Titre ici par exemple : Résolution formelle des équations différentielles

NOM1 Prénom1 et NOM2 Prénom2

Résumé

Dans ce projet de Licence nous présenterons brièvement les équations différentielles et leurs solutions en utilisant le logiciel du calcul formel Maple.

Le premier chapitre est consacré pour les équations différentielles, en particulier, le problème de Cauchy, solutions maximales et globales et quelques types d'équations différentielles. Dans le deuxième chapitre, l'objet est de résoudre les équations différentielles ordinaires en utilisant Maple, notamment les opérateurs `Diff` et `diff`, la commande `dsolve` et `plot`.

Mots-clés : Équations différentielles, logiciel du calcul formel, Maple, dsolve.

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail à

nos ***très chers parents,***

nos frères,

et nos sœurs.

Remerciements

*Avant tout nous remercions **Allah** le tout puissant qui nous a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.*

*Nous tenons en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à notre encadreur Monsieur **LAADJ Toufik**, pour son aide, sa patience et le soutien moral qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de la réalisation de ce travail.*

*Nous présentons tous nos respect et nos sincères remerciements à Monsieur **AAAA Bbbb**, d'avoir bien voulu examiner notre travail.*

Nous ne saurions pas oublier de remercier tous nos professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir, nos derniers mots de remerciements vont tout naturellement à nos familles et nos amis.

Table des matières

Introduction

Un système de calcul formel (Computer Algebra System ou CAS en anglais) est un logiciel qui permet de calculer les expressions mathématiques d'une manière similaire aux calculs manuels traditionnels de mathématiciens et de scientifiques. Le développement des systèmes de calcul formel dans la seconde moitié du 20ème siècle est le cadre de la discipline de "l'algèbre informatique" ou "calcul symbolique", qui a stimulé le travail dans les algorithmes sur des objets mathématiques [8].

Les expressions manipulées par un système de calcul formel incluent typiquement des polynômes en plusieurs variables; fonctions standard (sinus, exponentielle, etc.); fonctions spéciales (Γ, ζ, erf, fonctions de Bessel, etc.); fonctions d'expressions arbitraires; optimisation; dérivées, intégrales, simplifications, des sommations, des produits des expressions; séries, matrices, et ainsi de suite. Domaines numériques supportés comprennent généralement réel et complexe [8].

Les systèmes de calcul formel ont commencé à apparaître dans les années 1960. Les premiers systèmes de calcul formel populaires étaient muMATH, Reduce, Derive, et Macsyma. En date d'aujourd'hui, les systèmes commerciaux les plus populaires sont Mathematica et Maple, qui sont couramment utilisés par les mathématiciens, les scientifiques et les ingénieurs [8].

Dans ce manuscrit, nous adopterons Maple(1980), qui permet de réaliser un nombre remarquable d'opérations en particulier la résolution des équations différentielles.

Dans ce projet de Licence, nous discuterons la résolution des équations différentielles ordinaires avec le Maple. Le premier chapitre est consacré pour les équations différentielles, en particulier, le problème de Cauchy [1], solutions maximales et globales, et quelques types d'équations différentielles [5]. Dans le deuxième chapitre, l'objet est de résoudre les équations différentielles ordinaires en utilisant le logiciel de calcul formel **Maple**, notamment les opérateurs `Diff` et `diff` [9], la commande `dsolve` et `plot` [10].

Chapitre 1

Rappels sur les équations différentielles

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est de présenter un bref aperçu des notions de base des équations différentielles, tels que le problème de Cauchy, solutions maximales et globales, et quelques types d'équations différentielles. Pour plus de détails à ce sujet, le lecteur est renvoyé, par exemple, aux références [1] et [5].

1.1 Préliminaire

La plupart des modèles différentiels se présentent sous la forme suivante :

$$y^{(n)}(t) = F(t,\ y(t),\ y^{'}(t),\ y^{''}(t), \ldots,\ y^{(n-1)}(t)). \tag{1.1}$$

L'entier n est l'ordre de l'équation. La fonction inconnue y est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^k$, de même que ses dérivées successives $y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}$. La fonction F est une fonction de $n+1$ variables. La variable t est réelle, et représente le temps. Les variables suivantes peuvent être vectorielles. Le problème consiste à trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $y : I \to \mathbb{R}^k$, dérivable jusqu'à l'ordre n et vérifiant (1.1) pour tout $t \in I$ [6].

