

Série d'exercices N° 1 : Séries numériques

Exercice 1 : Soient les deux suites (u_n) et (v_n) , on suppose que pour tout n dans \mathbb{N}

$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

a) Montrer que la suite (v_n) et la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sont de même nature.

b) Application : Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \text{Log} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

Exercice 2 : Étudier la convergence des séries numériques suivantes en calculant leur somme.

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Exercice 3 : Établir la divergence des séries suivantes :

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} n! \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Exercice 4 : Trouver la nature de la série $\sum u_n$ qui a pour terme général u_n en utilisant le critère indiqué.

a) Critère de comparaison 1) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 2) $u_n = \sin \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$ 3) $u_n = e^{-\sin \frac{\pi}{n}}$ 4) $u_n = \text{Log} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right).$

b) Critère d'Alembert 1) $u_n = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{n! 3^n}$ 2) $u_n = \frac{n^n}{n!}$ 3) $u_n = n^3 \sin \frac{\pi}{3^n}$ 4) $u_n = \frac{a^n}{n^n}, a > 0.$

c) Critère de Cauchy 1) $u_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ 2) $u_n = 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ 3) $u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n} a^n, a > 0.$

Exercice 5 : Étudier les séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}, a > 0, \alpha \in \mathbb{R} \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + n}{a^n}, a > 0 \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{-\sqrt{n}}, \alpha \in \mathbb{R} \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 + n}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{-n^2}, a > 0 \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad 7) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0 \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\text{Log} n}, a > 0.$$

Exercice 6 : Étudier la convergence absolue et la semi-convergence des séries suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha n)}{n^2}, \alpha \in \mathbb{R} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \text{Log} n} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n} \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(n\pi + \frac{1}{n} \right).$$