Titre ici par exemple : Équations différentielles à second membre discontinue

NOM Prénom

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons aux équations différentielles à second membre discontinue. Dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions de base. Le deuxième chapitre est consacré aux équations différentielles à second membre continue, (Méthode classique) avec une condition initiale, en particulier, nous étudions la théorie du problème de Cauchy. Dans le troisième chapitre, nous définissons le problème d'inclusions différentielles, et nous étudions l'existence de la solution de ce problème. Dans le quatrième chapitre nous discuterons les équations différentielles à second membre discontinue, nous utilisons dans ce chapitre l'existence et l'unicité de la solution au sens de Carathéodory dans le cas où le second membre de l'équation est continue en x et discontinue en t, et nous utilisons la solution au sens de Filippov dans le cas où le deuxième côté de l'équation est discontinue en x.

Mots-clés : Problème de Cauchy, équations différentielles à second membre discontinue, inclusions différentielles.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

mes ***très chers parents,***

mes frères,

et mes sœurs.

Remerciements

Avant tout, je remercie ***Allah*** *le tout puissant qui m'a donné la force, le courage, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.*

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à mon encadreur Monsieur ***LAADJ Toufik****, pour son aide, sa patience et le soutien moral qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de la réalisation de ce travail.*

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur ***AAAA Bbbb,*** *Professeur à l'USTHB pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de mémoire.*

Je remercie vivement Monsieur ***AAAAA Bbbbbbb,*** *Maître de Conférences à l'USTHB qui a bien voulu faire partie du jury.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis.

P. Nom,

Table des matières

Introduction

Parmi les branches les plus importantes des mathématiques, la branche des équations différentielles, qui sont considérées comme la base de la science actif, où l'on trouve de nombreuses problèmes dans divers domaines formulés mathématiquement sous la forme d'équations différentielles. En mathématiques la forme générale d'une équation différentielle s'écrit sous la forme $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)})$, qui est une relation entre la variable t, où t représente en générale le temps, x qui est une fonction inconnue de t, et ses dérivées $\dot{x}, \cdots, x^{(n)}$ par rapport à la variable t, l'entier n est l'ordre de l'équation.

Dans ce travail, nous discuterons la résolution d'une équation différentielle avec une condition initiale, qui est appelé problème de Cauchy. Dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions de base. Le deuxième chapitre est consacré aux équations différentielles à second membre continue, en particulier l'existence et l'unicité de la solution de quelques types du problème de Cauchy [2, 3, 1]. Dans le troisième chapitre nous définissons le problème d'inclusion différentielle et sa solution [9], et nous présentons quelques définitions d'une application multivoque (définition, semi-continuté) [8], à la afin on entamera l'existence de la solution des inclusions différentielles [10]. Dans le dernier chapitre nous discuterons les équations différentielles à second membre discontinue. Ce chapitre est subdivisé en deux sections, dans la première où le second membre discontinue par rapport à t, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution au sens de Carathéodory [7]. Et dans l'autre section nous introduisons les solutions au sens de Filippov pour les équations différentielle à seconde membre discontinue en x [6, 7]. Dans le dernier chapitre nous examinerons l'existence et l'unicité de la solution d'une équation d'ordre supérieure discontinue [11].

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

L'objective de ce préliminaire est donner quelques définitions de base et un vocabulaire de départ que l'on retrouve dans beaucoup de manuscrites qui traitent du domaine.

1.1 Notations

....

1.2 Abréviations

....

1.3 Définitions

Définition 1 (Équicontinue) *Soit X un ensemble, et F sous ensemble de X. On dit que F est équicontinue en un point $x_0 \in X$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V(x_0)$ dans X, tel que pour tout $x \in V(x_0)$, et pour tout $f \in F$, on ait $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.*

- *On dit que F est équicontinue s'elle est équicontinue on tout points de X.*

Définition 2 *Une fonction $x : J \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue si pour tous intervalles disjoints $[a_i, b_i]_{i=1}^{p}$inclus dans J, tels que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \sum_{k=1}^{p} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} |x(b_k) - x(a_k)| < \varepsilon.$$

Définition 3 *Soient $(E, \mathcal{A})$, $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, et soit la fonction $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$, on dit que f est mesurable si pour tout $V \in \mathcal{B}$ alors $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux tribus.*

Théorème 1 (d'Ascoli-Arzela)

Soit $X \subset \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$, si X est bornée et équicontinue, alors X contient une suite uniformément convergente $x_i(.) \in X$,$i = 1, 2, ...,$ i.e. Il existe $x(.) \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ tel que $|x_i(t) - x(t)|_{\mathcal{C}} \to 0$ lorsque $i \to \infty$.

Théorème 2 (Valeur moyenne) *Soient l'ensemble X et l'intervalle ouvert $]a, b[$, et soit $v \in L^1_{loc}(]a, b[\,, X)$ à valeurs dans un sous-ensemble $C \subset X$. Alors pour tout t_0, t_1 dans $]a, b[$, on a*

$$\int_{t_0}^{t1} v(s)ds \in (t_1 - t_0)\overline{\text{cov}}(C).$$

Chapitre 2

Problème de Cauchy

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité locale du problème de Cauchy c'est-à-dire une équation différentielle ordinaire pour laquelle on a donné une condition initiale sans connaître explicitement les solutions.

