$2^{ème}$ Année ST Section F

Math 3 — Séries

Année 2012 - 2013 Semestre 1

Enseignant : LAADJ Toufik (TD G1 et G4)
Email : laadjt@gmail.com

Horaire : Samedi $11^h20 \to 12^h50$ Amphi L

Objectif du cours :

L'objectif du cours est l'etude des sommes infinies

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots$$

Contenu du cours :

- Séries numériques.
- Suites et séries de fonctions (Séries entières).
- Séries de Fourier

---

0) Rappel sur les suites numériques (Réelles)

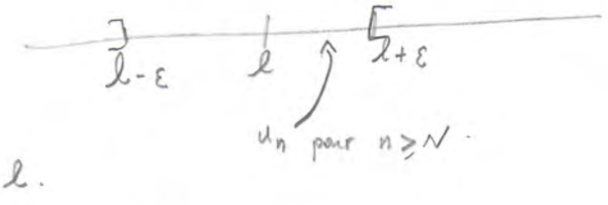
Une suite numérique est une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto f(n)$

. On note $f(n)$ par $u(n)$ ou u_n

. u_n est le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n)

. (u_n) converge vers une limite l si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ implique } |u_n - l| < \varepsilon$$



on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

- (u_n) diverge si elle ne converge pas ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mp\infty$

- Si la limite d'une suite existe elle est unique.

- Une suite réelle monotone et bornée converge.

- Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si (u_n) croissante, (v_n) décroissante,

$$u_n \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$$

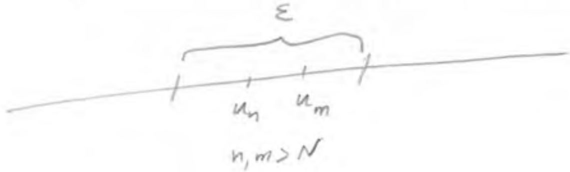
Théorème:

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite

Suites de Cauchy:

On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m > N \text{ implique } |u_n - u_m| < \varepsilon$$



Théorème:

Une suite (u_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy
(ssi)

- si (u_n) n'est une suite de Cauchy, elle diverge.

Chapitre 1 : Séries numériques.

1.1. Généralités :

Soit (u_n) une suite de nombre réels, on pose

$$S_0 = u_0$$
$$S_1 = u_0 + u_1$$
$$\vdots$$
$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- $(S_n)_n$ est appelée suite des sommes partielles.
- La limite de S_n est appelée série de terme général u_n.

Notation : Une série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Définition ;

- Si $(S_n)_n$ est convergente vers S, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite convergente et S est sa somme

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

- Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.

Le nombre $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ est le reste d'ordre n.

Exemples :

1. Série géométrique. Le terme générale de la série géométrique $u_n = a \cdot r^n$ $\quad a \neq 0$

La somme partielle $S_n = \begin{cases} a\,\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & r \neq 1 \\ a(n+1) & r = 1. \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ est convergente si } |r| < 1 \text{ et divergente si } |r| \geq 1.$$

2. Série harmonique. Le terme générale $u_n = \frac{1}{n}$. $\quad n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente, on écrit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. $\quad S_n = u_1 + u_2 + \dots = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente et sa somme $S = 1$, on écrit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$

Condition nécessaire de convergence.

. Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente, mais elle vérifie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
la condition n'est pas suffisante)

Remarque:

. si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors $\sum_{n=0} u_n$ diverge.

Properiétés:

Proposition:

Si les séries $\sum_{n=0} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, alors les deux séries sont de même nature. En cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.

Corollaire.

On ne change pas la nature d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.

Proposition:

Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = v$ sont convergents. Alors

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha u_n + \beta v_n$ converge $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n + \beta v_n = \alpha u + \beta v$.

Définition (Critère de Cauchy)

Une série est dite de Cauchy si la suite des somme partielles est de Cauchy i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq q \geq N \Rightarrow |S_p - S_q| < \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq q \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=q+1}^{p} u_k \right| < \varepsilon.$$

1.2 Séries à termes positifs.

Définition:

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite série à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$.

Proposition:

Une série à termes positifs $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge ssi $(S_n)_n$ est majorée.

Théorème. (Règle de comparaison).

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors: 1. $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge.

Exemple: $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

On a

$0 \leq \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, alors

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.

Théorème (Règle de comparaison logarithmique)

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ deux séries à termes positifs.

on suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge

2. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge

Théorème. (critère d'équivalence).

