmes, puisque $b$ et $h$ tendent vers la même limite, $u$ tend vers cette limite.
3. Soit $u$ une suite bornée. On veut extraire de $u$ une sous-suite convergente.
   Posons $X = \{u_n \ tq \ n \in \mathbb{N}\}$. La suite est bornée, donc $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \ tq \ X \subset [m, M]$. On définit la suite des intervalles de façon suivante :

   $$I_0 = [m, M] \ ; \ J_1 = \left[m, \frac{M+m}{2}\right] \ ; \ K_1 = \left[\frac{M+m}{2}, M\right]$$

   On choisit $\left| \begin{array}{lll} I_1 = J_1 & si & \#(k \in \mathbb{N} \ tq \ u_k \in J_1) = +\infty \\ I_1 = K_1 & sinon & càd \ \#(k \in \mathbb{N} \ tq \ u_k \in K_1) = +\infty \end{array} \right.$ On continue en coupant en deux chaque intervalle $I_k$ et en choisissant $I_{k+1}$ comme celui des deux sous-intervalles de $I_k$ qui va recevoir une infinité de valeurs de $u$. On définit une extractrice $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante de la manière suivante :

   $$\left| \begin{array}{lll} \sigma(0) & = & 0 \\ \sigma(n) & = & \min\limits_{k \in \mathbb{N}}(u_k \in I_n \wedge k > \sigma(n-1)) \end{array} \right.$$

   Cette construction fonctionne car il y a, par définition de $I_n$, une infinité d'indices $k \ tq \ u_k \in I_n$ et car $\sigma(n) > \sigma(n-1)$ par construction. Par conséquent, $\sigma$ est bien une extractrice. La suite $u_{\sigma(n)}$ est donc extraite de $u$ et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I_n$.

### 12.3 Suites extraites

## Enoncé :

Soit $u$ une suite complexe telle que
- $(u_{2n})$ converge.
- $(u_{2n+1})$ converge.
- $(u_{3n})$ converge.

1. Montrer que la suite $u$ converge.
2. Proposer un autre exemple du même phénomène.

## Corrigé :

1. - La suite $(u_{6n})$ est à la fois extraite de $(u_{2n})$ et $(u_{3n})$ car $u_{6n} = u_{2(3n)} = u_{3(2n)}$. Donc $u_{6n} \to l$ et $u_{6n} \to l''$. Donc $l = l''$.
   - La suite $(u_{6n+3})$ est à la fois extraite de $(u_{3n})$ et $(u_{2n+1})$ car $u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} = u_{2(3n+1)+1}$. Donc $u_{6n+3} \to l'$ et $u_{6n+3} \to l''$. Donc $l' = l''$.

   Donc $l = l' = l''$. On a trouvé trois suites extraites dont l'extractrice couvre $\mathbb{N}$ qui tendent vers la même limite, donc $u$ tend vers cette limite.
2. 

### 12.4 Suites trigonométriques

## Enoncé :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\ tq\ \frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$.

1. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\sin(n\alpha)$ et $\cos(n\alpha)$ :
   - $\sin((n+1)\alpha)$
   - $\cos((n+1)\alpha)$
   - $\sin(2n\alpha)$
   - $\cos(2n\alpha)$
2. Montrer que l'existence d'une des deux limites suivantes entraîne l'esxistence de l'autre :
$$\lim \sin(n\alpha) \text{ et } \lim \cos(n\alpha)$$
3. En déduire que les suites $\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas.

## Corrigé :

1. On pose $A = \cos(\alpha)$, $B = \sin(\alpha)$, $c_n = \cos(n\alpha)$ et $s_n = \sin(n\alpha)$. On a donc
   - $c_{n+1} = Ac_n - Bs_n$
   - $s_{n+} = Bc_n + As_n$
   - $s_{2n} = 2s_nc_n$
   - $c_{2n} = c_n^2 - s_n^2 = 1 - 2s_n^2 = 2c_n^2 - 1$
2. - Supposons que $l = \lim(c_n)$ existe. On a $Bs_n = Ac_n - c_{n+1}$. Donc $Ac_n \to Al$ et $c_{n+1} \to l$ car $'c_{n+1})$ est extraite de $(c_n)$. Donc $Bs_n$ converge et comme $B \neq 0$ car $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, on a $(s_n)$ CV.
   - Supposons que $l' = \lim(s_n)$ existe. On a $Bc_n = s_{n+1} - As_n$. Donc $s_{n+1} \to l'$ car $(s_{n+1})$ extraite de $(s_n)$ et $As_n \to Al'$. Donc $Bc_n$ converge et comme $B \neq 0$ car $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, on a $(c_n)$ CV.
3. Par l'absurde, on suppose que $l$ et $l'$ limites de $c_n$ et $s_n$ existent. On passe à la limite et on obtient :
$$\begin{aligned}
l^2 + l'^2 &= 1 && (1)\\
l &= Al - Bl' && (2)\\
l' &= Bl - Al' && (3)\\
l' &= 2ll' && (4)\\
l &= 2l^2 - 1 && (5)
\end{aligned}$$
   D'après (4), $l' = 2ll' \Rightarrow l = \frac{1}{2}$.
   - Si $l' \neq 0$ alors $\left(l = \frac{1}{2} \wedge (5)\right)$ n'est pas vérifié.
   - Si $l' = 0$, alors (3) donne $0 = Bl + 0$, d'où $B = 0$ ou $l = 0$
     - $B = 0$ impossible car $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Z}$
     - $l = 0$ impossible car (1) ne serait pas vérifiée.

   D'où contradiction. Donc les suites $\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas.

### 12.5 Equivalents

## Enoncé :

1. $$\tan\left(\frac{1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{n}$$

2. $$\tan\left(\frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{e^{\sin(n)}}{\ln(n)} - 4\right)$$

3. $$\sin\left(\sin\left(\sin\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right)$$

4. $$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

5. $$n + e^n + e^{(2^n)}$$

## Corrigé :

1. $u_n \sim \sqrt{n}$ car
$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1 + \underbrace{\frac{\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \to 1$$

2. On sait que $-1 \leq \sin(n) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq e^{\sin(n)} \leq e$. Donc $\frac{e^{\sin(n)}}{\ln(n)} \to 0$, donc la parenthèse tend vers -4, donc $u_n \sim \frac{-4}{n}$.
3. $u_n \sim \frac{1}{n}$, donc $u_n \to 0$
4. $$u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{x}{x} = 1$$
Donc $u_n \to 1$
5. $u_n \sim e^{(2^n)}$. On vérifie :
$$\frac{u_n}{e^{(2^n)}} = \underbrace{\frac{n}{e^{(2^n)}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{e^n}{e^{(2^n)}}}_{\to 0} + 1 \to 1 \iff u_n \sim e^{(2^n)}$$

## 12.6 Série harmonique

# Enoncé :

Soit $u$ la suite de terme général $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [n, n+1]$,
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$,
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx$$
3. Conclure sur la convergence de la suite $u$ et en donner un équivalent.

# Corrigé :

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $[n, n+1] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $\forall x \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$
2. On intègre cet encadrement sur $[n, n+1]$, d'où
$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} f \leq \frac{1}{n}$$
En réécrivant pour $n' = n - 1$, on a
$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} f \leq \frac{1}{n-1}$$
Donc
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx$$
3. $$\left.\begin{array}{c} \int_2^3 f \leq \frac{1}{2} \leq \int_1^2 \\ \int_3^4 f \leq \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \\ \int_4^5 f \leq \frac{1}{4} \leq \int_3^4 \\ \dots \\ \int_n^{n+1} f \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \end{array}\right\} \int_2^{n+1} f \leq u_n - 1 \leq \int_1^n f \iff (-\ln(2) + 1) + \ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$$
D'après le Théorème des Gendarmes, $u_n \to +\infty$.
Pour montrer que $u_n \sim \ln(n)$, on divise par $\ln(n)$ :
$$\frac{1 + \ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \to 1$$
On a
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}}_{\to 0} \to 1$$
et
$$\frac{1 - \ln(2)}{\ln(n)} \to 0$$
Donc
$$\frac{1 - \ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \to 1$$
Donc $u_n \sim \ln(n)$

## 12.7 Développements limités

# Enoncé :

1. Déterminer le DL en $+\infty$ à l'ordre 5 de
$$\frac{\ln(\mathrm{ch}(\frac{1}{n}))}{\cos(\frac{1}{n})}$$
2. Déterminer le DL en $+\infty$ à l'ordre 4 de
$$\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3-n}$$
3. Déterminer le DL en $+\infty$ à l'ordre 4242 de
$$\sin^{4241}\left(\frac{1}{n}\right)$$
4. Déterminer le DL en $+\infty$ à l'ordre 8 de
$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\times\left[\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n^2}}-1\right]$$

# Corrigé :

1. Soit $x=\frac{1}{n}$.
   -
   $$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^5)=1+u \text{ avec } u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^5)$$
   $$\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+u^4-u^5+\circ(u^5)$$
   On a $u^2=\frac{x^4}{4}+\circ(x^5)$ et $u^3=u^4=u^5=\circ(x^5)$ Donc
   $$\frac{1}{\cos(x)}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\circ(x^5)$$
   -
   $$\mathrm{ch}(x)=1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^5)=1+v \text{ avec } v=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^5)$$
   -
   $$\ln(1+v)=v-\frac{v^2}{2}+\frac{v^3}{3}-\frac{v^4}{4}+\frac{v^5}{5}+\circ(v^5)$$
   On a $-\frac{v^2}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)+\circ(x^5)$ et $\frac{v^3}{3}=-\frac{v^4}{4}=\frac{v^5}{5}=\circ(x^5)$ Donc
   $$\ln(\mathrm{ch}(x))=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{x^4}{8}+\circ(x^5)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\circ(x^5)$$

   Donc
   $$\begin{aligned} f(x) &= \left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\circ(x^5)\right]\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\circ(x^5)\right] \\ &= \frac{x^2}{2}+\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)x^4+\circ(x^5) \\ &= \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\circ(x^5) \end{aligned}$$

2.

$$f(n) = \sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n} = \sqrt[3]{n^3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right) = n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

On pose $x = \frac{1}{n}$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{x^4}{2} + \circ(x^4)$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{-2}{9} \times \frac{x^4}{2} + \circ(x^4)$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - (1-x^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{2x^2}{3} + \circ(x^4) \iff \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Donc

$$f(n) = \frac{2}{3n} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

3. Soit $x = \frac{1}{n}$

$$\begin{array}{lclcl}
\sin(x) & = & & & x + \circ(x^2) \\
\sin^2(x) & = & (x+\circ(x^2))(x+\circ(x^2)) & = & x^2 + \circ(x^3) \\
\sin^3(x) & = & (x^2+\circ(x^3))(x+\circ(x^2)) & = & x^3 + \circ(x^4) \\
 & & \vdots & & \\
\sin^{4241}(x) & = & & & x^{4241} + \circ(x^{4242}) \\
\sin^n(x) & = & & & x^n + \circ(x^{n+1})
\end{array}$$

4. Soit $x = \frac{1}{n}$, on a $f(x) = \sin^3(x) \times [(\cos(x))^{x^3} - 1] = \sin^3(x) \times \exp(x^2 \ln(\cos(x)))$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \circ(x^8) = 1 + u \text{ avec } u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \circ(x^8)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^7}{7} - \frac{u^8}{8} + \circ(u^8)$$