2.1 Problème de Cauchy d'ordre un

Définition 4

On appelle problème de Cauchy le problème suivant: Étant donné

- J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

- Une fonction définie et continue sur $J \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} f: \quad J \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (t,x) &\mapsto f(t,x). \end{aligned}$$

Trouver une fonction $x \in \mathcal{C}^1$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & \forall t \in J, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \in J \quad \textit{condition initiale} \end{cases}, \quad (PC). \tag{2.1}$$

Par la donné d'une condition dite condition de Cauchy, ou condition initiale. Et on note le problème de Cauchy par (2.1).

......

2.2 Problème de Cauchy d'ordre supérieur

....

2.3 Solutions locales, maximales, globales

......

2.4 Existence et unicité de solutions du problème de Cauchy

....

2.5 Généralisation du théorème de Cauchy-Lipschitz

......

Chapitre 3

Les inclusions différentielles

Sommaire

Dans ce chapitre on étudie l'existence d'une solution de l'inclusion différentielle.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)), & t \in J = [0, T] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \rho(\mathbb{R}^n)$ une application multivoque à valeurs compactes, convexes.

Exemple 1 *On considère l'inclusion différentielle suivant :*

$$\dot{x} \in F(x) = \mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ [-1, 1] & si\ \ x = 0 \\ -1 & si\ \ x > 0 \end{cases}, \ t \in [0, T]$$

Cette inclusion différentielle admet unique solution globale $x(t) = 0$*, pour une condition initiale* $x(0) = 0$.

Attention ! Sgn *c'est une notation, c'est-à-dire* $\mathrm{Sgn}(x) \neq \mathrm{sgn}(x)$.

3.1 Application multivoque

......

3.2 Continuité des applications multivoques

.....

3.2.1 Notion de Solution

......

3.3 Existence des solutions

......

3.4 Inclusions différentielles semi-continues supérieurement

Dans cette section, nous considérons les inclusions différentielles suivants :

$$\dot{x}(t) \in F(x) \tag{3.2}$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ est une application multivoque semi-continue supérieurement à valeurs fermées, bornée et convexes.

......

Chapitre 4

Équations différentielles à second membre discontinue

Sommaire

Dans ce présent chapitre on étudiera l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans le cas où le second membre de l'équation est discontinue par rapport à t (solution au sens de Carathéodory) et discontinue par rapport à x (solution au sens de Filippov).

4.1 Équations différentielles à second membre continue en x et discontinue en t

4.1.1 Solution au sens de Carathéodory

......

4.1.2 Équations différentielles à second membre discontinue en x

......

4.2 Solution faible

......

4.3 Solution au sens de Filippov

.....

4.3.1 Équations différentielles à second membre discontinue d'ordre supérieure

.....

Théorie de Filippov (Existence et unicité de la solution au sens de Filippov)

......

Existence et unicité de la solution au sens de Filippov d'une équation d'ordre supérieure .....

Premier cas .....

Deuxième cas ....

4.3.2 Comparaison avec le cas classique

.....

Conclusion

Comme résultat de ce travail, nous croyons que nous avons appris trois leçons importantes. Premièrement, le deuxième chapitre est garanti l'existence locale de la solution d'une équation différentielle à second membre continue, et cet solution est dérivable pour tous variables t. Deuxièmement, l'existence de la solution de l'inclusion différentielle est assuré dans le cas où l'application multivoque est semi-continue supérieurement. Troisièment, la solution de l'équation différentielle à second membre discontinue et l'inclusion différentielle est absolument continue, c'est-à-dire la dérivée est Lebesgue intégrable. La méthode de Filippov est plus générale de les autres méthodes.

Bibliographie

[1] **Driss Boularas**, Équations différentielles, 2001-2002.

[2] **Chao-Jiang Xu**, Équations Différentielles Ordinaires, 2008-2009.

[3] **Benjamin Bouvier**, Résolution numérique des équations diférentielles, 2010.

[4] **Jean-Pierre Richard,** Mathématiques pour les systèmes dynamiques, Lavoisier, 2002.

[5] **Georgi V. Smirnov** Introduction to the Theory of Differential Inclusions. American Mathematical Soc. 2001.

[6] **Claude Lobry et Tewfik Sari**, Equations differentielles à second membre discontinu, Hermann, Paris 2005.

[7] **A. F. Filippov**, Differential Equation with Discontinuos Righthand Sides,1988.

[8] **Shouchuan Hu, Papageorgiou, Nikolaos S.** Handbook of multivalued analysis, Springer 1997.

[9] **J. P. Aubin and A. Cellina**, Differential inclusions, Springer 1984.

[10] **Sara Derivière and M. A. Aziz-Alaoui**, An Invariance Principle for Discontinuous Righthand Sides Dynamical Systems.

[11] **M. Rem**, Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type, Eindhoven, 2000.