U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 1 **Math 3 : Séries**

Faculté de Mathématiques **2ème Lic, ST-GP, Section F**

Série d'exercices N° 0 : Rappel sur les suites numériques réelles

Exercice 1 : Pour tout entier naturel $n > 1$ on pose $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

a) Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

b) En déduire que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n < 1$.

a) On définie la suite (v_n) par : $v_n = \prod_{i=0}^{n} u_i \quad n \in \mathbb{N}$. Étudier la nature de (v_n).

b) On suppose maintenant qu'il existe un réel $q > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n < q < 1$.

Calculer $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

c) Soit (a_n) une suite à termes positifs et bornée. On définit la suite (w_n) par :

$$\begin{cases} w_0 = a_0 \\ w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k^k \qquad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Étudier la nature de la suite (w_n).

Exercice 3 : Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \quad ; \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.