USTHB - Faculté d'Informatique

Master 2 ''Ingénierie du Logiciel'' 2022/2023

Module Représentation des Connaissances

Corrigé du TD 2 : Logique du Premier Ordre

Exercice 1 :

Terme : L'ensemble des termes est le plus petit ensemble satisfaisant :

- Une variable est un terme ;
- Si f est un symbole de fonction d'arité n, et t1, …, tn des termes, alors f(t1, …, tn) est un terme.

Proposition atomique : Si P est un symbole de prédicat d'arité n, et t1, …, tn des termes, alors P(t1, …, tn) est une proposition atomique.

Formule de la LPO : L'ensemble des formules (bien formées) de la LPO est le plus petit ensemble satisfaisant :

1) *f* est une formule ;
2) une proposition atomique est une formule ;
3) si p et q sont des formules alors (p ⊃ q) est une formule ;
4) si x est une variable et p une formule alors (∀x)p est une formule.

Solution de l'exo :

p(x) : la variable x est un terme et p prédicat d'arité 1, donc p(x) est bien une proposition atomique, donc une formule bien formée (fbf) : point 2) de la définition.

(∀x) (p(x)) : x est une variable et p(x) une fbf, donc (∀x) (p(x)) est bien une fbf : point 4) de la définition.

(p(x) ⊃ p(p(x))) : p(x) est une fbf mais p(p(x)) n'est pas une fbf : les arguments d'un symbole de prédicat doivent être des termes. Ici, la première occurrence du symbole de prédicat p contient la proposition atomique p(x) comme argument. (p(x) ⊃ p(p(x))) n'est donc pas une fbf.

(p(x) ⊃ f(p(x))) : p(x) est une fbf mais f(p(x)) n'est pas une fbf, ni même un terme : les arguments d'un symbole de fonction doivent être des termes. Ici, le symbole de fonction f contient la proposition atomique p(x) comme argument. (p(x) ⊃ f(p(x))) n'est donc pas une fbf.

(p(x) ⊃ p(f(x)) : x variable et f symbole de function d'arité 1, donc f(x) terme. p symbole de prédicat d'arité 1 et f(x) terme, donc p(f(x)) proposition atomique, donc fbf : point 2) de la définition. p(x) et p(f(x)) fbf, donc (p(x) ⊃ p(f(x)) fbf : point 3) de la definition.

$(\exists x)((\forall y)\ (p(x)\ \supset p(x)))$:

- $p(x)$ fbf donc $(p(x)\ \supset p(x))$ fbf : point 3) de la définition ;
- y variable et $(p(x)\ \supset p(x))$ fbf, donc $(\forall y)(p(x)\ \supset p(x))$ fbf : point 4) de la définition ;
- x variable et $(\forall y)(p(x)\ \supset p(x))$ fbf, donc $(\exists x)((\forall y)(p(x) \supset p(x)))$ fbf : point 4) de la définition.

$(\exists x)(((\forall x)\ (p(y)\ \supset (p(x)))$:

- $p(y)$ et $p(x)$ fbf donc $(p(y)\ \supset p(x))$ fbf : point 3) de la définition ;
- x variable et $(p(y)\ \supset p(x))$ fbf, donc $(\forall x)(p(y)\ \supset p(x))$ fbf : point 4) de la définition ;
- x variable et $(\forall x)(p(y) \supset p(x))$ fbf, donc $(\exists x)((\forall x)(p(y) \supset p(x)))$ fbf : point 4) de la définition.

$(\exists x)(((\forall y)\ (p(x)\ \supset (p(y)))$:

- $p(x)$ et $p(y)$ fbf donc $(p(x)\ \supset p(y))$ fbf : point 3) de la définition ;
- y variable et $(p(x)\ \supset p(y))$ fbf, donc $(\forall y)(p(x)\ \supset p(y))$ fbf : point 4) de la définition ;
- x variable et $(\forall y)(p(x)\ \supset p(y))$ fbf, donc $(\exists x)((\forall y)(p(x) \supset p(y)))$ fbf : point 4) de la définition.