On a

$$\begin{array}{lcl}
u^2 & = & \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \left(\frac{1}{(4!)^2} + \frac{1}{6!}\right)x^8 + \circ(x^8) \\
u^3 & = & -\frac{x^6}{8} + \frac{3x^8}{96} + \circ(x^8) \\
u^4 & = & \frac{x^6}{16} + \circ(x^8)
\end{array}$$

$$u^5 = u^6 = u^7 = u^8 = \circ(x^8)$$

Donc

$$\begin{array}{lcl}
x^2\ln(1+u) & = & x^2\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!}\right) - \frac{x^2}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) + \frac{x^2}{3}\left(-\frac{x^6}{8}\right) + \circ' x^8) \\
 & = & -\frac{x^4}{4} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^6 + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^8 + \circ(x^8) \\
 & = & -\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{12} - \frac{x^8}{45} + \circ(x^8) \\
 & = & v
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
e^v - 1 & = & v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3!} + \ldots + \frac{v^8}{8!} \\
 & = & \frac{x^4}{4} + Ax^6 + \left(B + \frac{1}{32}\right)x^8 + \circ(x^8)
\end{array}$$

$$\sin^3(x) = \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \circ(x^8)\right]^3 = x^3 + 3\left(-\frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!}\right) + \circ(x^8)$$

Au final,

$$f(x) = \left[x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{40} + \circ(x^8)\right]\left[\frac{x^4}{4} + Ax^6 + \left(B + \frac{1}{32}\right)x^8 + \circ(x^8)\right] = \frac{x^7}{4} + \circ(x^8)$$

## 12.8 Calcul de limites en $+\infty$

### Enoncé :

1. $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2. $$(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

3. $$\left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}(n)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh}(n)}}$$

4. $$(\ln(1 + e^{-n}))^{\frac{1}{n}}$$

5. $$\left(n \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{(n^2)}$$

### Corrigé :

1. $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = e^{(1+\circ(1))} = e$$

2. Deux possibilités :
   - $u_n = \sqrt[n]{n+1}$. Comme $\frac{n+2}{n+1} \to 1$, alors d'après le théorème de Césaro, $u_n \to 1$.
   - $$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e^0 = 1$$

3. $$\left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}(n)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh}(n)}} = \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(n)}\ln\left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}(n)}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(n)}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(n)} + \circ\frac{1}{\operatorname{ch}(n)}\right)\right) \to 1$$

4. $$\begin{aligned}
[\ln(1+e^{-n})]^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(\ln(1+e^{-n}))\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(e^{-n} + \circ(e^{-n}))\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}(\ln(e^{-n}) + 1 + \circ(1))\right) \\
&= \exp\left(-1 + \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\to e^{-1} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\left(n\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{(n^2)} &= \exp\left(n^2\ln\left(n\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n^2\ln\left(n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\circ\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{3n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n^2\left(\frac{1}{3n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= e^{\frac{1}{3}+\circ(1)}\\
&\to e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

## 12.9 Equation différentielle et développement limité

# Enoncé :

Soit $f$ la solution sur $\mathbb{R}$ telle que $\left|\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0\\ f'(0) & = & 1\end{array}\right.$ à l'équation différentielle

$$y''+2\sin(xy')+x^2y-1=0$$

1. Exprimer le DL de $f$ au voisinage de 0 à l'ordre 5.
2. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par la fonction tangente, et en déduire le DL de la fonction tangente à l'ordre 7 en 0.

# Corrigé :

1. $y$ peut s'écrire
$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\circ(x^5)$$
Comme $y(0)=0$ et $y'(0)=1$, on en déduit que $A=0$ et $B=1$. Donc
$$y=x+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\circ(x^5)$$
On en déduit
$$y'=1+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4+\circ(x^4)$$
et
$$y''=2C+5Dx+12Ex^2+20Fx^3+\circ(x^3)$$
On a $x^2y=x^3+\circ(x^3)$ et on pose $xy'=u=x+2Cx^2+3Dx^3+\circ(x^3)$ On obtient
$$\sin(xy')=\sin(u)=u-\frac{u^3}{6}+\circ(u^3)=x+2Cx^2+3Dx^3-\frac{1}{6}x^3+\circ(x^3)$$
Comme $y$ est solution de l'équation différentielle, on a
$$(2C-1)+(6D+2)x+(12E+4C)x^2+(20F+6D-\frac{1}{3}+1)x^3+\circ(x^3)=0$$
et par unicité du DL, on a
$$\left\{\begin{array}{lcl} 2C-1 & = & 0\\ 6D+2 & = & 0\\ 12E+4C & = & 0\\ 20F+6D+\frac{2}{3} & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} C & = & \frac{1}{2}\\ D & = & -\frac{1}{3}\\ E & = & -\frac{1}{6}\\ F & = & \frac{1}{15}\end{array}\right.$$
Donc
$$y=x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{15}+\circ(x^5)$$

2. On pose $y = \tan$, on a $\left| \begin{array}{l} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right.$. On a donc :

$$y = x^\circ \circ (x); \quad y^2 = x^2 + \circ(x^2); \quad y' = 1 + y^2 = 1 + x^2 + \circ(x^2)$$

En intégrant, on obtient $y = K + x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$ avec $K = \tan(0) = 0$, donc

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3); \quad y^2 = x^2 + \tfrac{2x^4}{3} + \circ(x^4); \quad y' = 1 + y^2 = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \circ(x^4)$$

En intégrant den nouveau, on obtient :

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \circ(x^5); \quad y^2 = x^2 + \tfrac{x^6}{9} + \tfrac{2x^4}{3} + \tfrac{4x^6}{15} + \circ(x^6); \quad y' = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \circ(x^6)$$

On intégère une dernière fois pour obtenir

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \circ(x^7)$$

## 12.10 Suite récurrente

*Dans cet exercice, on notera $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel $x$ (c'est le plus grand élément de $\mathbb{Z}$ plus petit que $x$).*

Le but de cet exercice est d'étudier la suite réelle $u$ de terme général

$$u(n) = 2 \times u\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + g(n)$$

où $g$ est une application croissante positive de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et où $u(0) = 1$.
Soit $v$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v(n) = u(3^n)$.

1. Montrer que la suite $u$ est croissante.
2. Encadrer le plus précisément possible $u(n)$ par deux termes de la suite $v$.
3. Cas où $g$ est une fonction constante de valeur 0.
   (a) Exprimer $v'n)$ en fonction de $n$.
   (b) En déduire un encadrement de $u(n)$ en fonction de $n$.
   (c) En déduire le comportement de $u(n)$
4. Même question avec $g$ qui est une fonction constante de valeur $a \neq 0$.
5. Même question avec $g$ qui est la fonction identité.
6. Même question avec $g$ qui est la fonction définie par $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \log_a(n)$ où $a > 1$.
7. Même question avec $g$ qui est la fonction définie par $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = n \log_a(n)$ où $a > 1$.

# 13 Fonctions I-II

## 13.1 Exercice 1

### Enoncé :

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On note $e^f$ l'application $x \mapsto e^{f(x)}$ et $\ln(f)$ l'application $x \mapsto \ln(f(x))$.

1. Montrer que
$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow e^f \underset{a}{\sim} e^g$$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f$ et $g$ pour que $e^f \underset{a}{\sim} e^g$.
3. On suppose $f$ et $g$ strictement positives. Montrer que :
$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$$
4. On suppose toujours $f$ et $g$ strictement positives. On suppose de plus que $g$ admet en $a$ une limite $l$ dans $(\mathbb{R}_*^+ - \{1\}) \cup \{+\infty\}$. Montrer qu'alors $\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$. On distinguera la cas $l = +\infty$ du cas $l \in \mathbb{R}_*^+ - \{1\}$.

### Corrigé :

1. $$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f = g + \varepsilon(x) \Rightarrow e^f = e^{g+\varepsilon(x)} = e^g e^{\varepsilon(x)} \Rightarrow \frac{e^f}{e^g} = e^{\varepsilon(x)} \neq 1$$
Par exemple, prenons $a = +\infty$, $\varepsilon(x) = 1$, $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, on a $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{e^f}{e^g} = \frac{1}{e} \neq 1$
2. On suppose $f \underset{a}{\sim} g$ et $f - g \to 0$ quand $x \to +\infty$. Donc $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ et $\varepsilon(x) \in \circ(g(x))$.
$$e^f = e^{g+\varepsilon} = e^g e^\varepsilon \Rightarrow \frac{e^f}{e^g} = e^\varepsilon \to 1 \Rightarrow e^f \underset{a}{\sim} e^g$$
Réciproquement, si $f \underset{a}{\sim} g$ et $e^f \underset{a}{\sim} e^g$, posons $\varepsilon(x) = f(x) - g(x)$.
$$\frac{e^f}{e^g} = e^\varepsilon \Rightarrow \varepsilon(x) \to 0$$
3. Prenons $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{1}{x} + 1$, $a = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty}(f) = \lim\limits_{+\infty}(g) = 1$. On a $\ln(f) = 0$ et $\ln(g) = \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \ln(f) \underset{a}{\not\sim} \ln(g)$
4. $f > 0$, $g > 0$, $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{a}(f) = \lim\limits_{a}(g) = l$ avec $l > 0$ et $l \neq 1$. On a $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ quand $x \to a$.
$$\ln(f) = \ln(g) + \ln(1 + \varepsilon(x)) \Rightarrow \frac{\ln(f)}{\ln(g)} = 1 + \frac{\varepsilon(x) + \circ(\varepsilon(x))}{\ln(g)} \frac{\to 0}{\to \ln(l) \text{ ou } +\infty}$$
Donc
$$\frac{\ln(f)}{\ln(g)} \to 1 \Rightarrow \ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)$$

### 13.2 Exercice 2

## Enoncé :

Montrer que l'équation $x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution $x \in \mathbb{R}$.

## Corrigé :

$f(x) = x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1 = 0$. On a $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -\pi^2 + 1 \approx -10 + 1 \approx -9$ Comme $f$ est continue, il existe au moins un point entre 0 et $\pi$ où $f$ s'annule d'après le théorème des valeurs intermédaires.

### 13.3 Exercice 3

## Enoncé :

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ $tq$ $f(\alpha) = \alpha$.

## Corrigé :

On applique le théorème des valeurs intermédiares à $g(x) = f(x) - x$.

$$\left|\begin{array}{l} g(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ car } f(a) \in [a, b] \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \text{ car } f(b) \in [a, b] \\ g \text{ continue sur } [a, b] \end{array}\right. \quad \text{donc } \exists \alpha \in [a, b]\ tq\ g(\alpha) = 0 \equiv f(\alpha) = \alpha$$

### 13.4 Exercice 4

## Enoncé :

Soient $f$ et $g$ deux fonction réelles définies et continues sur $[a, b]$ telles que $g(a) = f(b)$ et $g(b) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ $tq$ $g(c) = f(c)$.

## Corrigé :

On pose $h = f - g$. $h$ est continue sur $[a, b]$. On a

$$\left|\begin{array}{l} h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(b) \\ h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) = -h(a) \end{array}\right.$$

La fonction $h$ change de signe sur $[a, b]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists c \in [a, b]\ tq\ h(c) = 0 \equiv f(c) = g(c)$$

### 13.5 Exercice 5 - Théorème de Rolle généralisé

## Enoncé :

Soient $a$ un réel et $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}, f$ continue, dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$$

Montrer que :

$$\exists c \in ]a, +\infty[, f'(c) = 0$$

## Corrigé :

On apllique un changement de varible bijectif : tan. Quitte à changer $x$ en $x-a$ et $f(x)$ en $f(x)-f(a)$, on peut supposer que $a = 0$ et $f(a) = 0$. On pose $g(x) = f(\tan(x))$ pour $x \in \left[O, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $g(0) = 0$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (g(x)) = \lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 0$. Donc $g$ est désormais continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'autre part, $g$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme composé de fonctions dérivables. Donc, d'après le théorème de Rolle,

$$\exists \gamma \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ tq\ g'(\gamma) = 0$$

Or

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, g'(x) = (1 + \tan^2(x))(f'(\tan(\gamma))) = 0 \Rightarrow f'(\tan(\gamma)) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0 \text{ avec } c = \tan(\gamma)$$

## 13.6 Exercice 6

# Enoncé :

Soient $a$ et $b$ deux réels, $f$ continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$. On suppose que $f$ est dérivable sur $]a,b[\backslash\{x_0\}$. Montrer que :

$$(\exists A \in \mathbb{R}\ tq \lim_{x \to x_0} f'(x) = A) \Rightarrow (f'(x_0) \text{ existe et } f'(x_0) = A)$$

# Corrigé :

Soit $x \in ]a, x_0[$. On applique l'E.A.F. à $f$ sur $[x, x_0]$ :
- $f$ est continue sur $[x, x_0]$ car continue sur $[a,b]$.
- $f$ est dérivable sur $]x, x_0[$.

