U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 1 **Math 3 : Séries**

Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section F**

Série d'exercices pour se préparer à l'examen finale

Exercice 1 : Donner la nature des séries numériques suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)\qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}ne^{-\sqrt{n}}\qquad 4)\ \sum_{n=0}^{\infty}ne^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 2 : Étudier la convergence des séries numériques suivantes en calculant leur somme.

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{3^n}\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}\qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\,(n+1)^2}\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 3 : Déterminer le rayon de convergence et la nature pour $x=\pm R$ des séries entières suivantes :

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n\qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}x^n\qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)x^n\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+n}x^{2n-1}.$$

Exercice 4 : Calculer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n+1}\qquad 2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}x^n\qquad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}x^n.$$

Exercice 5 :

a) Calculer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!}x^n$.

b) On pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!}x^n$ et $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in\,]-R,R[$.

Montrer que $f(x)=(x^2+5x-1)\,g(x)$.

Indication. Noter que $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{n!}$.

c) En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!}x^n$. *Indication*. Noter que $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

Exercice 6 : Donner le développement en séries entières des fonctions suivantes et donner le domaine de convergence.

$$1)\ f(x)=\frac{3}{1+x-2x^2}\quad 2)\ f(x)=\mathrm{Log}\,(1-x^2)\quad 3)\ f(x)=(x^2+1)\,e^x\quad 4)\ f(x)=e^x+\sin x.$$

<u>Exercice 7</u> :

Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left]-\pi, 0\right], \\ x & \text{si} \quad x \in \left]0, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) Écrire la série de Fourier σf associée à f.

c) En déduire les sommes des séries numériques $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

<u>Exercice 7</u> :

Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \left]0, \pi\right[, \\ -1 & \text{si} \quad x \in \left]-\pi, 0\right[. \end{cases}$$

a) Représenter f sur 2 périodes.

b) Calculer sa série de Fourier σf et étudier sa convergence.

c) En déduire les sommes des séries numériques $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.