Exercice 2 :

Trois prédicats : enfant d'arité 2, masc d'arité 1, et fém d'arité 1, interprétés comme suit :

- enfant(x,y) : x est enfant de y
- masc(x) : x est de sexe masculin
- fém(x) : x est de sexe féminin

Solution de l'exo :

$(\forall x)((\forall y)(masc(x)\wedge enfant(y,x) \supset \mathbf{père}(x,y))$ % x père de y %

$(\forall x)((\forall y)(fém(x)\wedge enfant(y,x) \supset \mathbf{mère}(x,y))$ % x mère de y %

$(\forall x)((\forall y)(masc(x)\wedge enfant(x,y) \supset \mathbf{fils}(x,y))$ % x fils de y %

$(\forall x)((\forall y)(fém(x)\wedge enfant(x,y) \supset \mathbf{fille}(x,y))$ % x fille de y %

$(\forall x)((\forall y)(masc(x)\wedge(\exists z)((\exists t)(père(z,x)\wedge père(z,y)\wedge mère(t,x)\wedge mère(t,y))) \supset \mathbf{frère}(x,y)))$

% x frère de y %

$(\forall x)((\forall y)(fém(x)\wedge(\exists z)((\exists t)(père(z,x)\wedge père(z,y)\wedge mère(t,x)\wedge mère(t,y))) \supset \mathbf{soeur}(x,y)))$

% x sœur de y %

$(\forall x)((\forall y)((\exists z)(frère(x,z)\wedge(père(z,y)\vee mère(z,y))) \supset \mathbf{oncle}(x,y)))$

% x oncle de y %

$(\forall x)((\forall y)((\exists z)(soeur(x,z)\wedge(père(z,y)\vee mère(z,y))) \supset \mathbf{tante}(x,y)))$

% x tante de y %

$(\forall x)((\forall y)(masc(x)\wedge(\exists z)(enfant(y,z)\wedge(oncle(z,x)\vee tante(z,x))) \supset \mathbf{cousin}(x,y)))$

% x cousin de y %

$(\forall x)((\forall y)(fém(x)\wedge(\exists z)(enfant(y,z)\wedge(oncle(z,x)\vee tante(z,x))) \supset \mathbf{cousine}(x,y)))$

% x cousine de y %

$(\forall x)((\forall y)(fils(x,y)\vee(\exists z)(enfant(z,y)\wedge descendant(x,z)) \supset \mathbf{descendant}(x,y)))$

% x descendant de y %

$(\forall x)((\forall y)(fille(x,y)\vee(\exists z)(enfant(z,y)\wedge descendante(x,z)) \supset \mathbf{descendante}(x,y)))$

% x descendante de y %

$(\forall x)((\forall y)(masc(x)\wedge(descendant(y,x)\vee descendante(y,x)) \supset \mathbf{ascendant}(x,y)))$

% x ascendant de y %

$(\forall x)((\forall y)(fém(x)\wedge(descendant(y,x)\vee descendante(y,x)) \supset \mathbf{ascendante}(x,y)))$

% x ascendante de y %

<u>Exercice 3</u> :

Quatre symboles de prédicat : voiture d'arité 1, étudiant d'arité 1, = d'arité 2, et possède d'arité 2, interprétés comme suit :

- voiture(x) : x est une voiture
- étudiant(x) : x est un étudiant
- =(x,y) : x est égal à y
- possède(x,y) : x possède y

Trois phrases :

a. *Toutes les voitures ont exactement un propriétaire*

b. *Certains étudiants ont une voiture*

c. *Certains étudiants n'ont pas de voiture*

traduites, respectivement, par les trois formules suivantes :

(a) $(\forall x)\ (voiture(x)\ \supset (\exists y)\ (possède(y, x) \wedge (\forall z)\ (possède(z, x) \supset =(z, y))))$;

(b) $(\exists x)\ (étudiant(x) \wedge (\exists y)\ (voiture(y) \wedge possède(x, y)))$

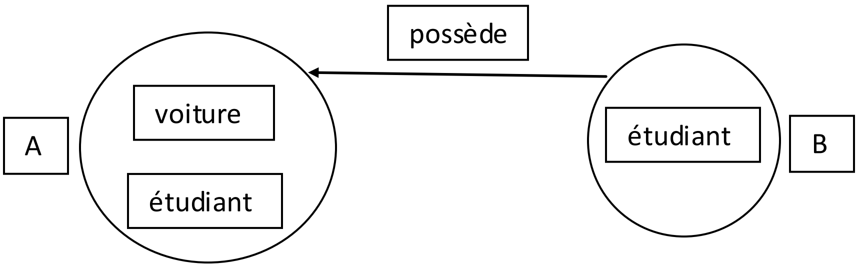
(c) $(\exists x)\ (étudiant(x) \wedge (\forall y)\ (voiture(y)\ \supset \neg possède(x, y)))$

Interprétation I = (D,i) :

