U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 2 | **Math 4 : Analyse complexe**
Faculté de Mathématiques | **2$^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section D**

Examen final - 01 juin 2014. Durée : 1 heure 30 minutes

Nom et Prénom :.. ....

Matricule :.. **Groupe :**..

===

Exercice 1 (4 points) :

a) Montrer que la fonction $u = x^2 - y^2 + x$ est harmonique.

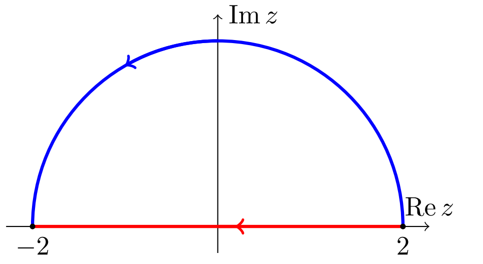
b) Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.

c) Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z.

Réponse.

===

Exercice 2 (5 points) :



a) Calculer $\displaystyle\int_C \left(2\overline{z} + 3\,|z|^2\right) dz$ le long

1. du cercle $|z| = 2$ de $(2, 0)$ à $(-2, 0)$ dans le sens direct,

2. du segment de droite joignant $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.

b) Expliquer pourquoi ces deux intégrales sont différentes.

Réponse.

==

<u>**Exercice 3 (5,5 points)**</u> **:** On considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 + 5iz - 2}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en tous les pôles.

b) Par application du théorème des résidus, calculer $\displaystyle\int_C \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2} dz$,

où C désigne le cercle $|z| = 1$ dans le sens direct.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\sin\theta} d\theta$. *Indication* : Poser $z = e^{i\theta}$, d'où $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

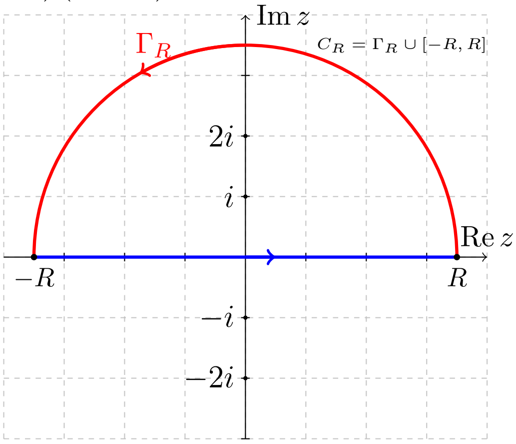
Réponse.

==

Exercice 4 (5,5 points) : On considère la fonction $f(z) = \dfrac{3}{(z^2+1)(z^2+4)}$.

a) Trouver les résidus de $f(z)$ en **tous les pôles**.

b) Par application du théorème des résidus calculer $\displaystyle\int_{C_R} \frac{3}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$, où C_R désigne le contour fermé de la figure ci-contre formé du demi cercle Γ_R et du segment $[-R, R]$, décrit dans le sens direct.



c) En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

Réponse.