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs.

On suppose que $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$, $\ell \neq 0$ et $\ell \neq +\infty$. Alors

les deux séries sont de même nature.

Exemple 1 :

Soient les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ tels que $u_n = \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ et $v_n = \frac{3}{2^n}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{3}$, et comme $\sum v_n$ est convergent alors $\sum u_n$ l'est aussi.

Exemple 2 :

Soient les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ tels que $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. La série $\sum u_n$ est la série harmonique qui est divergente, donc il en est de même de $\sum v_n$

Théorème (comparaison avec une intégrale)

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue, décroissante et positive.

On pose $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ existe.}$$

Exemple :

1) Considérons l'application $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$

On a $\int_1^t \frac{1}{x}dx = \mathrm{Log}\, t$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = +\infty$, Donc $\sum \frac{1}{n}$ diverge

2) Soit la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$. f est continue, décroissante et positive. $\int_1^t f(x)dx = \mathrm{Log}\frac{t}{t+1} - \mathrm{Log}\left(\frac{1}{2}\right)$ et comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t f(x)dx = \mathrm{Log}\, 2 < +\infty$,

la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est alors convergente.

Séries de Riemann :

Définition : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarquons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$. On conclut que si $\alpha \leq 0$, la série de Riemann est divergente puisque le terme générale ne tend pas vers 0.

Si $\alpha = 1$, on obtient la série harmonique qui est divergente

Examinons le cas $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

Soit la fonction $f_\alpha : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, f_α est positive continue décroissante

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

On a $\displaystyle\int_1^t f_\alpha(x)\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(t^{-\alpha+1} - 1\right)$

$$\to \lim_{t \to \infty} \int_1^t f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0<\alpha<1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

<u>Proposition:</u>

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

<u>Proposition (Règle de Riemann)</u>

Soit $\sum u_n$ une série à termes positives. $(n^\alpha u_n \leq M)$

Soit la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit majorée par $M > 0$, alors

1 s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit majorée par $M>0$, alors

$\sum u_n$ est convergente.

$(n^\alpha u_n \geq m)$

2 s'il existe $\alpha \leq 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit minorée par $m > 0$, alors la série $\sum u_n$ est divergente

<u>Corollaire:</u>

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = l$, $l \neq 0$ et $l \neq +\infty$.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.

<u>Critère de D'Alembert;</u>

<u>Proposition:</u> Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs

Posons $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

1. $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.
2. $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge
3. $l = 1$, on peut rien conclure.

Exemple:

1) soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$ La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ est convergente.

2) Soit la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

On a $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

et par suite la série est divergente.

Critère de Cauchy

Proposition (Critère de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Posons $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

1. $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.
2. $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.
3. $l = 1$ on ne peut rien conclure.

Exemple

Soit la série de terme général $\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, avec $a > 0$, $p > 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} a + \frac{1}{n^p} = a$$

La série est convergente pour $a < 1$ et divergente pour $a > 1$ en utilisant critère de Cauchy

Si $a = 1$, on ne peut rien conclure

Mais on a $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < p < 1 \\ e & \text{si } p = 1 \\ 1 & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

Le terme général ne tend pas vers zéro, la série est divergente.

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

On n'a pas l'équivalence.

Critère de Râab

Proposition:

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$

1. si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge
2. si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge
3. si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

1.3 Séries à termes quelconques:

Critère D'Abel:

Proposition:

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques. On suppose qu'il existe

deux suites (a_n) et (b_n) telles que:

1. $u_n = a_n \cdot b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Il existe $M>0$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$

$$p \geq q \Rightarrow \left| \sum_{k=q}^{p} b_k \right| \leq M$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n - a_{n-1}|$ converge.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemple: Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Soit $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = (-1)^n$, $u_n = a_n b_n$

- $\left|\sum\limits_{k=q}^{p} b_k\right| = \begin{cases} \text{ou } -1 \\ \text{ou } 0 \\ \text{ou } 1 \end{cases} \longrightarrow \left|\sum\limits_{k=q}^{p} b_k\right| \leq 1 = M$ • $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- La série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right| = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \sim \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente

Alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Série alternées :

Définition :

On appelle série alternée toute série $\sum u_n$ vérifiant $u_n u_{n+1} \leq 0$.

Le terme général u_n d'une série alternée peut être noté $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} v_n$

avec $v_n \geq 0$.