- D domaine : D={A,B}

- i fonction d'interprétation, interprétant chaque symbole de prédicat p d'arité n, comme un prédicat i(p) d'arité n sur D, que nous représentons comme l'ensemble des n-uplets (d1, …, dn) tels que i(p)(d1, …, dn)=vrai. Ainsi, on a :
  - i(voiture) = {A}
  - i(étudiant) = {A,B}
  - i(=) = {(A,A), (B,B)}
  - i(possède) = {(B,A)}

L'interprétation I est illustrée par le graphe ci-dessous :



I satisfait la formule (a) :

- Il existe un et un seul x de D tel que voiture(x)=vrai : x=A. Et pour x=A, il existe un et un seul y de D tel que possède(y,x)=vrai : y=B.
- Intuitivement, l'unique voiture A du domaine D a bien B comme l'unique propriétaire.

I satisfait la formule (b) :

- Il existe bien un couple (x,y) de DxD tel que étudiant(x)=vrai, voiture(y)=vrai et possède((x,y)=vrai : prendre (x,y)=(B,A).
- Intuitivement, le domaine D de l'interprétation I contient bien un étudiant, B, possédant une voiture, A.

I satisfait la formule (c) :

- L'élément A de D est bien un étudiant (et voiture en même temps !), et il n'existe aucun arc (A,y) étiqueté par possède, sortant de A, tel que voiture(y)=vrai.
- Intuitivement, le domaine D de l'interprétation I contient bien un étudiant, A, ne possédant pas de voiture.

Exercice 4 :
Trois symboles de prédicat : livre d'arité 1, auteur d'arité 1, et écrit d'arité 2, interprétés comme suit :

- livre(x) : x est un livre
- auteur(x) : x est un auteur
- écrit(x,y) : x a écrit y

Base de connaissances BC = {(F1), (F2), (F3)}, avec :

- (F1) : $(\forall x)$ (livre(x) $\supset$ $(\exists y)$ (auteur(y) $\wedge$ écrit(y,x)))
  - Un livre est écrit par un ou plusieurs auteurs
- (F2) : livre(Les Misérables)
  - Les Misérables est un livre
- (F3) : écrit(Victor Hugo, Les Misérables)
  - Les Misérables est écrit par Victor Hugo

Pouvoir dire que Victor Hugo est un auteur, revient à démontrer que auteur(Victor Hugo) est une conséquence logique de la base de connaissances BC, c'est-à-dire, que toutes les interprétations I = (D,i) qui sont modèles de BC, satisfont auteur(Victor Hugo).

Ci-dessous une interprétations I = (D,i) qui est modèle de BC mais ne satisfait pas auteur(Victor Hugo) :

- D={Les Misérables, Victor Hugo, Mouloud Feraoun}
- i(livre)={Les Misérables}
- i(auteur)={Mouloud Feraoun}
- i(écrit)={(Victor Hugo, Les Misérables), (Mouloud Feraoun, Les Misérables)}

Conclusion : nous ne pouvons pas dire, de façon sûre, que Victor Hugo soit un auteur, puisqu'il existe des interprétations modèles de BC, qui ne satisfont pas auteur(Victor Hugo) : auteur(Victor Hugo) n'est pas une conséquence logique de BC.

Remarque : Le langage Prolog, entre autres, utilise une sémantique du monde clos, ou fermé, se traduisant par la négation par l'échec : si une connaissance C n'est pas donnée explicitement dans la base de faits d'un programme Prolog, vu comme une base de connaissances constituée d'une base de faits (les clauses faits) et d'une base de règles (les clauses règles), et ne peut pas être déduite de cette base de faits, alors Prolog infère la négation de C, $\neg$C. Une telle sémantique appliquée à la base de connaissances BC de l'exo 4, inférerait que $\neg$auteur(Victor Hugo) est une conséquence logique de BC. Mais comme la sémantique de la LPO n'est pas une sémantique du monde clos, l'absence de la connaissance explicite auteur(Victor Hugo) et sa non inférence des connaissances explicites, n'impliquent pas que $\neg$auteur(Victor Hugo) soit une conséquence logique de BC, comme l'illustre cette deuxième interprétation $I_2=(D_2,i_2)$, qui satisfait auteur(Victor Hugo), et ne satisfait donc pas $\neg$auteur(Victor Hugo) :

- D_2={Les Misérables, Victor Hugo}
- i_2(livre)={Les Misérables}
- i_2(auteur)={Victor Hugo}
- i_2(écrit)={(Victor Hugo, Les Misérables)}