Donc $\exists c \in ]x, x_0[\ tq\ f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Quand $x \to x_0^-$, $c \to x_0^-$ car $x < c < x_0$ donc $f'(c) \to \lim_{x \to x_0}(f'(x)) = A$. D'où $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = A$, donc $f$ est dérivable à gauche de $x_0$ et $f'(x_0^-) = A$. De même, on a $f'(x_0^+) = A$.
Donc $f'(x_0)$ existe et vaut $A$.

## 13.7 Exercice 7

# Enoncé :

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $$\forall x > 0, \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

2. $$\forall x \in ]0, 2\pi], \sin(x) > x - \frac{x^3}{6}$$

3. $$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}, \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p)!}(-1)^p x^{2p}\right) - \frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2} \leq \cos(x) \leq \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p)!}(-1)^p x^{2p}\right) + \frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

# Corrigé :

Formule de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned}
&\mathit{ordre}\ 0 &:& \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) \\
&\mathit{ordre}\ 1 &:& \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)\ \mathit{avec}\ c \in ]a,b[ \\
&\dots && \\
&\mathit{ordre}\ n &:& \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)
\end{aligned}$$

1. On a $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array}$. On applique Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $f$ sur [0,x] et on obtient :

$$fx = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(c) \qquad \text{avec} \qquad c \in ]0, x[$$

Or,

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Donc,

$$\ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2}\right] = \underbrace{\frac{x^3}{3!}\left(\frac{2}{(1+c)^3}\right)}_{>0} \qquad \text{avec} \qquad x > 0 \text{ et } c \in ]0, x[$$

d'où

$$\forall x > 0, \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

2. On a $f(x)=\sin(x)$. Soit $x\in]0,2\pi]$ fixé, on applique Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour $f$ sur $]0,x[$ et on obtient :
$$\sin(x)-\left[x-\frac{x^3}{3!}\right]=\frac{x^4}{4!}\sin^{(4)}(c)\qquad\text{avec}\qquad c\in]0,x[$$
et comme $\sin^{(4)}(x)=\sin(x)$, on a
$$\sin(x)-\left[x-\frac{x^3}{3!}\right]=\frac{x^4}{4!}\sin(c)$$
et si $x\leq\pi$, on a bien $\frac{x^4}{4!}\sin(c)>0$.
Mais si $x>\pi$, on ne peut pas conclure à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange. On utilise donc une méthode plus puissante : la formule de Taylor avec reste intégral :
$$\sin(x)-\left[x-\frac{x^3}{3!}\right]=\int_0^x\frac{(-t)^4}{4!}\sin^{(4)}(t)dt$$
On calcule l'intégrale par IPP et on trouve un reste positif, ce qui prouve bien que
$$\forall x\in]0,2\pi],\sin(x)>x-\frac{x^3}{6}$$

3. $f(x)=\cos(x)$. On applique Taylor-Lagrange à l'ordre $2n+1$ sur $[0,x]$ :
$$\cos(x)-\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right]=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos^{(2n+2)}(c)\qquad\text{avec}\qquad c\in]0,x[$$
Mais $\cos^{(2n+2)}(c)=\cos(c)$ ou $-\cos(c)$, donc $-1\leq\cos^{(2n+2)}(x)\leq 1$, donc
$$\cos(x)-\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right]\in\left[-\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]$$
, en d'autres termes, on obtient
$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\forall n\in\mathbb{N},\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p)!}(-1)^p x^{2p}\right)-\frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2}\leq\cos(x)\leq\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p)!}(-1)^p x^{2p}\right)+\frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

## 13.8 Exercice 8

### Enoncé :

Soit $f$ une fonction à valeurs réelles, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et $f'(a)=0$. Montrer qu'il existe un réel $c$ dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$. Interpréter graphiquement ce résultat.

### Corrigé :

La corde $(AC)$ est la tangente au graphe en $c$. On pose $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ et $M(x_m,f(x_m))$. L'équation de la corde $(AM)$ est
$$Y=\frac{f(x_m)-f(a)}{x_m-a}(X-a)$$
dont la pente est donnée par la fonction auxiliaire
$$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
On a $\left|\begin{array}{l}g(b)=0\\ g(a)=\lim\limits_{x\to a}(g(x))=f'(a)=0\end{array}\right.$ De plus, $g$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, donc $g$ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, donc $\exists c\in]a,b[\ tq\ g'(c)=0$. Or,
$$g'(x)=\frac{f'(x)}{x-a}-\frac{f(x)}{x-a}^2\qquad\text{donc}\qquad g'(c)=0\Rightarrow\frac{f'(c)}{c-a}=\frac{f(c)}{(c-a)^2}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

## 13.9 Exercice 9

# Enoncé :

A l'aide de la formule des accroissements finis, calculer :

1.
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left( \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) \right)$$

2.
$$\lim_{x \to +\infty} \left( (x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

# Corrigé :

1. $f(x) = x^2(g(x) - g(x+1))$ en posant $g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. On a $g'(x) = -\frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
   Pour $x > 0$, $g$ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le TAF,
   $$\exists c \in ]x, x+1[ \ tq \ g(x+1) - g(x) = (x+1-x)g'(c)$$
   Donc
   $$f(x) = x^2(g(x) - g(x+1)) = x^2 \times -g'(c) = x^2\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{c}\right)}{c^2}\right) \qquad \text{avec} \qquad c \in ]x, x+1[$$
   On a $x \underset{+\infty}{\sim} c$ et $\frac{1}{c} \to 0$ quand $c \to +\infty$, donc on a
   $$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 1$$

2. $f(x) = h(x+1) - h(x)$ en posant $h(x) = x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$. On a $h'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Comme $h$ répond aux hypothèses du TAF, $\exists c \in ]x, x+1[ \ tq \ h(x+1) - h(x) = h'(c)$. Ce qui nous donne
   $$f(x) = h'(c) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$
   On a $x \underset{+\infty}{\sim} c$ et $\frac{1}{c} \to 0$ quand $c \to +\infty$, donc on a
   $$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 1$$

## 13.10 Exercice 10

# Enoncé :

Calculer les limites suivantes :

1. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2(x)}\right)$$

2. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{x^2}-\frac{1}{\sin^2(x)}\right)$$

3. $$\lim_{x\to +\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$$

4. $$\lim_{x\to +\infty}\left(x\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right)\right)$$

# Corrigé :

1. On calcule un DA de $\frac{1}{\sin^2(x)}$ :

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\qquad\text{donc}\qquad \sin^2(x)=x^2-\frac{x^4}{3}+\circ(x^4)$$

D'où

$$\frac{1}{\sin^2(x)}=\frac{1}{x^2-\frac{x^4}{3}+\circ(x^4)}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^3}{3}+\circ(x^2)}\right)=\frac{1}{1-u}\quad\text{avec}\quad u=\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)$$

On a

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\ldots+u^n+\circ(u^n)\qquad\text{donc}\qquad \frac{1}{\sin^2(x)}=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right)$$

Au final,

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\left(\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right)\right)=\frac{1}{x^2}\left[1-\left(1+\frac{x^3}{3}+\circ(x^2)\right)\right]=-\frac{1}{3}+\circ(1)$$

et donc

$$\lim_{x\to 0}(f(x))=-\frac{1}{3}$$

2. Dans la question précédente, on a vu que $\frac{1}{\sin^2(x)}=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right)$.

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\qquad\text{donc}\qquad \frac{\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)$$

Au final, on a

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{3}+\circ(x^5)\right)=-\frac{5}{6}+\circ(1)$$

et donc

$$\lim_{x\to 0}(f(x))=-\frac{5}{6}$$

3. On a

$$f(x)=\exp\left(x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)=\exp\left(\frac{1}{y^2}\ln(\cos(y))\right)\qquad\text{avec}\qquad y=\frac{1}{x}$$

$y\to 0$ quand $x\to 0$, donc

$$\cos(y)=1-\frac{y^2}{2}+\circ(y^2)$$

donc

$$\ln(\cos(y)) = \ln\left(1 - \frac{y^2}{2} + \circ(y^2)\right) = \ln(1+u) = u \qquad \text{avec} \qquad u = -\frac{y^2}{2} + \circ(y^2)$$

Au final, on a

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{y^2} \times -\frac{y^2}{2} + \circ(y^2)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} + \circ(y^2)\right)$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

4. Soit $y = \frac{1}{x}$, on a

$$f(y) = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{1+y}\right)^{\frac{1}{y}}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{e} - \left(\exp\left(\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{1+y}\right)\right)\right)\right)$$

On a

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \circ(y^2)$$

donc

$$\ln\left(\frac{1}{1+y}\right) = \ln\left(1_y + y^2 + \circ(y^2)\right) = \ln(1+u) \qquad \text{avec} \qquad u = -y + y^2 + \circ(y^2)$$

On a

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \circ(u^2) = -y + y^2 - \frac{y^2}{2} + \circ(y^2) = -y + \frac{y^2}{2} + \circ(y^2)$$

Donc

$$\left(\frac{1}{1+y}\right)^{\frac{1}{y}} = \exp\left(\frac{1}{y}\left(-y + \frac{y^2}{2} + \circ(y^2)\right)\right) = \exp\left(-1 + \frac{y}{2} + \circ(y)\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{y}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\exp\left(\frac{y}{2} + \circ(y)\right)\right) \\ &= \frac{1}{ey}\left(1 - \left(1 + \frac{y}{2} + \circ(y)\right)\right) \\ &= \frac{1}{ey}\left(-\frac{y}{2} + \circ(y)\right) \\ &= -\frac{1}{2e} + \circ(y) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = -\frac{1}{2e}$$

### 13.11 Exercice 11 - Règle de l'Hospital

## Enoncé :

Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs réelles, définies, continues et dérivables sur un intervalle $I$. On suppose que $g'$ ne s'annule pas sur $I$.

1. Montrer que : $\forall b \in I, \exists c \in ]a,b[$ (ou $]b,a[$ si $b < a$) tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
2. En déduire que si l'application $\frac{f'}{g'}$ a une limite $l$ au point $a$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ admet également $l$ comme limite au point $a$.
3. Application : calculer
$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^\pi - \pi^x}{\sin(x)}$$

## Corrigé :

1. On pose $\Delta_f = f(b) - f(a)$ et $\Delta_g = g(b) - g(a)$.
On étudie sur $[a,b]$ la fonction $h(x) = \Delta_g f(x) - \Delta_f g(x)$. On a
$$h(b) - h(a) = \Delta_h = \Delta_g(f(b) - f(a)) - \Delta_f(g(b) - g(a)) = \Delta_g\Delta_f - \Delta_f\Delta_g \Rightarrow h(a) = h(b)$$
On a $h$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ doonc d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in ]a,b[ \; tq \; \Delta_h = h'(c) = 0$. Or,
$$h'(c) = \Delta_g f'(c) - \Delta_f g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
2. On fait tendre $b$ vers $a$. Alors $c \to a$ puisque $a < c < b$, donc $\frac{f'(c)}{g'(c)} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$ qui existe par hypothèse. Donc
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) = \lim_{a}\left(\frac{f'}{g'}\right)$$
*Attention :* cette égalité n'est vraie que si la deuxième limite existe.
3. On a
$$(x^\pi - \pi^x)' = \pi x^{\pi-1} - (\ln(\pi))\pi^x \qquad \text{et} \qquad (sin(x))' = \cos(x)$$
On cherche donc
$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\pi x^{\pi-1} - (\ln(\pi))\pi^x}{\cos(x)}\right) = \frac{\pi\pi^{\pi-1} - (\ln(\pi))\pi^\pi}{\cos(\pi)} = \pi^\pi(\ln(\pi) - 1)$$

# 14 Fonctions III

## 14.1 Exercice 1

Enoncé :

1. Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f : x \to \sqrt{1+\sqrt{1+X}}$.
2. Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $g : x \to \sin(\sqrt{x^2+3\pi^2})$.

