

Corrigé du TD 3 : Logique Modale

Exo 1 :

1) $(a \supset \Box \Diamond a)$ est une tautologie si et seulement si R est symétrique.

Sens 1 : supposons que $(a \supset \Box \Diamond a)$ est une tautologie, et que R n'est pas symétrique. On considère le modèle modal $M = \langle W, R, v \rangle$ avec $W = \{w, w'\}$, $R = \{(w, w')\}$ et $v(a) = \{w\}$. Clairement, R n'est pas symétrique puisque $R(w, w')$ et $\neg R(w', w)$. $M, w' \models a$ donc $M, w' \models (a \supset \Box \Diamond a)$. Mais $M, w \not\models (a \supset \Box \Diamond a)$ car $M, w \models a$ et $M, w \not\models \Box \Diamond a$. $M, w \not\models \Box \Diamond a$ car $R(w, w')$ et $M, w' \not\models \Diamond a$. $M, w' \not\models \Diamond a$ car w' monde puits. Donc $(a \supset \Box \Diamond a)$ non vraie en tout monde de W : contradiction avec la supposition $(a \supset \Box \Diamond a)$ tautologie.

Sens 2 : supposons que R est symétrique, et que

$(a \supset \Box \Diamond a)$ n'est pas une tautologie. Il existe un modèle modal $M = \langle W, R, v \rangle$ et un monde w de W tel que $M, w \not\models (a \supset \Box \Diamond a)$. Donc $M, w \models a$ et $M, w \not\models \Box \Diamond a$. Donc il existe w' tq $R(w, w')$ et $M, w' \not\models \Diamond a$. Comme R est symétrique, on a $w' R w$: et comme $M, w \models a$, on a $M, w' \models \Diamond a$ (contradiction).

2) $(\Box(a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b))$ est une tautologie si et seulement si R relie chaque monde à au plus un monde.

Sens 1 : On montre la contraposée. On considère le modèle modal $M = \langle W, R, v \rangle$ suivant : $W = \{w, w', w''\}$, $R = \{(w, w'), (w, w'')\}$, $v(a) = \{w'\}$ et $v(b) = \{w''\}$. R relie w à deux mondes w' et w''. On a bien $M, w \models \Box(a \vee b)$ mais $M, w \not\models (\Box a \vee \Box b)$; donc $M, w \not\models (\Box(a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b))$: sans la propriété "R relie tout monde à au plus un monde", la fbf $\Box(a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b)$ ne pourra pas être une tautologie.

Sens 2 : Par l'absurde. Supposons que R relie tout monde à au plus un monde, et que $\Box(a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b)$ n'est pas une tautologie. Il existe un modèle modal $\langle W, R, v \rangle$ et un monde w de W tq $M, w \not\models (\Box(a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b))$; en d'autres termes, tel que $M, w \models \Box(a \vee b)$ et $M, w \not\models (\Box a \vee \Box b)$. De $M, w \not\models (\Box a \vee \Box b)$, on déduit $M, w \not\models \Box a$ et $M, w \not\models \Box b$. Il existe donc w' tq $R(w, w')$, $M, w' \not\models a$ et $M, w' \not\models b$: contradiction avec $M, w \models \Box(a \vee b)$.

Remarque : dans le modèle modal $M = (W, R, v)$ avec $W = \{w, w'\}$, $R = \{(w, w')\}$, $v(a) = \{\}$ et $v(b) = \{w\}$, on a bien $M, w \models (\Box a \vee b)$ puisque $M, w \models b$, mais $M, w \not\models (\Box a \vee \Box b)$ puisque $M, w \not\models \Box a$ et $M, w \not\models \Box b$. Donc $M, w \not\models ((\Box a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b))$. De plus, R relie tout monde à au plus un monde. Il s'ensuit que la propriété "la relation d'accessibilité relie tout monde à au plus un monde" n'implique

pas que la fbf $((\Box a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b))$ soit une tautologie.

3) $(\Diamond \Box a \supset \Box \Diamond a)$ est une tautologie si et seulement si R est "confluente".

Sens 1 : Montrons que si $(\Diamond \Box a \supset \Box \Diamond a)$ est une tautologie alors R est confluente.

On montre la contraposée : si R n'est pas confluente alors $(\Diamond \Box a \supset \Box \Diamond a)$ n'est pas une tautologie.

En effet, si R n'est pas confluente, $(\Diamond \Box a \supset \Box \Diamond a)$ ne pourra pas être une tautologie, comme l'illustre le modèle modal $M=(W,R,v)$, avec $W=\{w,w',w''\}$, $R=\{(w,w'),(w,w'')\}$ et $v(a)=\{w,w',w''\}$, dont le monde w ne satisfait pas $(\Diamond \Box a \supset \Box \Diamond a)$, puisqu'il satisfait $\Diamond \Box a$ mais ne satisfait pas $\Box \Diamond a$.

