USTHB - Faculté d'Informatique

Master 2 ''Ingénierie du Logiciel'' 2024/2025

Module Représentation des Connaissances

Corrigé du TD 2 bis
Logique des défauts

Rappel :
E est une extension d'une théorie Δ=<W,D> ssi E= Γ_Δ(E)
Construction de l'ensemble Γ_Δ(E) :
Γ_Δ(E) est le plus petit ensemble :

- qui est consistant et contient W
- qui est déductivement clos, c-à-d égal à sa clôture déductive
- Pour chaque défaut d$\in$D de la forme A : $B_1,\ldots,B_n$ /C où A est le prérequis, B1,…Bn sont les justifications et C le conséquent
  - Si d est applicable, en d'autres termes :
    - d utilisable, c-à-d A$\in\Gamma_\Delta$(E) et E$\cup${C} consistant
    - et pour chaque i$\in$[1,…,n] $\neg$Bi $\notin$ E

    Alors C$\in$E
    Fsi

Une extension E=Γ_Δ(E) d'une théorie **Δ=<W,D> peut être calculée par l'algorithme suivant :**

```
              /* Initialization */
T = W    /* current theory */
A = ∅    /* set of defaults applied so far */

              /* apply a sequence of defaults */
while there is a default that is not in A, that is applicable to T  :
   •  Choose (nondeterministically) such a default d
   •  add the consequence of d to T
   •  add d to A

              /* final consistency check */
if for every default d in A
        T is consistent with all justifications of d
then
    output T (in other words, E=ΓΔ(E)=Th(T) is an extension of Δ)
```

Remarque : Th(S) désigne la clôture déductive de S.

Exercice 2 :
Soit l'ensemble de défauts D={d1,d2} avec *d1= A*: *B/C* et *d2= A*:$\neg$*C/D* .
Quelles sont les extensions qui peuvent se déduire si on considère les ensembles de formules suivantes:
1. W={ $\neg A$ }
2. W={A, $\neg B$ }
3. W={A, $\neg C \vee \neg D$ }
4. W={A, $\neg B \wedge C$ }

Solution :

Soit l'ensemble de défauts D={d1,d2} avec *d1= A: B/C* et *d2= A:¬C/D* .

1. Soit Δ_1=<W_1,D> avec W_1={ ¬*A* }

   E est une extension ssi E= $\Gamma_{\Delta 1}$(E).
   - $W_1 \subset \Gamma_{\Delta 1}$(E) : initialisation de $\Gamma_{\Delta 1}$(E) à Th(W_1)=Th({ ¬*A* }).
   - Aucun des deux défauts d1 et d2 n'est utilisable vu que le prérequis commun A n'est pas dans Th({¬A }), donc aucun des deux n'est applicable.
   - D'où, par clôture déductive et minimalité, cette théorie admet une seule extension :
     E= $\Gamma_{\Delta 1}$(E)= Th({¬A }).

   Les deux défauts ne sont pas générateurs d'extension.

2. Soit Δ_2=<W_2,D> avec W_2={A, ¬B }

   E est une extension ssi E= $\Gamma_{\Delta 2}$(E).
   - $W_2 \subset \Gamma_{\Delta 2}$(E) : initialisation de $\Gamma_{\Delta 2}$(E) à Th(W_2)=Th({A, ¬B }).
   - Les deux défauts d1 et d2 de la théorie sont utilisables car leur prérequis commun A est dans Th({A, ¬B }) et leurs conséquents respectifs C et D vérifient {A, ¬B,C } et {A, ¬B,D } consistants.
   - Mais le défaut d1 n'est pas applicable pour autant puisque la négation ¬B de sa justification est dans Th({A, ¬B }).
   - Le défaut d2, par contre, est applicable puisque la négation C de sa justification n'est pas dans Th({A, ¬B }) : le conséquent D est ajouté à $\Gamma_{\Delta 2}$(E) : $\Gamma_{\Delta 2}$(E) = Th({A, ¬B, D}).
   - D'où, par clôture déductive et minimalité, cette théorie admet une seule extension :
     E= $\Gamma_{\Delta 2}$(E)= Th({A,¬B, D }).

   Seul le défaut d2 est générateur d'extension.

