U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 1 **Math 3 : Séries**

Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section F**

Examen finale - 13 janvier 2013. Durée : 90 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (5 points) : Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{-n}+1} \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n}$$

Réponse.

==

Exercice 2 (5 points) :

a) Calculer le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \left]-R, R\right[$.

Montrer que $f(x) = 8x^2 g''(2x) + 4x g'(2x) + 2g(2x)$.

c) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)\, 2^{n+1} x^n$. *Indication*. Noter que $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Réponse.

==

Exercice 3 (5 points) : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \sin x$.

a) Montrer que la dérivée $n^{ième}$ de f est $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

Indication. Noter que $\sin a + \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) En déduire le développement en séries entières de f et donner son domaine de convergence.

Réponse.

==

Exercice 4 (5 points) : Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \in \left]-\pi, 0\right], \\ 2 & \text{si} \quad x \in \left]0, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) Écrire la série de Fourier σf associée à f et étudier sa convergence sur $]-\pi, \pi[$.

c) En déduire la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

d) En appliquant l'égalité de Parseval $\displaystyle\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Réponse.