Dans le cas général, une série alternée sera souvent notée : $\sum (-1)^n |u_n|$

Proposition (critère de Leibniz)

Soit $\sum u_n$ une série alternée. On suppose que

1. La suite $(|u_n|)_n$ est décroissante
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

1.4 Séries absolument convergentes :

Définition :

Une série est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

- Il est clair que toute série à termes positifs convergente est absolument convergente.

Théorème :

Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

En d'autre termes : $\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge.

- Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de considérer la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ on a :

1. $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente
2. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$

Remarque :

Le théorème précédent cesse d'être vrai si la série $\sum u_n$ est seulement convergente.

Exemple :

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

On a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \cdots\cdots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)}\right) + \cdots$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)}\right) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

En réorganisant autrement la somme de cette série convergente, on obtient une série convergente mais pas de même somme.

(L'addition d'une infinité de termes n'est nécessairement commutative).

Cette même série, si on regroupant ses termes d'une autre façon, on peut avoir une série divergente.

- Exemple d'une série convergente mais non commutativement convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Chapitre 2 : Suites et séries de fonctions.

1) Suites de fonctions :

Soit (a,b) un intervalle dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \mathcal{F}((a,b), \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions de (a,b) dans $\mathbb{R}$

Définition :

Une suite de fonctions dans F est une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow F$, $n \longmapsto f_n$.

f_n : le terme générale de la suite $(f_n)_n$

Exemple : $(a,b) = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Définition (convergence simple)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans F définie sur (a,b).

On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers $f \in F$ sur (a,b) si pour tout $x_0 \in (a,b)$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

Exemple :

$f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ converge simplement vers $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

Définition (convergence uniforme)

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur (a,b)

si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$.

Exemple : $(a,b) = [0,+\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$

(f_n) converge simplement vers $f(x) = x$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}\cdot\frac{nx}{1+nx} \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

$\rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\rightarrow (f_n)$ converge uniformément vers $f(x) = x$.

2) Séries de fonctions :

Soit (f_n) une suite de fonctions dans F.

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dite une série de fonctions dont le terme général f_n.

Définition.

- On dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge en x_0 si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dite simplement convergente sur (a,b), si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge pour tout x dans (a,b).
- Domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $D = \left\{ x \in (a,b) / \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$.

Exemple :

Trouver le domaine de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

On note que $|f_n(x)| \leq |x|^n$.

Pour $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^n$ converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ elle converge.

Pour $x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série convergente

Pour $x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est une série divergente

Pour $|x| > 1$: $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^n}{n} = +\infty$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ diverge pour $|x| > 1$.

Alors : $D = [-1, 1[$.

Définition :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série de fonctions converge simplement vers S sur (a,b)

et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers S sur (a,b) ssi (S_n) converge uniformément vers S dans (a,b).

Chapitre 3 : Séries entières.

1. Séries entières :

Définition : On appelle série entière toute série de fonction $\sum f_n$ dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$, ou (a_n) désigne une suite réelle.

Une série entière est notée $\sum a_n x^n$.

Comme pour les séries de fonctions, on cherche le domaine de convergence

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

Exemple 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et appliquons le critère de D'Alembert

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0.$$ La série entière est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $D = \mathbb{R}$

Exemple 2 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ on a $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 x \right| = |x|$

si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Pour le cas où $|x| = 1$. On a $|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2}$ est alors absolument convergente dans $[-1, 1]$, et alors $D = [-1, 1]$.

Exemple 3. $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$

Cette série ne converge que si $x=0$ car $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|(n+1)x\right|$

et la limite n'existe que si $x=0$, d'où $D=\{0\}$.

Exemple 4: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. On a $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n}{n+1}x\right| = |x|$

. si $|x|<1$, la série est absolument convergente et si $|x|>1$ la série diverge.

Pour le cas où $|x| = 1$

$x = 1$: c'est la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, elle est divergente

$x = -1$: c'est la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, elle est convergente.

D'où $D = [-1, 1[$

Lemme d'Abel.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)$ soit bornée. Alors :

1. La série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$
2. La série $\sum a_n x^n$ est normalement convergente pour $|x| < r$, pour tout r tel que $0 < r < |x_0|$.

2. Rayon de convergence d'une série entière.

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

Théorème Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière, alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ ou $R = +\infty$ tel que

1. $\sum a_n x^n$ converge absolument dans $]-R, R[$.
2. $\sum a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.