Corrigé :

1. $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^8}{8} + \circ(x^2)$$

   donc
   $$1+\sqrt{1+x} = 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^8}{8} + \circ(x^2)$$

   d'où
   $$f(x) = \sqrt{2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\circ(x^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\circ(x^2)}$$

   On pose $u = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \circ(x^2)$, on a $u^2 = \frac{x^2}{16} + \circ(x^2)$, donc
   $$f(x) = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{16}\right)+\circ(x^2)\right)$$

   d'où
   $$f(x) = \sqrt{2} + \frac{x}{4\sqrt{2}} - \frac{5x^2}{64\sqrt{2}} + \circ(x^2)$$

2. On a
   $$\sqrt{3\pi^2+x^2} = \pi\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{x^2}{3\pi^2}} = \pi\sqrt{3}\left(1+\frac{x^2}{6\pi^2}+\circ(x^3)\right)$$

   Donc
   $$\sin(\pi\sqrt{3})\left(1+\frac{x^2}{6\pi^2}+\circ(x^3)\right) = \sin\left(\pi\sqrt{3}+\frac{x^2}{2\sqrt{3}\pi}+\circ(x^2)\right)$$

   et comme $\sin(A+u) = \cos A \sin u + \sin A \cos u$,
   $$\begin{aligned} g(x) &= \cos(\pi\sqrt{3})\sin\left(\frac{x^2}{2\sqrt{3}\pi}\right) + \sin(\pi\sqrt{3})\times 1 + \circ(x^3) \\ &= \sin(\pi\sqrt{3}) + \frac{\cos(\pi\sqrt{3})x^2}{2\sqrt{3}\pi} + \circ(x^3) \end{aligned}$$

## 14.2 Exercice 2

Enoncé :

Donner un équivalent simple, au voisinage de 0, de $f : x \mapsto x^x - (\sin(x))^{\sin(x)}$.

Corrigé :

### 14.3 Exercice 3

## Enoncé :

1. Montrer que $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$ admet, au voisinage de 0, une fonction réciproque.
2. Former le DL à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $f^{-1}$.

## Corrigé :

1. Soit $I = \mathcal{D}_f = ]-1, +\infty[$. $f$ est strictement croissante et continue sur $I$, elle admet donc une bijection réciproque $g : \mathbb{R} \to I$ $tq$ $\forall x \in I, g(f(x)) = x$ et $\forall y \in \mathbb{R}, f(g(y)) = y$.
2. Montrons que $g : \mathbb{R} \to I$ est $\mathcal{C}^3$ :
   Théorème : Si $f \in \mathcal{C}^n$ pour $n \geq 1$ sur $I$, bijective et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors la bijection réciproque $g : f(I) \to I$ est $\mathcal{C}^n$ sur $f(I)$.

   Preuve : $\forall y \in f(I), g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ si $x = g(y) \in I$. $f$ est $\mathcal{C}^n$ sur $I$ donc $f'$ est $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $I$. Comme $f' \neq 0$ sur $I$, $g'$ existe et est $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $f(I)$, ce qui implique que $g$ est $= matcalC^n$ sur $f(I)$.

   Ici, $f$ est $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $I$, donc $g$ est $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$, notamment au voisinage de 0, donc $g$ admet un DL à l'ordre 3 en 0. Donc
   $$g(y) = a + by + cy^2 + dy^3 + \circ(y^3)$$
   D'après la Formule de Taylor en 0 par $g$,
   $$g(y) = g(0) + yg'(0) + \frac{y^2}{2}g''(0) + \frac{y^3}{6}g'''(0) + \circ(y^3)$$
   D'où
   $$a = g(0) = 0 \qquad b = g'(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{2} \qquad c = \frac{g''(0)}{2} \qquad d = \frac{g'''(0)}{6}$$
   On a
   $$f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3) = y$$
   Donc
   $$y^2 = 4x^2 - 2x^3 + \circ(x^3) \qquad \text{et} \qquad y^3 = 8x^3 + \circ(x^3)$$
   Donc
   $$\begin{aligned} g(y) &= x \\ &= a + by + cy^3 + dy^3 + \circ(y^3) \\ &= b\left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + c(4x^2 - 2x^3) + 8dx^3 + \circ(x^3) \\ &= 2bx + \left(4c - \frac{b}{2}\right)x^2 + \left(\frac{b}{3} - 2c + 8d\right)x^3 \end{aligned}$$
   Par unicité du DL, on obtient
   $$\left\{ \begin{array}{lcl} 2b & = & 1 \\ 4c - \frac{b}{2} & = & 0 \\ \frac{b}{3} - 2c = 8d & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} b & = & \frac{1}{2} \\ c & = & \frac{1}{16} \\ d & = & -\frac{1}{132} \end{array} \right.$$
   Donc
   $$f^{-1}(y) = g(y) = \frac{y}{2} + \frac{y^2}{16} - \frac{y^3}{132} + \circ(y^3)$$

### 14.4 Exercice 4

## Enoncé :

Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que $f$ et $f''$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. On pose $M_0 = \underset{x\in\mathbb{R}}{Sup}|f(x)|$ et $M_2 = \underset{x\in\mathbb{R}}{Sup}|f''(x)|$.

1. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange sur $[x, x+2a]$ que pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} - aM_2$$
2. (a) En déduire que $f'$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $M_(1) = \underset{x\in\mathbb{R}}{Sup}|f'(x)|$. Montrer que
$$M_1^2 \leq 4M_0M_2$$

## Corrigé :

1. On applique Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur $[x, x+2a]$ et on obtient :
$$f(x+2a) = f(x) + 2af'(x) + 2a^2 f''(c) \qquad \text{avec} \qquad c \in [x, x+2a]$$
Donc
$$f'(x) = \frac{f(x+2a)}{2a} - \frac{f(x)}{2a} - af''(c)$$
d'où
$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \left|\frac{f(x+2a)}{2a}\right| + \left|\frac{f(x)}{2a}\right| + a|f'(c)| \\ &\leq \frac{M_0}{a} + aM_2 \end{aligned}$$
2. (a) Quand $a$ fixé, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + aM_2$. Donc $f'(x)$ est bornée.
   (b) On a $M_1 \leq \frac{M_0}{a} + aM_2 \iff M_0 - aM_1 + a^2M_2^2 \geq 0$. Ceci est un polynôme du second degré en $x$ dont le discriminant est négatif. Donc
$$\Delta = M_1^2 - 4M_0M_2 \leq 0 \Rightarrow M_1^2 \leq 4M_0M_2$$

### 14.5 Exercice 5

## Enoncé :

Etudier la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{\pi}{4} \\ u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \end{cases}$$

## Corrigé :

Définition : Soit $s$ un point fixe d'une fonction $f$ continue dérivable au voisinage de $s$.
– si $|f'(s)| > 1$, on dit que $s$ est un point fixe répulsif.
– si $|f'(s)| < 1$, on dit que $s$ est un point fixe attractif.
– si $|f'(s)| = 1$, on dit que $s$ est un point fixe neutre.
Définition : On dit que $f$ est k-lipchitzienne sur $I$ quand $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

*Intuition :* La fonction $f$ ne dilate pas les distances d'un rapport plus grand que $k$

Définition : Si $f$ est dérivable sur $[a, b]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|f'(c)$.
Si $f$ est à variation bornée sur $[a, b]$ (c'est-à-dire $M = \underset{[a,b]}{Sup}|f'|$ existe), alors $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|M$.

On pose $f(x) = 1 - \cos(x)$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. De plus, 0 est un point fixe car $f(0) = 0$. On a $f'(0) = 0$, donc 0 est un point fixe attractif.

$$\text{Sur } I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], |f'(x)| \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Donc $f$ converge vers 0.

### 14.6 Exercice 6

## Enoncé :

Etudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ u_{n+1} = \left|u_n^2 - \frac{1}{4}\right| \end{cases}$$

## Corrigé :

Soit $f(x) = \left|x^2 - \frac{1}{4}\right|$ et soit $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}$. On a $g'(x) = 2x$
Si $l'$ est solution de $x^2 - \frac{1}{4} = x$, alors $l' = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1,2$
Si $l$ est solution de $-x^2 + \frac{1}{4} = x$, alors $l \approx 0,21$
On a $f'(l') = 1 + \sqrt{2} > 1$ et $f'(l) = \sqrt{2} - 1 < 1$ d'après la dérivée de $g$. Il y a alors plusieurs possibilités concernant $l'$ :

- Si $u_0 = l'$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = l'$, donc $(u_n)$ est une suite constante égale à $l'$.
- Si $u_0 > l'$, on applique le TAF sur $[u_n, l']$ :

  $$\forall n \in \mathbb{N} f(u_n) - f(l') = (u_n - l')f'(c) \qquad \text{avec} \qquad c \in ]u_n, l'[$$

  Donc $f'(c) = 1+\sqrt{2} > 2$. Par récurrence, $u_n - l' \geq 2^n(u_0 - l)$ et comme $u_0 - l' > 0$, $u_{n+1} - u_n \to +\infty$. Donc $u_n$ diverge vers $+\infty$.
- Si $u_0 < l'$, on montre qu'il existe un bassin d'attraction autour de $l$. Soit $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $f(0) = \frac{1}{4}$ et $f(\frac{1}{2}) = 0$. Donc $f$ est strictement décroissante sur $I$, d'où $f(I) = \left[O, \frac{1}{4}\right] \subset I$. Donc $f$ est stable sur $I$. $\forall x \in I, f'(x) = -2x$, donc $|f'(x)| \leq 1$. Donc $f$ est contractante au voisinage de $j$. Donc dès que l'un des termes de la suite est dans $I$, la suite converge vers $l$.

### 14.7 Exercice 7

## Enoncé :

Etudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \neq -5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+5} \end{cases}$$

dans les cas suivants :

1. $u_0 = 1$ et $u_0 = -2$.
2. $u_0 \neq 1, u_0 \neq -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -5$. On pourra étudier

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

## Corrigé :

1. Soit $f(x) = \frac{4x+2}{x+5}$
   - $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{6}{6}, \dots$ 1 est un point fixe de $f$, donc $(u)$ est constante.
   - $u_0 = -2$, $u_1 = -\frac{6}{3} = -2, \dots$ -2 est un point fixe de $f$, donc $(u)$ est constante.
2. on a

   $$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n+2}{u_n+5} - 1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5} + 2} = \frac{3u_n - 3}{6u_n + 12} = \frac{u_n - 1}{2u_n + 4} = \frac{1}{2}v_n$$

   $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc $v_n \to 0$. On exprime $u_n$ en fonction de $v_n$ et on a

   $$v_n = \frac{u_n + 2 - 3}{u_n + 2} = 1 - \frac{3}{u_n + 2} \qquad \text{donc} \qquad u_n = -2 - \frac{3}{v_n - 1}$$

   On a $v_n \to 0$ donc $u_n \to 1$.