Définition 1 (Équation Différentielle Ordinaire) *Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées $y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}$ au point t définie par*

$$\left(F(t,\ y(t),\ y^{'}(t),\ y^{''}(t), \ldots,\ y^{(n)}(t))\right) = 0 \ \left(\textit{on notera } F(t,\ y,\ y^{'},\ y^{''}, \ldots,\ y^{(n)}) = 0\right). \tag{1.2}$$

On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

......

......

1.2 Résultats d'existence et d'unicité pour les EDO

1.2.1 Introduction et terminologie

1.2.2 Existence et unicité pour le problème de Cauchy

Existence et unicité globale

Existence et unicité locale

1.3 Prolongement des solutions

1.3.1 Rappel sur le théorème de Péano

1.4 Équations différentielles du premier ordre

1.4.1 Équations homogènes (sans second membre)

1.4.2 Équations avec second membre

1.4.3 Recherche d'une solution particulière

Méthode de variation de la constante

Le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants pour des seconds membres $b(t)$ spécifiques

Le cas $y' + ay = p\,(t)\,e^{kt}$:

Le cas $y' + ay = p\,(t)\ \mathrm{Ch}\,(kt)$ ou $y' + ay = p\,(t)\ \mathrm{Sh}\,(kt)$:

1.5 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

1.5.1 Équations homogènes (sans second membre)

1.5.2 Équations avec second membre

1.5.3 Recherche d'une solution particulière

Équations $ay'' + by' + cy = p(t)\cos(kt)$ **ou** $ay'' + by' + cy = p(t)\sin(kt)$ **:**

Équations $ay'' + by' + cy = p(t)\,\mathrm{Ch}(kt)$ **ou** $ay'' + by' + cy = p(t)\,\mathrm{Sh}(kt)$ **:**

Chapitre 2

Équations différentielles avec Maple

Sommaire

Dans ce chapitre, nous présentons la résolution des équations différentielles en utilisant le logiciel de calcul formel **Maple**, notamment les opérateurs `Diff` et `diff` [9], la commande `dsolve` et `plot` [10].

2.1 Qu'est ce que Maple?

Maple est un logiciel de mathématiques développé par des chercheurs de l'université de **Waterloo** au Canada et de l'université **ETH** de Zurich. Il se distingue par la puissance de son calcul symbolique, numérique et par la représentation graphique des résultats.
C'est un logiciel destiné aux scientifiques, ingénieurs, étudiants possédant un bon niveau mathématique.
Ce logiciel fait des merveilles dans le calcul à très haute précision, la résolution d'équations réelles, imaginaires, différentielles, intégrales, etc.
Maple est un langage interprété, contrairement à **Pascal** et **Fortran** qui sont des langages compilés. Ça veut tout simplement dire que Maple est un interlocuteur toujours attentif et prêt à réagir à vos "paroles", sans passer par des étapes intermédiaires comme la compilation et l'établissement des liens (linking) [3].

2.2 Syntaxe de base

....

2.3 Dérivées totales et partielles

....

2.3.1 Expressions : les opérateurs diff et Diff

....

Dérivées successives d'une fonction à une variable

....

Dérivées partielles successives

....

Fonctions : l'opérateur D

....

2.4 Solutions d'une équation différentielle

Dans cette partie nous cherchons à résoudre nos équations différentielles de manière exacte : c'est à dire que nous exprimerons les solutions des équations à l'aide de fonctions usuelles (les polynômes, ln, exp, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques...).
La résolution avec **Maple** se fait en général à l'aide de la commande **dsolve**.

2.4.1 La commande dsolve

Maple propose, parmi d'autres choses, une puissante instruction **dsolve** capable de résoudre certaines équations différentielles que l'on peut lui passer en paramètre. Cette instruction commence par classifier le type d'équation auquel elle a affaire (linéaire, Bernoulli, Riccati, à variables séparables, et d'autres situations plus exotiques) et applique une méthode adaptée. Attention à la syntaxe de **dsolve** : elle admet en paramètre une équation différentielle ou un problème de Cauchy (qui se présente alors comme un ensemble <accolades> formé d'une équation différentielle et d'une condition initiale) et la fonction inconnue cherchée. Si une condition initiale n'est pas fournie, **Maple** introduit les constantes nécessaires sous la forme

_C1, _C2,..., constantes auxquelles on peut donner une valeur par la suite grâce à la fonction **subs** [2].

