Chapitre 4 : Séries de Fourier

Séries trigonométriques

Définition. On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega x\right)+b_n\sin\left(n\omega x\right)\right] \tag{1}$$

avec $x\in\mathbb{R}$, $\omega>0$, $a_n,b_n\in\mathbb{R}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$. ■

Le problème est de déterminer l'ensemble D tel que la série (1) soit convergente pour tout $x\in D$.

Remarque. Supposons que la série (1) converge en x dans D et posons

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega x\right)+b_n\sin\left(n\omega x\right)\right].$$

Alors la série (1) converge en tout point de la forme $x+\dfrac{2k\pi}{\omega},\ k\in\mathbb{Z}$ et $f\left(x\right)=f\left(x+\dfrac{2k\pi}{\omega}\right)$; et par suite la fonction f est périodique de période $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. ■

Proposition. Si les séries numériques $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique (1) est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. ■

Proposition. Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1) est convergente pour $x\neq\dfrac{2k\pi}{\omega},\ k\in\mathbb{Z}$. ■

Représentation complexe d'une série trigonométrique

D'après les relations d'Euler :

$$\cos\left(n\omega x\right)=\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}\quad\text{et}\quad\sin\left(n\omega x\right)=\frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i},$$

et en posant

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\overline{c_n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\quad\text{et}\quad c_0=\frac{a_0}{2},$$

la série (1) devient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega x}.$$

Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique.

Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \right].$$

Alors

$$f(x)\cos(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega x)\cos(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\cos(n\omega x) \right],$$

$$f(x)\sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega x)\sin(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\sin(n\omega x) \right].$$

En intégrant et en utilisant la convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et les relations suivantes :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \dfrac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n, \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \dfrac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n, \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx = 0,$$

on déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \qquad b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par un changement de variable, ces coefficients peuvent s'écrire

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \qquad b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions 2π-périodique

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas complexe

On a $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$. Les coefficients dans ce cas, sont donnés par la relation :

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\, e^{-in\omega x} dx = \frac{\omega}{2\pi} \int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\, e^{-in\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$. On suppose que $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|\, dt$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition. On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque.

- Si la fonction f est paire $a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$ et $b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.
- Si la fonction f est impaire $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

Deux questions se posent :

1. La série de Fourier associée à f est-elle convergente?
2. En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f?

Théorème (de Dirichlet).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :

D1) En tout point x_0, les limites de f à droite et à gauche de x_0 existent et les discontinuité de f sont en nombre fini dans tout intervalle fini.

D2) f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]=\begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}.$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue. ∎

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.

Exemple 1. Soit $f:]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T=2\pi$ définie par $f(x)=x$.

1. Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ et $f(x_k+0)=-\pi$, $f(x_k-0)=\pi$.

2. f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi-0)}{x-\pi}=1 \text{ et } \lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi+0)}{x-\pi}=1.$$

   f vérifie les conditions de Dirichlet, donc développable en série de Fourier.

f est impaire donc $a_0=a_n=0$ et $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin(nx)\,dx=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et par suite

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx). \quad ∎$$

Exemple 2. Soit $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique, $T=2\pi$ définie par $f(x)=|x|$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et partout dérivable sauf aux points $x_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ où

$$\lim_{x\to k\pi^-}\frac{f(x)-f(k\pi-0)}{x-k\pi}=(-1)^{k+1} \text{ et } \lim_{x\to k\pi^+}\frac{f(x)-f(k\pi+0)}{x-k\pi}=(-1)^{k}.$$

f satisfait les conditions de Dirichlet, donc développable en série de Fourier. De plus f est paire, ce qui nous donne $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx\Rightarrow\begin{cases} a_{2n}=0, \\ a_{2n+1}=\dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2}. \end{cases}$$

La série de Fourier converge alors vers f et on a $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$.

Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \qquad \blacksquare$$

Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

Remarque. (Développement en série de Fourier de fonctions non périodiques)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction non périodique définie sur l'intervalle $[a, b]$, on prolonge f en une fonction g périodique de période $T \geq b - a$ telle que la fonction g satisfait les conditions de Dirichlet.

Exemple 3.

Donner une série de Fourier de période 2π qui coïncide sur $]0, \pi[$ avec la fonction $f(x) = e^x$.

a) Choisissons un prolongement pair et posons $f_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\end{cases}$.

Dans ce cas les coefficients sont $a_0 = 2\dfrac{e^\pi - 1}{\pi}$, $a_n = 2\dfrac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1}$ et $b_n = 0$.

b) Choisissons un prolongement impair et posons $f_2(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ -e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\end{cases}$.

Dans ce cas les coefficients sont $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = 2n\dfrac{1 - (-1)^n e^\pi}{\pi(n^2+1)}$.

c) Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons $f_3(x) = e^x$ si $x \in]-\pi, \pi[$.

On a le résultat final :

$$\begin{aligned} \sigma f_3(x) &= \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\left[\cos(nx) - n\sin(nx)\right]\right) \\ &= \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \in]-\pi, \pi[\\ \dfrac{e^\pi + e^{-\pi}}{\pi} & \text{si} \quad x = \pm\pi \end{cases}. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Théorème (Égalité de Parseval)

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} > 0$, alors on a

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(f(x))^2\,dx. \qquad \blacksquare$$

Exemple 4. f étant une fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ -1 & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\end{cases}$.

f étant une fonction impaire donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx)\, dx = \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right) \Rightarrow \begin{cases} b_{2n} = 0, \\ b_{2n+1} = \dfrac{4}{\pi(2n+1)}. \end{cases}$$

La série de Fourier associée est : $\sigma f(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases}$.

- Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$ on a $\sigma f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On tire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}.$$

- Appliquons l'égalité de Parseval : $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi (f(x))^2\, dx = 2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et l'on tire donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}.$$

- Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ série convergente d'après le critère de Riemann. En séparant les pairs et les impairs on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow S - \frac{1}{4} S = \frac{\pi^2}{8}.$$

On tire alors

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}.$$