# 15 Arithmétique I-II

## 15.1 Exercice 1

**Enoncé :**

Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $a = 247^{349}$.

**Corrigé :**

Définition : Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, on dit que $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sont congrus modulo $n$ ssi $n|a - b$. On note $a \equiv b[n]$.
*Remarque :* $\equiv$ est une relation d(équivalence compatible avec $+$ et $\times$, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} b \equiv a[n] \\ b' \equiv a'[n] \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} b + b' \equiv a + a'[n] \\ bb' \equiv aa'[n] \end{array} \right.$$

247=35*72 donc $247 \equiv 2[7] \Rightarrow 247^{349} \equiv 2^{349}[7]$. On remarque que

$$2 \equiv 2[7] \qquad 4 \equiv 4[7] \qquad 8 \equiv 1[7]$$

On fait la division euclidienne de 349 par 3 : 349=3*116+1, d'où $2^{349} = 2^{3*116+1} = (2^3)^{116} * 2$, donc $a \equiv 2^{349} * 2 \equiv 1^{116} * 2 \equiv 2[7]$. Donc

$$a \equiv 2[7]$$

## 15.2 Exercice 2

**Enoncé :**

Montrer que, pour tout nombre premier $p \geq 5$, 24 divise $p^2 - 1$.

**Corrigé :**

Soit $n = p^2 - 1$. On sait que $24 = 2^3 * 3 = 8 * 3$ et $3 \wedge 8 = 1$. Donc pour montrer que $24|n$, il faut et il suffit de montrer que $3|n$ et $8|n$.
On a $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$

- $p \geq 3$, donc $p$ impair, donc $(p - 1)$ et $(p + 1)$ pairs, donc $4|p^2 - 1$. On a donc $p - 1 = 2k$ et $p + 1 = 2(k + 1)$. Si $k$ est pair, $(p - 1)$ est un multiple de 4. Si $k$ impair, $(p + 1)$ est un multiple de 4. Dans tous les cas, $8|p^2 - 1$
- Parmi $p - 1, p, p + 1$, il y a forcément un multiple de 3. Ca ne peut être $p$ car $p \geq 5$, donc $3|p - 1$ ou $3|p + 1$ donc $3|p^2 - 1$

On a $3|p^2 - 1$ et $8|p^2 - 1$, donc $24|p^2 - 1$

## 15.3 Exercice 3

**Enoncé :**

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ : $3x^2 + xy - 11 = 0$.

**Corrigé :**

$(E) \quad 3x^2 + xy - 11 = 0 \iff x(3x + y) = 11$. 11 est premier, donc ses diviseurs sont : $\{-11, -1, 1, 11\}$.

- Si $x = -11$, alors $3x + y = -1$, donc $y = 32$.
- Si $x = -1$, alors $3x + y = -11$, donc $y = -8$.
- Si $x = 1$, alors $3x + y = 11$, donc $y = 8$.
- Si $x = 11$, alors $3x + y = 1$, donc $y = -32$.

$$\text{Donc} \qquad \mathcal{S} = \{(-11, 32), (-1, -8), (1, 8), (11, -32)\}$$

## 15.4 Exercice 4

**Enoncé :**

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$11|2^{6n+3} + 3^{2n+1}$$

**Corrigé :**

On a $2^6 = 64 \equiv 9[11] \equiv 3^2[11]$, donc $2^{6n} \equiv 3^{2n}[11]$. De plus, $2^3 \equiv -3[11]$ Donc $Z^{6n+3} \equiv -3^{2n+1}[11] \Rightarrow 2^{6n+3} + 3^{2n+1} \equiv 0[11]$. Donc $11|2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.

## 15.5 Exercice 5

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que 7 divise $a^2 + b^2$. Montrer que 7 divise $a$ et 7 divise $b$.

# Corrigé :

On fait le tableau de la fonction $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2) \mod 7$ :

| $\frac{a}{b}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 5 | 2 |
| 2 | 4 | 5 | 1 | 6 | 6 | 1 | 5 |
| 3 | 2 | 3 | 6 | | | | |
| 4 | 2 | 3 | | | | | |
| 5 | 4 | 5 | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | | | | | |

En remplissant le tableau, on trouve 0 uniquement pour $a \equiv 0[7]$ et $b \equiv 0[7]$
Pour $a \not\equiv 0[7]$, $a^2 \in \{1, 2, 4\}$. Donc $a^2 + b^2 \equiv 0[7] \Rightarrow b^2 \in \{6, 5, 3\}$ ce qui est impossible car $b^2 \in \{1, 2, 4\}$.
Donc

$$7|a^2 + b^2 \Rightarrow (7|a) \wedge (7|b)$$

## 15.6 Exercice 6

# Enoncé :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

1. Calculer le $PGCD$ de $S_n$ et $S_{n+1}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$PGCD(PGCD(S_n, S_{n+1}), S_{n+2}) = 1$$

# Corrigé :

Soit $d = S_n \wedge S_{n+1}$. On sait que $S_n = \frac{n^2(n+1]^2}{4}$

1. – Si $n$ impair, $a = \frac{(n+1)^2}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n = an^2$ et $S_{n+1} = a(n+2)^2$. Puisque $n$ et $n+2$ sont deux nombres impairs consécutifs, ils sont premiers entre eux. Donc $d = a$.
   – Si $n$ pair, b=$\frac{n^2}{4} \in \mathbb{N}$ et $b' = \frac{(n+2)^2}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n = b(n+1)^2$ et $S_{n+1} = b'(n+1)^2$. Ici, $n = 2p$ donc $b = \frac{n^2}{4} = p^2$ et $b' = \frac{(n+2)^2}{4} = (p+1)^2$. $b$ et $b'$ sont les carrés de deux entiers consécutifs, ils sont donc premiers entre eux. Donc $d = (n+1)^2$
2. On a $d' = S_n \wedge S_{n+1} \wedge S_{n+2} = S_{n-1} \wedge S_n \wedge S_{n+1}$

   *Astuce : $a \wedge b = (a - b) \wedge b$*

$$d' = (S_{n-1} \wedge S_n) \wedge S_{n+1} = (S_n - S_{n-1}) \wedge S_n \wedge S_{n+1} = n^3 \wedge S_n \wedge S_{n+1} \qquad d'|n^3$$

$$d' = S_{n-1} \wedge (S_n \wedge S_{n+1}) = S_{n-1} \wedge S_n \wedge (S_{n+1} - S_n) = S_{n+1} \wedge S_n \wedge (n+1)^3 \qquad d'|(n+1)^3$$

   $n$ et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, donc premiers entre eux, donc $d' = 1$.

## 15.7 Exercice 7

# Enoncé :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$PGCD(F_n, F_{n+k}) = 1$$

# Corrigé :

On remarque que les premiers termes de la suite de Fermat sont des nombres premiers :

$$F_0 = 3 \quad F_1 = 5 \quad F_2 = 17 \quad F_3 = 257 \quad F_4 = 65537$$

. On s'intéresse à la suite $F_n - 2$ :

$$F_0 - 2 = 1 \quad F_1 - 2 = 3 \quad F_2 - 2 = 15 = 3 * 5 \quad F_3 - 2 = 255 = 3 * 5 * 17 \quad F_4 - 2 = 65535 = 3 * 5 * 17 * 257$$

Soit $\mathcal{P}$ le prédicat de domaine $\mathbb{N}^*$ : "$F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$".

- *Base :* $\mathcal{P}(1)$ car $F_1 - 2 = F_0 = 3$.
- *Hérédité :* On suppose $\mathcal{P}(n)$, on veut montrer $\mathcal{P}(n+1)$ :

$$F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 = 2^{2.2^n} - 1 = (2^n)^2 - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1) = F_n(F_n - 2)$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$F_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} F_k$$

. Donc, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

Donc, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$.

En écrivant le prédicat au rang $n+k$, on a

$$F_{n+k} = F_0 F_1 \dots F_{n+k-1} + 2$$

qui est une divisojn euclidienne de $F_{n+k}$ par $F_n$. D'après l'algorithme d'Euclide, $F_{n+k} \wedge F_n = F_n \wedge 2$. Or, $F_n$ est impair, donc $F_n \wedge 2 = 1$. Donc, $F_{n+k} \wedge F_n = 1$

## 15.8 Exercice 8

### Enoncé :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ : $323x - 391y = 612$.

### Corrigé :

Résolution de l'équation diophantienne $(E)$ $\quad ax + by = c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et $(x, y) \in \mathbb{X}^2$

1. On pose $^d = a \wedge b$
   - Si $d \nmid c$, pas de solution. En effet, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, donc $c$ doit appartenir à $d\mathbb{Z}$ pour que $(E)$ ait des solutions.
   - Si $d|c$, on peut simplifier l'équation par $d$ et on obtient $(E')$ $\quad a'x + b'y = c'$ avec $a = da'$, $b = db'$ et $c = dc'$ et $a' \wedge b' = 1$
2. On résoud l'équation de Bézout associée à $(E')$ : $(E'')$ $\quad a'x + b'y = 1$
   - Algorithme de Bézout pour trouver une solution particulière $(x_0, y_0)$ de $(E'')$.
   - On en déduit les solutions générales de $(E'')$ : $\mathcal{S}' = \{(x_0 + b'k, y_0 - a'k), k \in \mathbb{Z}\}$.
3. On en déduit les solutions de $(E)$ en multipliant par $c'$ : $\mathcal{S} = \{(c'(x_0 + b'k), c'(y_0 - a'k)), k \in \mathbb{Z}\}$

On a $(E)$ $\quad 323x - 391y = 612$.

$$\begin{array}{lcllc} 391 & = & 323 & + & 68 \\ 323 & = & 4*68 & + & 51 \\ 68 & = & 51 & + & 17 \\ 51 & = & 3*17 & + & 0 \end{array}$$

17 est le dernier reste non-nul. c'est donc le PGCD. De plus, $17|612$, donc $(E) \iff (E')$ $\quad 19x - 23y = 36$.
On pose $(E'')$ $\quad 19x - 23y = 1$, en déroulant l'algo de Bézout, on a

$$\begin{array}{l} 23 = 19 + 4 \\ 19 = 4*4+3 \\ 4 = 3+1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & 4 - 3 = 4 - (19 - 4*4) \\ & = & -3*19 + 5*4 = -19 + 5(23 - 19) \\ & = & -6*19 + 5*23 \end{array}$$

Donc $(x_0, y_0) = (-6, -5)$ en faisant attention aux signes. La solution générale de $(E'')$ est

$$\mathcal{S}' = \{(-6 - 23k, -5 - 19k), k \in \mathbb{Z}\}$$

En multipliant par 36, on obtient la solution de $(E)$ :

$$\mathcal{S} = \{(-36(6 + 23k), -36(5 + 19k)), k \in \mathbb{Z}\}$$

## 15.9 Exercice 9

### Enoncé :

Calculer le $PGCD$, noté $d$, de 18480 et 9828. Donner des entiers $u$ et $v$ tels que $d = 18480u + 9828v$.

