

Série d'exercices N° 3 : Séries de Fourier**Exercice 1 :**

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x \in ]-\pi, 0[, \\ 1 - x & \text{si } x \in ]0, \pi[. \end{cases}$$

a) Représenter  $f$  sur 2 périodes.

b) Écrire la série de Fourier associée à  $f$ .

c) En déduire les sommes des séries numériques  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, \pi[$  par  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ .

a) Écrire la série de Fourier associée à  $f$ .

b) En déduire les sommes  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

**Exercice 3 :**

Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique, impaire, définie par

$$f(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi].$$

En déduire les sommes des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ .

**Exercice 4 :**

Déterminer le développement en série de Fourier pour la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique définie sur

$[-\pi, \pi]$  par  $f(x) = e^{ax}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

En déduire la valeur des sommes  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .