

Nom : Matricule :

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (8 points) :

a) Calculer le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^2 x^n$ et étudier sa convergence en $x = R$ et $x = -R$.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^2 x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in]-R, R[$.

Montrer que $f(x) = g(x) + 3xg'(x) + x^2g''(x)$.

c) En déduire la somme $\sum_{n=1}^{\infty} (1+n)^2 x^n$. *Indication.* Noter que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 2 (7 points) :

a) Donner le développement en séries entières de $f(x) = (1+x)e^x$ et donner son domaine de convergence.

b) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{n!} 2^n x^n$.

Réponse.