**U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 1** — **Math 3 : Séries**

**Faculté de Mathématiques** — **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section F**

## Série d'exercices N° 2 : Séries de fonctions - Séries entières

**Exercice 1 :** Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}.$$

**Exercice 2 :** Étudier la convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n} \quad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Log} x)^n \quad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \quad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right).$$

**Exercice 3 :** Déterminer le rayon de convergence et la nature pour $x = \pm R$ des séries entières suivantes :

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-3n} x^n \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right) x^n$$

$$4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(2n+1)} \qquad 5)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n} x^n \qquad 6)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n,\ a > 0.$$

**Exercice 4 :** Donner le domaine de convergence des séries entières suivantes :

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^{2n+1} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+n} x^{3n-1}.$$

**Exercice 5 :** Calculer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \quad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n \quad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n!} x^n \quad 4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n.$$

**Exercice 6 :** Donner le développement en séries entières des fonctions suivantes et donner le domaine de convergence.

$$1)\ f(x) = \frac{2}{x^2-4x+3} \quad 2)\ f(x) = \operatorname{Log}(1-4x^2) \quad 3)\ f(x) = e^x \sin x \quad 4)\ f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$