3. Soit Δ_3=<W_3,D> avec W_3={A, ¬*C*∨¬*D* }

   A- On commence par le défaut d1 :
   - E est une extension ssi E= $\Gamma_{\Delta 3}$(E).
   - $W_3 \subset \Gamma_{\Delta 3}$(E) : initialisation de $\Gamma_{\Delta 3}$(E) à Th(W_3)=Th({A, ¬*C*∨¬*D* }).
   - d1 est utilisable car son prérequis A ∈ Th({A, ¬*C*∨¬*D* }) et son conséquent C est tel que {A,¬*C*∨¬*D,C* } consistant.
   - La négation ¬B de sa justification ∉ Th({A, ¬*C*∨¬*D* }) donc d1 est applicable et son conséquent C est ajouté à $\Gamma_{\Delta 3}$(E) qui devient Th({A,¬*C*∨¬*D,C* }).
   - Le défaut d2 n'est plus utilisable puisque son prérequis A appartient bien à Th({A,¬*C*∨¬*D,C* }) mais son conséquent D est tel que {A,¬*C*∨¬*D,C,D*}) n'est pas consistant ; d2 n'est donc pas applicable.
   - Par clôture déductive et minimalité, cette théorie admet E= $\Gamma_{\Delta 3}$(E)= Th({A,¬*C*∨¬*D,C* }) comme extension.

   B- On commence par le défaut d2 :
   - E' est une extension ssi E'= $\Gamma_{\Delta 3}$(E').
   - $W_3 \subset \Gamma_{\Delta 3}$(E') : initialisation de $\Gamma_{\Delta 3}$(E') à Th(W_3)=Th({A, ¬*C*∨¬*D* }).
   - d2 est utilisable car son prérequis A ∈ Th({A, ¬*C*∨¬*D* }) et le conséquent D est tel que {A, ¬*C*∨¬*D ,D*} consistant, c-à-d Th({A, ¬*C*∨¬*D ,D*})≠∅.
   - La négation C de sa justification n'appartient pas à Th({A, ¬*C*∨¬*D* }), donc d2 est applicable et son conséquent D est ajouté à $\Gamma_{\Delta 3}$(E') qui devient Th({A,¬*C*∨¬*D,D*}).

- d1 n'est plus utilisable car son prérequis A appartient à Th({A, $\neg C \vee \neg D, D$ }) mais son conséquent C est tel que Th({A, $\neg C \vee \neg D$,D,C})≠∅, c-à-d ({A, $\neg C \vee \neg D$,D,C} inconsistant ; donc d1 n'est pas applicable.
- Par clôture déductive et minimalité, cette théorie admet E'= $\Gamma_{\Delta 3}$(E')= Th({A,$\neg C \vee \neg D$,D}) comme extension.

Conclusion : La théorie Δ_3 admet deux extensions :

- E= $\Gamma_{\Delta 3}$(E)=Th({A, $\neg C \vee \neg$D,C})
- E'= $\Gamma_{\Delta 3}$(E')=Th({A, $\neg C \vee \neg$D,D})

4. Soit Δ_4=<W_4,D> avec W_4={A, $\neg B \wedge C$ }

E est une extension ssi E= $\Gamma_{\Delta 4}$(E) : initialisation de $\Gamma_{\Delta 4}$(E) à Th(W_4)=Th({A, $\neg B \wedge C$ }).
Les deux défauts sont utilisables car le prérequis commun A appartient à Th({A, $\neg B \wedge C$ }) et leurs conséquents respectifs C et D vérifient {A, $\neg B \wedge C, C$ } et {A, $\neg B \wedge C, D$ } consistants.

- Pour le défaut d1, la négation $\neg$B de sa justification $\in$ Th({A, $\neg B \wedge C$ }) ; son conséquent ne peut donc pas être ajouté : d1 utilisable mais non applicable.
- Pour le défaut d2 aussi, la négation C de sa justification $\in$ Th({A, $\neg B \wedge C$ }) ; son conséquent ne peut donc pas être ajouté : d2 utilisable mais non applicable.

Conclusion : D'où, par clôture déductive et minimalité, cette théorie admet une seule extension : E= $\Gamma_{\Delta 4}$(E)= Th({A, $\neg B \wedge$C }). Les deux défauts de la théorie ne sont pas générateurs d'extension.

Exercice 3 : (non monotonie du raisonnement par défaut)
Quelles sont les extensions des théories Δ=<W,D> et Δ'=<W',D> telles que ;
W={A,B},
W'={A,B,C} et
D={A∧B : ¬C /¬C}.