### Corrigé :

$$\text{On a} \quad \begin{array}{rcl} d & = & 18480 \wedge 9828 \\ & = & 4*(4620 \wedge 2457) \\ & = & 12*(1540 \wedge 819) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcllc} 1540 & = & 819 & + & 721 \\ 819 & = & 721 & + & 98 \\ 721 & = & 7*98 & + & 35 \\ 98 & = & 2*35 & + & 28 \\ 35 & = & 28 & + & 7 \\ 28 & = & 4*7 & + & 0 \end{array}$$

Donc $d = 12*7 = 84$

On a alors $(E)$ $\quad 220x + 117y = 1$

$$\begin{array}{lcllc} 220 & = & 117 & + & 103 \\ 117 & = & 103 & + & 14 \\ 103 & = & 7*14 & + & 5 \\ 14 & = & 2*5 & + & 4 \\ 5 & = & 4 & + & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & 5 - 4 = 5 - (14 - 2*5) \\ & = & 3*5 - 14 = -14 + 3(103 - 7*14) \\ & = & 3*103 - 22*14 = 3*103 - 22(117 - 103) \\ & = & -22*117 - 25*103 = -22*117 - 25(220 - 117) \\ & = & 25*220 - 47*177 \end{array}$$

Donc, les solutions de $(E)$ sont :

$$\mathcal{S} = \{(25 + 117k, -47 - 220k), k \in \mathbb{Z}\}$$

## 15.10 Exercice 10

# Enoncé :

Montrer que pour $n \geq 1$,

$$(2^n + 3^n) \wedge (2^{n+1} + 3^{n+1}) = 1$$

# Corrigé :

Posons $a = 2^{n+1} + 3^{n+1}$ et $b = 2^n + 3^n$.

$$\begin{aligned}
d &= a \wedge b \\
&= (a-b) \wedge b \\
&= (2^{n+1} - 2^n + 3^{n+1} - 3^n) \wedge b \\
&= (2^n + 2 * 3^n) \wedge b \\
&= (b + 3^n) \wedge b \\
&= 3^n \wedge b \\
&= 3^n \wedge (2^n + 3^n) \\
&= 3^n \wedge 2^n
\end{aligned}$$

Or $3^n$ et $2^n$ sont premiers entre eux, donc $a \wedge b = 1$.

## 15.11 Exercice 11

# Enoncé :

Soit $p_n$ le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.

1. Montrer que $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ admet un diviseur premier supérieur à $p_n$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$p_n \leq 2^{2^n}$$

# Corrigé :

1. Soit $a = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Soit $k \in [\![1..n]\!]$, l'écriture ci-dessus est la division euclidienne de $a$ par $p_k$, donc $a \wedge p_k = 1 \iff a \equiv 1[p_k]$, donc $a$ n'est pas divisible par $p_k$. Donc $a$ admet un diviseur premier $p \geq p_n$.
2. Soit $\mathcal{T}$ le prédicat de domaine $\mathbb{N}^*$ : "$p_n < 2^{2^n}$".
   - *Base :* $\mathcal{T}(1)$ car $2 < 2^2$.
   - *Hérédité :* On suppose $\mathcal{T}(1) \wedge \mathcal{T}(2) \ldots \mathcal{T}(n)$, montrons $\mathcal{T}(n+1)$. Posons $a = p_1 p_2 \ldots p_{n+1} + 1$,

   $$a < 2^{2^1} * 2^{2^2} * 2^{2^3} * \ldots * 2^{2^n} + 1 = 2^{2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^n} + 1$$

   donc $a < 2^{2(2^n - 1)} + 1 < 2^{2^{n+1}}$. Or $p_{n+1} < a$, donc $p_{n+1} < 2^{2^{n+1}}$. Donc, $\mathcal{T}(1) \wedge \mathcal{T}(2) \wedge \ldots \wedge \mathcal{T}(n) \Rightarrow \mathcal{T}(n+1)$.

   Donc, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{T}(n)$

# 16 Arithmétique III

## 16.1 Exercice 1 : équation linéaire de congruence d'une variable

### Enoncé :

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}$. La congruence de la forme : $ax \equiv b[n]$ (1) est appelée congruence linéaire d'une variable.

1. Résoudre les congruences linéaires suivantes : $2x \equiv 3[3], 2x \equiv 3[5], 2x \equiv 4[6], 3x \equiv 9[6]$.
2. Posons $d = PGCD(a,m)$. Montrer que si $d$ ne divise pas $b$, alors la congruence (1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$, et si $d$ divise $b$, alors la congruence (1) admet une solution dans $\mathbb{Z}$.
3. Dans la suite, on considère le cas : $d$ divise $b$.
   (a) Soit $x_0$ une solution particulière de (1), montrer que (1) admet une infinité de solutions de la forme $\{x_0 + (m|d)n, n \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que toutes les solutions de (1) sont de la forme $\{x_0 + (m|d)n, n \in \mathbb{Z}\}$ dans $\mathbb{Z}$
   (c) Montrer que (1) admet $d$ solutions dans $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ de la forme $\{x_0 + (m|d)n, n \in \{0, 1, \dots, d-1\}\}$.
   (d) Résumer les résultats précédents sous forme d'un théorème.
   (e) Utiliser le théorème précédent pour résoudre l'équation de congruence linéaire suivante :

$$16x \equiv 8[28]$$

### Corrigé :

1. – $2x \equiv 3[3] \iff 2x \equiv 0[3] \equiv \dot{x} = \dot{0}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$. Donc $\mathcal{S} = \{3k, k \in \mathbb{Z}\}$
   – $2x \equiv 3[5] \iff \equiv \dot{x} = \dot{4}$. Donc $\mathcal{S} = \{5k+4, k \in \mathbb{Z}\}$
   – $2x \equiv 4[6] \iff \dot{x} = \dot{2}$ ou $\dot{x} = \dot{5}$. Donc $\mathcal{S} = \{2+6k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5+6k, k \in \mathbb{Z}\} = \{2+3k, k \in \mathbb{Z}\}$
   – $3x \equiv 9[6] \iff 3x \equiv 3[6] \iff \dot{x} \in \{\dot{1}, \dot{3}, \dot{5}\}$. Donc $\mathcal{S} = \{x \text{ impair}\}$ On remarque aussi que $3x \equiv 3[6] \iff x \equiv 1[2]$
2. $d = a \wedge m$. Montrons que (1) a des solutions ssi $d|b$ :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (1) &\iff ax \equiv b[m] \\ &\iff \exists y \in \mathbb{Z} \ tq \ ax = b + my \\ &\iff \exists y \in \mathbb{Z} \ tq \ ax - my = b \\ &\iff b \in a\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} \\ &\iff b \in d\mathbb{Z} \\ &\iff d|b \end{aligned}$$

3. (a) On doit montrer 2 choses : qu'il existe au moins une solution particulière dès que $d|b$ et qu'on a une infinité de solutions dans $\mathbb{Z}$ de la forme $x_0 + k\frac{m}{d}$.
   – L'existence de $x_0$ est donnée par l'algorithme de Bezout :

$$d = a \wedge m \Rightarrow \exists (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 \ tq \ au_0 - mv_0 = d$$

   En multipliant par $\frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$ on obtient

$$a \underbrace{\left(u_0 \frac{b}{d}\right)}_{x_0 \in \mathbb{Z}} - m \underbrace{\left(v_0 \frac{b}{d}\right)}_{\in \mathbb{Z}} = b \Rightarrow ax_0 \equiv b[m]$$

   – Posons $x = x_0 + k\frac{m}{d}$.

$$\begin{aligned} ax &= ax_0 + ak\frac{m}{d} \\ &\equiv (ax_0 \mod m) + \left(ak\frac{m}{d} \mod m\right) [m] \\ &\equiv b + \underbrace{\frac{a}{d}km}_{\equiv 0[m] \ car \ d|a} \quad [m] \\ &\equiv b[m] \end{aligned}$$

(b) On doit montrer que réciproquement, toutes les solutions sont de cette forme $x = x_0 + k\frac{m}{d}$. On va montrer que $x - x_0$ est un multiple de $\frac{m}{d}$ :

$$\begin{array}{rcl} x_0 \text{ solution de (1)} & \Rightarrow & \exists y_0 \in \mathbb{Z}\ tq\ ax_0 - my_0 = b \\ x \text{ solution de (1)} & \Rightarrow & \exists y \in \mathbb{Z}\ tq\ ax - my = b \end{array}$$

On fait la différence : $a(x - x_0) = m(y - y_0)$. En divisant par $d$, on obtient des cœfficients constants de $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$ premiers entre eux.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{a}{d}(x - x_0) & = & \frac{m}{d}(y - y_0) \\ \frac{m}{d} \wedge \frac{a}{d} & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{m}{d}|(x - x_0)$$

d'après le théorème de Gauss. Donc $x = x_0 + k\frac{m}{d}, k \in \mathbb{Z}$

(c) Pour montrer qu'il n'y a que $d$ solutions dans $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, on prend deux solutions $x_1$ et $x_2$ dans $\mathbb{Z}$ et on cherche des conditions pour que $x_1$ et $x_2$ tombent dans la même classe modulo $m$. On suppose donc $x_1 = x_0 + k_1\frac{m}{d}$, $x_2 = x_0 + k_2\frac{m}{d}$ et $x_1 \equiv x_2[m]$. On a donc

$$\begin{array}{rcl} x_0 + k_1\dfrac{m}{d} \equiv x_0 + k_2\dfrac{m}{d}[m] & \Longleftrightarrow & k_1\dfrac{m}{d} \equiv k_2\dfrac{m}{d}[m] \\ & \Longleftrightarrow & (k_1 - k_2)\dfrac{m}{d} \equiv k'm \quad \text{avec} \quad k' \in \mathbb{Z} \\ & \Longleftrightarrow & k_1 - k_2 = k'd \\ & \Longleftrightarrow & k_1 \equiv k_2[d] \end{array}$$

Ce qui est plus précis que $k_1 \equiv k_2[m]$ car $d|m$. Donc il y a $d$ classes solutions dans $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$, celles où $\mathbb{K}$ prend les valeurs $\dot{0}, \dot{1}, \ldots, \widehat{d-1}$. Donc $\mathcal{S} = \{x_0 + k\frac{m}{d}, k \in [\![0..d-1]\!]$.

(d) <u>Théorème pour la résolution de congruence de la forme $ax \equiv b[m]$</u>

i. Poser $d = a \wedge b$.

ii. Si $d \nmid b$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$, sinon on trouve une solution particulière $x_0$ par Bezout et donc $\mathcal{S} = \{x_0 + k\frac{m}{d}, k \in [\![0..d-1]\!]\}$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$.

iii. Déplier $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{Z}$.

(e) i. $d = 16 \wedge 28 = 4$.

ii. $d|8$, prenons $x_0 = 4$, les solutions dans $\frac{\mathbb{Z}}{28\mathbb{Z}}$ sont $\mathcal{S} = \{\dot{4}, \dot{11}, \dot{18}, \dot{25}\}$.

iii. Les solutions dans $\mathbb{Z}$ sont donc $\mathcal{S} = \{4 + 7k, k \in \mathbb{Z}\}$

## 16.2 Exercice 2 : théorème de Wilson

# Enoncé :

On dit que $a$ et $b$ sont inverses modulo $b$ si $ab \equiv 1[p]$.

1. Soient $p$ un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Démontrer l'équivalence suivante :
$$a^2 \equiv 1[p] \iff (a \equiv 1[p] \text{ ou } a \equiv -1[p])$$
2. Montrer que $p$ premier $\Rightarrow (p-1)! \equiv -1[p]$.
3. Montrer le résultat réciproque, c'est-à-dire soit $n \in \mathbb{Z},\ n > 1$, si $(n-1)! \equiv -1[n]$, alors $n$ est un nombre premier.

