USTHB 2020-2021 Semestre 1
Faculté de Mathématiques

U S T H B

Analyse numérique
$2^{\text{ème}}$ année Lic Maths

Test n^{0}2 - 16 mars 2021. Durée : 45 minutes

Nom et Prénom :..

Matricule :..

/ **15**

Exercice 1 (7 points) : On considère l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

a) Calculer la valeur exacte de I en utilisant 9 chiffres significatifs avec arrondi.

b) Évaluer cette intégrale par la méthode des trapèzes puis par celle de Simpson avec $n = 6$.

c) Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

Réponse.

a) On a $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\text{Log}\, x]_1^2 = \text{Log}\, 2 - \text{Log}\, 1 \simeq 0.693147181$.

b) On a $a = 1, b = 2, n = 6, h = \dfrac{b-a}{n} = \frac{1}{6}, x_i = 1 + \frac{i}{6}, i = 0, ..., 6$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

On obtient alors le tableau de données suivantes

x_i	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{11}{6}$	2
$y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x_i}$	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{2}$

Calculons $\text{Log}\, 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ par les méthodes des trapèzes et de Simpson.

On a

$$\begin{aligned} T_6(f) &= \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{5} f(x_i) + f(b)\right) = \frac{\frac{1}{6}}{2}\left(1 + 2\left(\tfrac{6}{7} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{5} + \tfrac{6}{11}\right) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(1 + \frac{15797}{2310} + \frac{1}{2}\right) = \frac{9631}{13860} \simeq 0.694877345 \ , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_6(f) &= \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{i=1, i \text{ pair}}^{5} f(x_i) + 4\sum_{i=1, i \text{ impair}}^{5} f(x_i) + f(b)\right) \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{3}\left(1 + 2\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{5}\right) + 4\left(\tfrac{6}{7} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{6}{11}\right) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{18}\left(1 + \frac{27}{10} + \frac{1912}{231} + \frac{1}{2}\right) = \frac{14411}{20790} \simeq 0.693169793 \ . \end{aligned}$$

b) Pour l'erreur relative, on a

$$\begin{aligned} e_R(T_6) &= \frac{|I(f) - T_6(f)|}{|I(f)|} = \frac{|\text{Log}(2) - 0.694877345|}{|\text{Log}\, 2|} = \frac{|0.693147181 - 0.694877345|}{0.693147181} \\ &= \frac{0.001730164}{0.693147181} \simeq 0.002496 \simeq 0.2496\% \end{aligned}$$

et

$$e_R(S_6)=\frac{|I(f)-S_6(f)|}{|I(f)|}=\frac{|\mathrm{Log}(2)-0.693169793|}{|\mathrm{Log}\,2|}=\frac{|0.693147181-0.693169793|}{0.693147181}$$
$$=\frac{0.000022612}{0.693147181}\simeq 0.0000326\simeq 0.0033\%\ .$$

Exercice 2 (8 points) : On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3-x-1, x\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f(x)=0$ admet une racine réelle $\alpha\in\,]1,2[$.

b) Déterminer, par la méthode de dichotomie, une approximation de α à 10^{-1} près en utilisant le test d'arrêt $|x_{n+1}-x_n|\leq\varepsilon$.

c) Effectuer quatre itérations avec la méthode de Newton en démarrant de $x_0=\frac{3}{2}$.

Réponse.

a) La fonction polynomiale f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $f(1)f(2)=(-1)(5)=-5<0$. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine $\alpha\in\,]1,2[$ telle que $f(\alpha)=0$.

b) Posons $a_0=a=1, b_0=b=2$ et $x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$. En utilisant l'algorithme de dichotomie on obtient le tableau suivant :

n	a_n	b_n	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(a_n)f(x_n)$	$\lvert x_n-x_{n-1}\rvert$	Test d'arrêt
0	1	2	1.5	-1	0.875	$-$		
1	1	1.5	1.25	-1	-0.296875	$+$	0.25	continuer
2	1.25	1.5	1.375	-0.296875	0.224609375	$-$	0.125	continuer
3	1.25	1.375	1.3125	-0.296875	-0.05151367	$+$	0.0625	stop

Tout point de l'intervalle final $[1.3125, 1.375]$ est une approximation de α. On peut choisir le point milieu de cet intervalle comme solution, donc la racine approchée par la méthode de dichotomie est :

$$r=\frac{x_3+b_3}{2}=\frac{1.3125+1.375}{2}=1.34375.$$

Nous constatons que 3 le nombre d'itérations effectif pour avoir la précision $|x_{n+1}-x_n|\leq 0.1$ est $N=\left[\frac{\mathrm{Log}\,10}{\mathrm{Log}\,2}\right]=3.$

c) En utilisant l'algorithme de Newton

$$x_0=1.5, x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-x_n-1}{3x_n^2-1}=\frac{2x_n^3+1}{3x_n^2-1}$$

on obtient le tableau suivant :

n	x_n	x_{n+1}
0	1.5	1.34782609
1	1.34782609	1.32520040
2	1.32520040	1.32471817
3	1.32471817	1.32471796

Alors l'approximation de α par la méthode de Newton avec quatre itérations est 1.32471796 .