.....

2.4.2 Système d'équations différentielles

La syntaxe précédente se généralise sans peine à un système d'équations différentielles de la manière suivante.

Résolution formelle d'un système d'équations différentielles

- dsolve({équation 1 , équation 2 , ..., équation n , conditions initiales}).

  On pourra également extraire les solutions en tant que fonctions. Voici l'exemple d'un système linéaire homogène d'ordre deux.

  ```
  > eqq := {diff(x(t),t)+x(t)+2*y(t) = 0, diff(y(t),t)+x(t)-y(t) = 0, x(0)
  = 0, y(0) = 1} :  sol := dsolve(eqq);
  ```

  $$sol := \{x(t) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} + \frac{1}{3}\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t}, y(t) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{3}t} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{6}\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} - \frac{1}{6}\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t}\}$$

  ```
  > x := unapply(subs(sol,x(t)),t);
  ```

  $$x := t \rightarrow -\frac{1}{3}\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} + \frac{1}{3}\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t}$$

2.5 Graphisme

Grâce à la commande **plot**, vous pourrez produire des graphes de plusieurs fonctions dans une même fenêtre, des graphes paramétrés, etc. Nous en rencontrerons quelques exemples et le '?' vous en fournira plusieurs autres.

La commande graphique **plot** est le plus fréquemment utilisée. Le package plots en contient plusieurs autres. Pour obtenir des informations sur ce package : faites simplement ?plots.

Tapez **with(plots)** : pour le charger et ainsi avoir accès à ces commandes supplémentaires.

Notez la présence du petit ':' à la fin de cette dernière instruction.

C'est que Maple est particulièrement bavard lorsqu'il charge un package.

2.5.1 Graphisme 2-D

Forme explicite

Une seule courbe

Famille de courbes

Courbes définies implicitement

2.5.2 Commandes display, replot, contourplot, showtangent

Fonction replot

La commande contourplot

La commande showtangent

La commande fieldplot

2.5.3 Le package DEtools

DEplot, phaseportrait

odeplot

Conclusion

Comme résultat de notre projet de Licence, nous croyons que nous avons appris deux leçons importantes. Premièrement, lorsque nous avons étudié dans le premier chapitre la théorie des équations différentielles ordinaires, nous sommes devenues parfaitement conscientes de notre propre manque de compréhension pour ce sujet. Deuxièmement, l'utilisation du logiciel Maple qui automatise les manipulations algébriques concernant ce sujet.

Nous avons découvert que l'utilisation des logiciels de calcul formel est très utile et efficace pour les étudiants et les chercheurs mathématiciens ainsi. Nous croyons que ce projet de Licence a amélioré notre compréhension.

Comme résultat secondaire de ce projet de Licence, nous avons acquis l'utilisation du logiciel de traitement de texte scientifique "Scientific WorkPlace".

Bibliographie

[1] **C. Basdevant,** Équations différentielles, Étude théorique et schémas numériques, Institut Galilée Université Paris-Nord 2003 - 2004.

[2] **F. Delacroix**, Les mathématiques en FIAAS - Équations différentielles, École des Mines de Douai 2010.

[3] **M. El Marraki**, Le Langage de programmation Maple 2006-2007.

[4] **H. Géry,** Epsilon MATHS 2008.

[5] **A. Lefebvre-Lepot**, Mathématiques Appliquées -EV2, École Polytechnique, Palaiseau Cedex, France 2010-2011.

[6] **B. Ycart,** Université Joseph Fourier, Grenoble.

[7] TD de Maple en MPSI à Louis-le-Grand, 2011-2012 (www.eleves.ens.fr/home/pausimon/td2.1.pdf)

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Computer_algebra_system

[9] http://lkcz.free.fr

[10] http://shuxue.voila.net/Acces_restreint/Maple5/Maple5_cours09_graphiques_PCSI.pdf