# Corrigé :

Théorème de Wilson :

$$(n-1)! \equiv -1[n] \iff n \text{ premier} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad n|[(n-1)!+1] \iff n \text{ premier}$$

1. On doit démontrer que les seules solutions de l'équation $x^2 \equiv 1[p]$ sont $x = \dot{1}$ et $x = \dot{-1}$ dès que $p$ est premier.
   - $\Leftarrow$ : $a \equiv 1[p] \Rightarrow a^2 \equiv 1[p]$ en élevant au carré. De même, $a \equiv -1[p] \Rightarrow a^2 \equiv 1[p]$.
   - $\Rightarrow$ : On suppose $a^2 \equiv 1[p]$. On peut réecrire cette congruence sous la forme $a^2 - 1 \equiv 0[p]$ ou encore $(a-1)(a+1) \equiv 0[p]$. $p$ étant premier, $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ est un corps, donc un anneau intègre, donc $a+1 \equiv 0[p]$ ou $a - 1 \equiv 0[p]$.

   Donc
   $$a^2 \equiv 1[p] \iff (a \equiv 1[p] \text{ ou } a \equiv -1[p])$$
2. Soit $N = (p-1)! = 1 \times [2 \times 3 \times \ldots \times (p-2)] \times (p-1)$. Comme il a été vu précédemment, A et $(p-1)$ sont leur propre inverse, et les éléments entre 2 et $(p-2)$ ont leur inverse entre les crochets, donc $N \equiv 1 \times (p-1)[p] \iff N \equiv -1[p]$
3. On doit montrer réciproquement que $(n-1)! + 1 \equiv 0[n] \Rightarrow n$ premier.
   Indication : poser $n = n'p$ avec $p$ premier et montrer $n' = 1$.
   On a $n'|n$ et $n|[(n-1)+1]$, donc $n'|[(n-1)+1]$. Mais $1 \leq n' \leq \frac{n}{2} \leq n$, donc $n'|(n-1)!$. $n'$ divise deux entiers consécutifs, donc $n' = 1$, donc $n = p$ et est donc premier.

## 16.3 Exercice 3

# Enoncé :

1. Soient $p$ un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $p$ ne divise pas $a$, alors $a^{p-2}$ est l'inverse de $a$ modulo $p$.
2. En utilisant le petit théorème de Fermat et le résultat de la question précédente, résoudre les congruences linéraires suivantes : $9x \equiv 21[23]$, $11x \equiv 15[29]$.
3. A l'aide du théorème de Fermat, montrer que $30|(n^5 - n)$

# Corrigé :

1. Si $p$est premier et si $a \wedge p = 1$ alors $a^{p-1} \equiv 1[p] \iff \dot{a}$ est une classe non-nulle de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ telle que $\dot{a}(\dot{\widehat{a^{p-2}}}) = \dot{1} \iff a^{p-2}$ est l'inverse de $a$ modulo $p$.
2. - $9x \equiv 21[23]$. On sait, d'après la question précédente, que $\dot{9^{21}}$ est l'inverse de $\dot{9}$. Donc $x \equiv 21 \times 9^{21}[23]$. Or $9^{21} = (9^3)^7$. De plus, $9^3 = 9 \times 9^2 \equiv 12 \times 9[23] \equiv 16[23]$ et $16^7 = 16^{2\times 3+1} = (16^2)^3 \times 16 \equiv 3^3 \times 16[23] \equiv 6[23]$. Donc $9^{21} \equiv 6[23]$ et donc $x \equiv 21 \times 6[23] \equiv 11[23]$
   - $11x \equiv 15[29] \iff x \equiv 15 \times 11^{27}$ et on utilise la même méthode que précédemment pour pour simplifier l'expression.
3. $30 = 2 \times 3 \times 5$ donc il suffit de prouver que $2|(n^5 - n), 3|(n^5 - n)$ et $5|(n^5 - n)$.
   - D'après Fermat, $\forall n \in \mathbb{Z}, n^5 \equiv n[5]$
   - $n^5 \equiv n[3]$.
   $$n = -1 \Rightarrow -1 = -1 \qquad n = 0 \Rightarrow 0 = 0 \qquad n = 1 \Rightarrow 1 = 1$$
   - $n^5 \equiv n[2]$.
   $$n = 0 \Rightarrow 0 = 0 \qquad n = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

### 16.4 Exercice 4 - le système de chiffrement RSA

# Enoncé :

On se donne deux nombres premiers $p$ et $q$ distincts et on pose $n = p \times q$. Soient $c$ et $d$ deux entiers tels que $c \times d \equiv 1[(p-1) \times (q-1)]$. Montrons que si $t \in \mathbb{Z}$, alors $t^{c \times d} \equiv t[n]$.

*Remarque :* Notons $\mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. L'application $g : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ où $g(t) = t^c$ s'appelle une fonction de chiffrement, et l'application $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ où $f(t) = t^d$ s'appelle une fonction de déchiffrement. L'exercice affirme que $(f \circ g)(t) = t$. On peut donc chiffrer un message (représenté par un élement $t \in \mathbb{Z}_n$) par le biais de l'application $g$, puis on le déchiffre par le biais de l'application $f$. Le couple $(n, c)$ est appelé la clef publique et l'entier $d$ la clef secrète. La sécurité de ce système repose sur le fait que connaissant la clef publique, il est très difficile de déterminer $d$ : il faudrait par exemple factoriser $n$ pour trouver $p$ et $q$, ce qui est presque impossible de nos jours lorsque $p$ et $q$ sont grands, typiquement de l'ordre de 100 chiffres. En d'autres termes, tout le monde peut chiffrer mais seuls ceux connaissant la clef secrète peuvent déchiffrer.

# Corrigé :

$cd = 1 + k(p-1)(q-1)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. On doit montrer que $t^{cd} \equiv t[n] \equiv t[pq]$. Il suffit de montrer que $t^{cd} \equiv t[p]$ et $t^{cd} \equiv t[q]$ car $p$ et $q$ sont premiers, donc premiers entre eux.Le problème étant symétrique en $p$ et $q$, on montre l'un des deux.

- Si $t \equiv 0[p]$, $t^{cd} \equiv 0[p] \equiv t[p]$.
- Si $t \not\equiv 0[p]$, on peut appliquer le petit théorème de Fermat : $t^{p-1} \equiv 1[p]$. Or $t^{cd} \equiv t^{1+k(p-1)(q-1)} \equiv tt^{k(p-1)(q-1)}[p] \equiv t\underbrace{\left(t^{(p-1)}\right)^{(q-1)}}_{\equiv 1[p]} \equiv t[p]$.

De même pour $q$. Donc $t^{cd} \equiv t[pq]$

# 17 Polynômes I

## 17.1 Exercice 1

Enoncé :

Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Considérons l'égalité suivante : $(X+1)^{m+n} = (X+1)^m(X+1)^n$. Calculer dans chaque membre de l'égalité le coefficient du terme de plus haut degré $p$ où $p \in [\![0..m+n]\!]$. En déduire une formule sur les cœfficients du binôme.

Corrigé :

On a

$$P = \sum_{i=0}^{m} C_m^i X^i \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{j=0}^{n} C_n^j X^j$$

Donc

$$\begin{aligned}
PQ &= (1+X)^{m+n} \\
&= \sum_{p=0}^{m+n} C_{m+n}^p X^p \\
&= (1+X)^m(1+X)^n \\
&= \sum_{p=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=0} P_i Q_j \right) X^p \\
&= \sum_{p=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=0} C_m^i C_n^j \right) X^p
\end{aligned}$$

Par unicité des cœfficients de la décomposition sur la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$, on obtient

$$C_{m+n}^p = \sum_{i+j=p} C_m^i C_n^j \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad C_{m+n}^p = \sum_{i=0}^{p} C_m^i C_n^{p-i}$$

### 17.2 Exercice 2

## Enoncé :

Soit un entier $n \leq 1$. Considérons $P(X) = (1+aX)(1+a^2X)\dots(1+a^nX)$. Posons $P(X) = 1+\sum_{i=1}^{n} A_iX^i$, c'est-à-dire que les $A_i$ sont les cœfficients de $P$ une fois $P$ écrit sous la forme habituelle en ayant développé les produits. Montrer que :

$$(1+aX)P(aX) = P(X)(1+a^{n+1}X)$$

A l'aide de cette relation, calculer des cœfficients $A_i$.

## Corrigé :

On a :

$$\begin{array}{rcl} P_{n+1}(X) & = & (1+aX)(1+a^2X)\dots(1+a^nX)(1+a^{n+1}X) = P(X)(1+a^{n+1}) \\ P_n(aX) & = & (1+a^2X)(1+a^3X)\dots(1+a^{n+1}X) = P_{n+1}(X)(1+aX) \end{array}$$

D'où l'égalité demandée. On sait que $d°(P_n) = n$ et le terme constant de $P_n$ est 1. En développant $P(X)$, on a $P_n(X) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A_iX^i$. Donc

$$\begin{array}{rl} & (1+aX)P(aX) = P(X)(1+a^{n+1}X) \\ \Longleftrightarrow & (1+aX)\left(1+\sum_{i=1}^{n} A_ia^iX^i\right) = \left(1+\sum_{i=1}^{n} A_iX^i\right)(1+a^{n+1}X) \\ \Longleftrightarrow & 1+\sum_{i=1}^{n} A_ia^iX^i + aX + \sum_{i=2}^{n+1} A_{i-1}a^iX^i = 1 + a^{n+1}X + \sum_{i=1}^{n} A_iX^i + \sum_{i=2}^{n+1} A_{i-1}a^{n+1}X^i \\ \Longleftrightarrow & (a+aA_1)X + \sum_{i=2}^{n}(A_ia^i + A_{i-1}a^i)X^i + A_na^{n+1}X^{n+1} = \\ & (a^{n+1}+A_1)X + \sum_{i=2}^{n}(A_i + A_{i-1}a^{n+1})X^i + A_na^{n+1}X^{n+1} \end{array}$$

Les termes de même degré étant égaux, on obtient le système suivant :

$$\begin{array}{rl} & \left\{\begin{array}{lcll} a(1+A_1) & = & a^{n+1}+A_1 & \\ a^i(A_i+A_{i-1}) & = & A_i + A_{i-1}a^{n+1} & \forall i \in [\![2..n]\!] \\ A_na^{n+1} & = & A_na^{n+1} & \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcll} A_1 & = & \frac{a^{n+1}-a}{a-1} & a \neq 1 \\ A_i & = & A_{i-1}\left(\frac{a^{n+1}-a^i}{a^i-1}\right) & a \neq -1 \quad \forall i \in [\![2..n]\!] \end{array}\right. \end{array}$$

### 17.3 Exercice 3

## Enoncé :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons $P(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n})$. Calculer les cœfficients de $P$.

## Corrigé :

On peut procéder de deux façons différentes :

- On a

$$\begin{array}{rcl} P_n(X) & = & (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n}) \\ P_{n+1}(X) & = & P_n(X)(1+X^{2^{n+1}}) = (1+X)P_n(X^2) \end{array}$$

  D'où $(1+X)P(X^2) = P(X)(1+X^{2^{n+1}})$ et on appique la même méthode que pour l'exercice 2.
- On remarque que

$$P_1 = (1+X) \quad P_2 = (1+X)(1+X^2) = 1+X+X^2+x^3$$

$$P_3 = (1+X)(1+X^2)(1+X^4) = 1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7$$

  Soit $\mathcal{P}$ le prédicat de domaine $\mathbb{N}$ : "$\mathcal{P}_n(X) \iff \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} X^i$".