Sens 2 : Par l'absurde. Supposons R confluente et $(\Diamond \Box a \supset \Box \Diamond a)$ non tautologie. Il existe un modèle modal $M=\langle W,R,v \rangle$ avec R confluente, et avec un monde w de W ne satisfaisant pas $(\Diamond \Box a \supset \Box \Diamond a)$. Donc $M,w \models \Diamond \Box a$ et $M,w \not\models \Box \Diamond a$. Il existe w', w'' tq $R(w,w')$, $R(w,w'')$, $M,w' \models \Box a$ et $M,w'' \not\models \Diamond a$. Comme R confluente, il existe w''' tq $R(w',w''')$ et $R(w'',w''')$. Donc $M,w''' \models a$ puisque $M,w' \models \Box a$. Et comme $R(w'',w''')$, on déduit que $M,w'' \models \Diamond a$: contradiction.

Exo 2 :

1) si $a \supset b$ est un théorème, $\Box a \supset \Box b$ l'est aussi.

On en donne une preuve :

X[1] $a \supset b$ (théorème par hypothèse)

X[2] $\Box(a \supset b)$ R6(X[1])

X[3] $(\Box(a \supset b) \supset (\Box a \supset \Box b))$ axiome (A6)

X[4] $\Box a \supset \Box b$ R2(X[2],X[3])

2) si $a \supset b$ est un théorème, $\Diamond a \supset \Diamond b$ l'est aussi.

On en donne une preuve :

X[1] $a \supset b$ (théorème par hypothèse)

X[2] $\Box(a \supset b)$ R6(X[1])

X[3] $(\Box(a \supset b) \supset (\Box a \supset \Box b))$ axiome (A6)

X[4] $\Box a \supset \Box b$ R2(X[2],X[3])

X[5] $\neg \Box b \supset \neg \Box a$ contraposée de X[4]

X[6] $\neg \Box \neg c \supset \neg \Box a$ R1(X[5]) substitution de $\neg c$ à b

X[7] $\neg \Box \neg c \supset \neg \Box \neg d$ R1(X[6]) substitution de $\neg d$ à a

X[8] $\Diamond c \supset \Diamond d$ dualité entre $\Box$ et $\Diamond$

X[9] $\Diamond a \supset \Diamond d$ **R1(X[8]) substitution de a à c**

X[10] $\Diamond a \supset \Diamond b$ **R1(X[9]) substitution de b à d**

3) montrer que la formule suivante est un théorème de S5 : $(\Box (a \supset \Diamond b) \wedge \Box (c \supset \Diamond d)) \supset ((a \vee c) \supset \Diamond(b \vee d))$

Par l'absurde : supposons $(\Box (a \supset \Diamond b) \wedge \Box (c \supset \Diamond d)) \supset ((a \vee c) \supset \Diamond(b \vee d))$ non théorème de S5, donc non tautologie de S5. Il existe un modèle modal $\langle W, R, v \rangle$ et un monde w de W tq que $(\Box (a \supset \Diamond b) \wedge \Box (c \supset \Diamond d)) \supset ((a \vee c) \supset \Diamond(b \vee d))$ fausse en w :

- Donc $(\Box (a \supset \Diamond b) \wedge \Box (c \supset \Diamond d))$ vraie en w et $((a \vee c) \supset \Diamond(b \vee d))$ fausse en w
- Donc $(\Box (a \supset \Diamond b) \wedge \Box (c \supset \Diamond d))$ vraie en w , $(a \vee c)$ vraie en w et $\Diamond(b \vee d)$ fausse en w
- Donc $\Box(a \supset \Diamond b)$ vraie en w , $\Box(c \supset \Diamond d)$ vraie en w , $(a \vee c)$ vraie en w et $\Diamond(b \vee d)$ fausse en w
- **Grâce à l'axiome (A7) :** $a \supset \Diamond b$ vraie en w , $c \supset \Diamond d$ vraie en w , $(a \vee c)$ vraie en w et $\Diamond(b \vee d)$ fausse en w
- Donc $a \supset \Diamond b$ vraie en w , $c \supset \Diamond d$ vraie en w , $(a \vee c)$ vraie en w , $\Diamond b$ fausse en w et $\Diamond d$ fausse en w
- De $a \supset \Diamond b$ vraie en w et $\Diamond b$ fausse en w , on déduit a fausse en w ; de la même façon, de $c \supset \Diamond d$ vraie en w et $\Diamond d$ fausse en w , on déduit c fausse en w ; donc $(a \vee c)$ fausse en w (contradiction).