Définition :

Le nombre $R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ : \sum |a_n| r^n \text{ converge} \right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

Remarque : Le rayon de convergence d'une série $\sum a_n x^n$ est caractérisé par :

1. $|x| < R \Rightarrow \sum a_n x^n$ est absolument convergente.
2. $|x| > R \Rightarrow \sum a_n x^n$ diverge.
3. $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.

Détermination du Rayon de convergence.

Lemme (d'Hadamard)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Exemples :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On a $a_n = \frac{1}{n!}$, utilisons le critère D'Alembert :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ donc } R = +\infty.$$

La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. On a $\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Le rayon de convergence $R = 1$.

La série est absolument convergente pour $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$.

Pour $|x| = 1$ ie $x = 1$ ou $x = -1$ La série converge.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$. Le critère de Cauchy donne :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}, \text{ le rayon de convergence } R = 2.$$

La série est absolument convergente pour tout $|x| < 2$ et divergente si $|x| > 2$.

<u>Remarque :</u> Soit φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum a_n x^{\varphi(n)}$ est une série entière. On commence par calculer directement la limite suivante :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}\, x^{\varphi(n+1)}}{a_n\, x^{\varphi(n)}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \lim_{n\to+\infty} |x|^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$$

puis chercher le domaine de x où $\ell < 1$ où notre série converge.

<u>Exemple :</u> Trouver le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^{2n+5}$

Dans notre cas $\varphi(n) = 2n+5$

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{3^{n+1}\, x^{2n+7}}{3^n\, x^{2n+5}} \right| = 3|x|^2$$

La série converge si $3|x|^2 < 1 \rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et diverge si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Properiétés.

- <u>Continuité d'une série entière</u>

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit

$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,

f est alors continue.

- <u>Dérivée d'une série entière</u>

<u>Définition.</u> Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. On la note $f'(x_0)$.

<u>Définition.</u> Une fonction est dite de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si ses dérivées d'ordre inférieure ou égal à n sont des fonctions continue sur I.

<u>Proposition.</u>
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit

$f :]-R, R[\longrightarrow$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors

f est dérivable et on $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Corollaire

Soit la série $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R ; f est indéfiniment dérivable $\left(f \in C^{\infty}(]-R,R[)\right)$ et on a

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\text{i.e.} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

. Primitive d'une série entière.

Definition. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive s'il existe une fonction $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $F' = f$ (D étant le domaine de definition de f)

Proposition.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $f :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f admet une primitive $F :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

• Opérations pour les séries entières.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ deux séries entières ayant respectivement R et R' pour rayon de convergence.

1. Si $R \neq R'$, le rayon de convergence R'' de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ est $R'' = \min\{R, R'\}$.

2. Si $R = R'$ le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) x^n$ est $R'' \geq R$.

Exemple. Soient les deux séries entières $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$.

Les deux séries ont pour rayon de convergence $R = 1$.

Par contre la série somme $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, a pour rayon de convergence $R'' = 2$.

4. Séries de Taylor.

Définition.

Soit f une fonction réelle à variable réelle x.

On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 s'il existe une suite réelle (a_n) et $r>0$ tels que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \forall x \in]x_0-r, x_0+r[$

Proposition.

Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il <u>est nécessaire</u> qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0-r, x_0+r[$ de x_0

et dans ce cas on a $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Proposition

Soit $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ dans un voisinage de 0.

On suppose qu'il existe $M>0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]-r, r[$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Alors la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in]-r, r[.$$

Exemples.

- La fonction exponentielle : $f(x) = e^x$, $\quad f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R = +\infty$$

- Les fonctions hyperboliques

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad R = +\infty$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = +\infty$$

- Les fonctions circulaires.
  - $f(x) = \sin(x) \rightarrow f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = -\sin x \rightarrow f''(0) = 0$, $f'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1$

$$\rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad R = +\infty$$

  - $g(x) = \cos x$

$$\cos(x) = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad R = +\infty$$

- La série du binôme.

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{son domaine de définition } D =]-1, +\infty[$$

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \to f'(0) = \alpha, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \to f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\ldots \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$\to f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Alors

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad R = 1$$

Application:

- $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\to f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \ldots (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots 2n} x^n$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$$

- $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots 2n} x^n$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \ldots$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \ldots 2n} x^2 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \ldots$$

Par intégration

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \ldots$$

- La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$

on remarque que pour $|x| < 1$: $1 + x + x^2 + \ldots x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$\to 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

D'où

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad R = 1.$$

Par intégration

$$\operatorname{Log}(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad R = 1$$