## 17.4 Exercice 4

# Enoncé :

Déterminer $P_n$ polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$P_n - P_n' = \frac{X^n}{n!}$$

# Corrigé :

Procédons par itérations

- $n = 1$

$$P = aX + b \quad P' = A \quad P - P' = X \iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b - a & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 1 \end{cases} \iff P = X + 1$$

- $n = 2$

$$P = aX^2 + bX + c \quad P' = 2aX + b \quad P - P' = \frac{X^2}{2} \iff \begin{cases} a & = & \frac{1}{2} \\ b - 2a & = & 0 \\ c - b & = & 0 \end{cases} \iff P = 1 + X + X^2$$

- $n = 3$

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad P' = 3aX^2 + 2bX + C \quad P - P' = \frac{X^3}{3!} \iff \begin{cases} a & = & \frac{1}{3!} \\ b - 3a & = & 0 \\ c - 2b & = & 0 \\ d - c & = & 0 \end{cases} \iff$$

$$P = 1 + X^2 + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}$$

- A l'ordre $n$,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k \quad P - P' = \frac{X^n}{n!} \iff \begin{cases} a_n = \frac{1}{n!} \\ a_k - (k+1) a_{k+1} = 0 \end{cases} \quad \forall k \in [\![0..n-1]\!]$$

On obtient

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_{n-1} = a_n - n = \frac{1}{n!} n = \frac{1}{(n-1)!} \qquad \dots \qquad a_1 = 0 \qquad a_0 = 0$$

Donc,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

## 17.5 Exercice 5

# Enoncé :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application $F$ de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ définie par $F(P) = P - P'$. Montrer que $F$ est une application linéaire bijective et déterminer sa réciproque.

# Corrigé :

- $F$ est linéaire car la soustraction et la dérivation sont linéares.
- On a
$$Ker(F) = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \ tq \ P = P'\} = \{0\}$$
Donc $F$ est injective.
- Rappel du théorème du rang : Si $f : E \mapsto F$ est linéaire et $\dim(F) < +\infty$, alors
$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(F)$$

Ici,
$$\begin{aligned} \dim(Im(F)) &= \dim(\mathbb{K}_n[X]) - \dim(Ker(F)) \\ &= n + 1 - 0 \\ &= n + 1 \end{aligned}$$
L'image de $F$ recouvre tout le domaine d'arrivée, $F$ est donc surjective.

Donc $F$ est bijective.

<u>Autre méthode :</u>

$$M = \underset{\mathcal{B}}{Mat}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M$ est inversible car c'est une matrice triangulaire supérieure avec aucun élément nul sur la diagonale. Or, on sait que si $M$ est inversible, alors $F$ est bijective.

On cherche $g : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \ tq \ \forall P \in \mathbb{K}_n[X], f(g(P)) = g(f(P)) = P$. On a
$$f(g(P)) = g(P) - (g(p))'$$
. Par linéarité, il suffit de conaître $g$ sur une base canonique. Posons $Q_k = g(X^k)$, on a $Q(X) - Q'(X) = X^k$. D'après l'exercice précédent, la solution de cette équation est
$$Q_k = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{X^i}{i!}$$

# 18 Polynômes II

## 18.1 Divisions Euclidiennes

**Enoncé :**

Réaliser les divisions suivantes :

1. Cors de base = $\mathbb{R}$ : $X^5 + 2X$ par $X^2 + 3$
2. Cors de base = $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ : $X^5 + 2X$ par $X^2 + 3$
3. Corps de base = $\mathbb{R}$ : $X^{263} + 1$ par $X + 1$

**Corrigé :**

Remarque :il est préférable de factoriser les polynômes avant de poser la division

1. $\begin{array}{rrr|l} X^5 & & +\ 2X & X^2 + 3 \\ \cline{4-4} & -\ 3X^3 & +\ 2X & X^3 - 3X \\ & & 11X & \end{array}$ Donc $X^5 + 2X = (X^2 + 3)(X^3 - 3X) + 11X$ dans $\mathbb{Z}$.
2. $\begin{array}{rrr|l} X^5 & & +\ 2X & X^2 + 3 \\ \cline{4-4} & -\ 2X^3 & +\ 2X & X^3 + 2X \\ & & X & \end{array}$ Donc $X^5 + 2X = (X^3 + 2X)(X^2 + 3) + X$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$.

   Remarque : Si tous les termes d'une égalité sont dans $\mathbb{Z}$, on peut appliquer le résultat de la division dans $\mathbb{Z}$ à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$
3. $X^{263} + 1 = (X+1)Q + R$ avec $d°(R) \leq 0 \Rightarrow R = cte$. On voit que $P(-1) = 0 = 0.Q(-1) + R(-1) \Rightarrow R = cte = 0$
   On sait que $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n)$ sur tout anneau commutatif.
   Donc $X^{263} + 1 = (X+1)(X^{262} - X^{261} + X^{260} + \ldots + X^2 - X + 1)$.

## 18.2 Calcul de restes

**Enoncé :**

Calculer le reste de la division du polunôme $P$ par le polynôme $(X-a)(X-b)$ en fonction de $\tilde{P}(a)$, $\tilde{P}(b)$ et $\tilde{P}'(a)$. Notation : $\tilde{P} = f_P$.

**Corrigé :**

On a $P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + R(X)$ avec $d°(R) \leq 1 \Rightarrow R = \alpha X + \beta, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

On a $\left| \begin{array}{l} P(a) = 0 + R(a) = \alpha a + \beta \\ P(b) = 0 + R(b) = \alpha b + \beta \end{array} \right.$. Deux possibilités :

- Si $a \neq b$, le sustème s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha a + \beta & = & P(a) \\ \alpha b + \beta & = & P(b) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{P(b)-P(a)}{b-a} \\ \beta & = & P(a) + \frac{P(b)-P(a)}{b-a} a \end{array} \right.$$

- Si $a = b$, le système se réduit ) $\left\{ \begin{array}{rcccl} \alpha a + \beta & = & P(a) & = & P(b) \\ \alpha a + \beta & = & P(b) & = & P(a) \end{array} \right.$ mais dans ce cas, on est entrain de diviser $P$ par $(X-a)^2$, c'est-à-dire de tester si $a$ est racine double. On dérive la division euclidienne et on obtient

$$P'(X) = (X-a)[2Q(X) + (X-a)Q'(X)] + R'(X) \qquad \text{avec} \qquad R'(X) = \alpha$$

En $X = a$, on obtient $P'(a) = 0 + R'(a) = \alpha$, d'où $\beta = P(a) - \alpha a = P(a) - P'(a)$

## 18.3 Factorisation et trigonométrie

Enoncé :

Factoriser avec comme corps de base $\mathbb{R}$ le polynôme $(X+i)^n-(X-i)^n$.

Corrigé :

$$\begin{aligned}(x+i)^n-(x-i)^n=0 &\iff (x+i)^n=(x-i)^n\\ &\iff \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n=1\end{aligned}$$

car $x-i\neq 0$ car $i$ n'est pas solution.

Donc $\frac{x+i}{x-i}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité qui ne peut valoir que 1. On essaie de résoudre $\frac{x+i}{x-i}=\xi^k$ avec $\xi$ racine de l'unité.

$$\begin{aligned}\frac{x+i}{x-i}=\xi^k &\iff \frac{x-i}{x-i}+\frac{2i}{x-i}=\xi^k\\ &\iff \frac{2i}{x-i}=\xi^k-1\\ &\iff \frac{x-i}{2i}=\frac{1}{\xi^k-1}\\ &\iff x=i\left(\frac{\xi^k+1}{\xi^k-1}\right)\\ &\iff x=i\frac{e^{\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2k\pi}{n}}-1}\\ &\iff x=i\frac{e^{\frac{2k\pi}{2n}}}{e^{\frac{2k\pi}{2n}}}\left(\frac{\overbrace{e^{\frac{2k\pi}{2n}}+e^{-\frac{2k\pi}{2n}}}^{=2\cos\frac{k\pi}{n}}}{\underbrace{e^{\frac{2k\pi}{2n}}-e^{-\frac{2k\pi}{2n}}}_{=2i\sin\frac{k\pi}{n}}}\right)\\ &\iff x=\frac{i}{i}cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\quad \text{pour}\quad k\in[\![1..n-1]\!]\end{aligned}$$

Le polynôme a donc $n-1$ racines :

$$P=\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

## 18.4 Ordre de multiplicité des racines

Enoncé :

Montrer que si un polynôme $P$ vérifie $P\wedge P'=1$ alors $P$ n'a que des racines simples.

Corrigé :

Si $P$ a une racine au moins double, alors $P\wedge P'\neq 1$. Soit $\alpha$ une racine d'ordre $\geq 2$ de $P$, on a $P=(X-\alpha)^2Q(X)$. En dérivant, on obtient $P'=(X-a)[2Q(X)+(X-a)Q'(X)]$. Donc $(X-\alpha)|P'$, de plus, $(X-\alpha)|P$, donc $P\wedge P'\neq 1$

$\alpha$ racine d'ordre $n$ de $P$ $\iff \begin{cases}(X-\alpha)^n|P\\ (X-\alpha)^{n+1}\nmid P\end{cases}$

### 18.5 Théorème de d'Alembert-Gauss

## Enoncé :

Soit $P'$ le polynôme $X^{256}+X^{192}-3X^{128}-3X^{64}$

1. En faisant un minimum de calculs, déterminer le nombre de racines et defacteurs de la décomposition de $P$ en facteurs irréductibles (rappel : lorsqu'un facteur ou une racine apparaît plusieurs fois, on compte avec leur ordre de multiplicité).
2. Se lancer dans les calculs et factoriser $P$ avec comme corps de base $\mathbb{R}$.

## Corrigé :

<u>Théorème de D'Alembert-Gauss :</u> tout polynôme de $\mathbb{C}$ de degré $\geq 1$ a au moins une racine complexe.
<u>Corollaire :</u> tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ a exactement $n$ racines dans $\mathbb{C}$

1. Dans $\mathbb{C}[X]$, on a 256 racines et 256 facteurs irréductibles de degré 1.
   Dans $\mathbb{R}[X]$, il y a 2 type de facteurs irréductibles :
   - $X-\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
   - $X^2+\alpha X+\beta, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \ tq \ \alpha^2-4\beta<0$

   On a

$$\begin{aligned} P &= X^{256}+X^{192}-3X^{128}-3X^{64} \\ &= X^{64}(X^{192}+X^{128}-3X^{64}-3X) \\ &= Q(Y) \quad \text{avec} \quad Y=X^{64} \end{aligned}$$

   On a

$$\begin{aligned} Q(Y) &= Y(Y^3+Y^2-3Y-3) \\ &= Y(Y+1)(Y^2-3) \\ &= Y(Y+1)(Y+\sqrt{3})(Y-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

   On a donc $P(X)=X^{64}(X^{64}+1)(X^{64}+\sqrt{3})(X^{64}-\sqrt{3})$.
   $X^{64}+1$ n'a pas de racine réelle : il n'a pas de facteur irréductible de degré 1 mais 32 facteurs irréductibles de degré 2, idem pour $X^{64}+\sqrt{3}$.
   Pour $X^{64}-\sqrt{3}$, on a

$$\begin{aligned} X^{64}-\sqrt{3} &= (X^{32}+\sqrt[4]{3})(X^{32}-\sqrt[4]{3}) \\ &= \underset{16 \text{ facteurs}}{(X^{32}+\sqrt[4]{3})}\underset{8 \text{ facteurs}}{(X^{16}+\sqrt[8]{3})}\underset{4 \text{ facteurs}}{(X^{8}+\sqrt[16]{3})}\underset{2 \text{ facteurs}}{(X^{4}+\sqrt[32]{3})}\underset{1 \text{ facteur}}{(X^{2}+\sqrt[64]{3})}\underbrace{(X+\sqrt[128]{3})(X-\sqrt[128]{3})}_{\text{facteurs de degré 1}} \end{aligned}$$

   Au total, $P$ a trois racines réelles : 0, $\sqrt[128]{3}$ et $-\sqrt[128]{3}$ avec des ordres de multiplicités respectifs de 64, 1 et 1. Il y a 66 facteurs irréductibles de degré 1 et 32+32+16+8+4+2+1=95 facteurs irréductibles de degré 2. On peut d'ailleurs vérifier que $d°(P)=95\times 2+66=256$