Solution :
A)

- E est une extension ssi E= Γ_Δ(E).
- W ⊂ Γ_Δ(E) : initialisation de Γ_Δ(E) à Th(W)=Th({A,B}).
- L'unique défaut d est utilisable car son prérequis A∧B ∈ Th({A,B}).
- La négation C de sa justification n'appartient pas à Th({A,B}) ; son conséquent ¬C est donc ajouté à Γ_Δ(E) qui devient Th({A,B,$\neg C$}).
- Par clôture déductive et minimalité, E=Γ_Δ (E)=Th({A,B ,¬C}) est l'unique extension de Δ

B)

- E'est une extension ssi E'= $\Gamma_{\Delta'}$(E').
- W' ⊂ $\Gamma_{\Delta'}$(E') : initialisation de $\Gamma_{\Delta'}$(E') à Th(W')=Th({A,B,C}).
- L'unique défaut d est utilisable car son prérequis A∧B ∈ Th({A,B,C}).
- La négation C de sa justification appartient cependant à Th({A,B,C}) : d utilisable mais non applicable.
- Par clôture déductive et minimalité, E'=$\Gamma_{\Delta'}$(E')=Th({A,B ,C}) est l'unique extension de Δ

Nous observons le phénomène de non monotonie du raisonnement par défaut puisque l'ajout d'une connaissance (W' est l'ensemble W auquel la connaissance C a été ajoutée) a conduit à réviser certaines conséquences. En effet, $\neg C$ est dans l'ensemble des conséquences obtenues à partir de W et cette formule n'est plus dans l'ensemble des conséquences obtenues à partir de W' : $W \subset W'$ mais l'extension E de Δ n'est pas incluse dans l'extension E' de Δ'.

Exercice 4 :

Considérons la théorie Δ=<W,D> telle que W={A} et D={A : $\neg$B/B}.
Montrez que cette théorie n'admet pas d'extension.

Solution :

- E est une extension ssi $E= \Gamma_{\Delta}(E)$.
- $W \subset \Gamma_{\Delta}(E)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta}(E)$ à Th(W)=Th({A}).
- L'unique défaut d est utilisable car son prérequis $A \in$ Th({A}) et son conséquent B est tel que {A,B} est consistant.
- La négation B de sa justification n'appartient pas à Th({A}) ; le défaut est donc applicable et son conséquent B est ajouté et E devient : $E= \Gamma_{\Delta}(E)=$ Th({A,B}).
- Final consistency check : l'extension ainsi générée, par application de l'unique défaut de la théorie, n'est pas consistante avec le défaut lui-même appliqué pour sa génération, puisque la négation B de la justification du défaut appartient à Th({A,B}).

Conclusion : la théorie n'admet pas d'extension.

Exercice 5 :

Soit la théorie Δ_1=<W,D> suivante où:
$W=\emptyset$ et
D={ :$\neg$b ,$\neg$d/a, : $\neg$b, $\neg$d/c , :$\neg$a, $\neg$c/d, a : $\neg$c/b}={d1,d2,d3,d4}.

1- Quelles sont les extensions de cette théorie ?

Solution :

A. E_1 est une extension ssi $E_1= \Gamma_{\Delta 1}(E_1)$.
- $W \subset \Gamma_{\Delta 1}(E)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta 1}(E_1)$ à $Th(W)=Th(\emptyset)=\emptyset$.
- Les trois premiers défauts n'ont pas de prérequis ; comme $W=\emptyset$, ils sont utilisables et directement applicables. d4 n'est pas utilisable, son prérequis n'étant pas dans $Th(\emptyset)$.
- Le déclenchement de d1 permet alors d'inférer **a,** et $\Gamma_{\Delta 1}(E_1)$ devient Th({a}).
- d3 devient non applicable. d4 devient utilisable et applicable.
- on choisit d2 : applicable car les négations b et d de ses justifications ne sont pas dans Th({a}) ; le conséquent c est ajouté et $\Gamma_{\Delta 1}(E_1)$ devient Th({a,c}).
- d4 utilisable car son prérequis a appartient à Th({a,c}) et son conséquent b est tel que {a,c,b} consistant, mais non applicable car la négation c de sa justification appartient à Th({a,c}).
- Par clôture déductive et minimalité, on obtient donc une première extension : $E_1=\Gamma_{\Delta 1}(E_1)=$Th({a,c}). Voir arbre illustratif : branche (N0,N1,N2).

B. E_2 est une extension ssi $E_2= \Gamma_{\Delta 1}(E_2)$.
- $W \subset \Gamma_{\Delta 1}(E_2)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta 1}(E_2)$ à $Th(W)=Th(\emptyset)=\emptyset$.
- Les trois premiers défauts n'ont pas de prérequis ; comme $W=\emptyset$, ils sont utilisables et directement applicables. d4 n'est pas utilisable, son prérequis n'étant pas dans $Th(\emptyset)$.

- Le déclenchement de d1 permet alors d'inférer **a,** et $\Gamma_{\Delta}(E_2)$ devient Th({a}).
- d3 devient non applicable. d4 devient utilisable et applicable.
- on choisit d4 : utilisable car son prérequis a appartient à Th({a}) et son conséquent b est tel que {a,b} est consistant, et applicable car la négation c de sa justification n'appartient à Th({a}) ; le conséquent b est ajouté et $\Gamma_{\Delta 1}(E_2)$ devient Th({a,b}).
- Final consistency check : cette deuxième extension est cependant inconsistante avec un des defauts utilisés pour sa génération, le défaut d1, puisque la négation b de première justification de d1 appartient à l'extension. Voir arbre illustratif : branche (N0,N1,N3).

C. E_3 est une extension ssi $E_3=\Gamma_{\Delta 1}(E_3)$.
- $W \subset \Gamma_{\Delta 1}(E_3)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta 1}(E_3)$ à Th(W)=Th(∅)=∅.
- Les trois premiers défauts n'ont pas de prérequis ; comme W=∅, ils sont utilisables et directement applicables. d4 n'est pas utilisable, son prérequis n'étant pas dans Th(∅).
- Le déclenchement de d2 permet alors d'inférer **c,** et $\Gamma_{\Delta 1}(E_3)$ devient Th({c}).
- d1 toujours applicable. d3 devient non applicable car la négation c d'une de ses justifications est dans Th({c}).
- d4 toujours non utilisable
- on applique donc d1 : le conséquent a est ajouté et $\Gamma_{\Delta 1}(E_3)$ devient Th({a,c}).
- d4 devient utilisable car son prérequis a appartient à Th({a,c}), mais non applicable car la négation c de sa justification appartient à Th({a,c}).
- L'extension ainsi générée est égale à E1 : $E3=\Gamma_{\Delta 1}(E_3)=E_1=\Gamma_{\Delta 1}(E_1)$=Th({a,c}). Voir arbre illustratif : branche (N0,N4,N5).

D. E_4 est une extension ssi $E=\Gamma_{\Delta 1}(E_4)$.
- $W \subset \Gamma_{\Delta 1}(E_4)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta 1}(E_4)$ à Th(W)=Th(∅)=∅.
- Les trois premiers défauts n'ont pas de prérequis ; comme W=∅, ils sont utilisables et directement applicables.
- Le déclenchement de d3 permet alors d'inférer **d,** et $\Gamma_{\Delta 1}(E_4)$ devient Th({d}).
- d1 et d2 deviennent non applicables car, pour chacun des deux, la négation d d'une de ses justifications est dans Th({d}).
- d4 toujours non utilisable
- Deuxième extension : $E_4=\Gamma_{\Delta 1}(E_4)$ = Th({d}). Voir arbre illustratif : branche (N0,N6).

Conclusion : cette théorie Δ_1 admet deux extensions :
- $E_1=\Gamma_{\Delta 1}(E_1)=E_3=\Gamma_{\Delta 1}(E_3)$=Th({a,c}), obtenable de deux façons
- $E_4=\Gamma_{\Delta 1}(E_4)$=Th({d})

Remarque : Cette théorie est particulière car l'ensemble W est vide. Dans ce cas, afin d'avoir une extension, il faudrait que l'ensemble D de la théorie contienne au moins un défaut sans prérequis.

2- Quelles sont les extensions de la théorie Δ_2 définie par <W∪{a},D> ?

Solution :

A. E_5 est une extension ssi $E_5=\Gamma_{\Delta 2}(E_5)$.
- $W' \subset \Gamma_{\Delta 2}(E_5)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta 2}(E_5)$ à Th(W')=Th({a}).
- d3 utilisable mais non applicable ; les trois autres défauts sont utilisables et applicables.

- Le déclenchement de d1 [applicable car les négations b et d de ses justifications ne sont pas dans Th({a})] permet alors d'inférer a qui est déjà dans $\Gamma_{\Delta 2}(E_5)$, qui reste égal à Th({a}). d2 et d4 restent donc applicables.
- on déclenche d2 : le conséquent c est ajouté et $\Gamma_{\Delta 2}(E_5)$ devient Th({a,c}).
- d4 utilisable mais devient non applicable car la négation c de sa justification appartient à Th({a,c}).
- Première extension, consistante avec les justifications des défauts appliqués pour sa génération, d1 et d2 : $E_5=\Gamma_{\Delta 1}(E_5)$=Th({a,c}). Voir arbre illustratif : branche (N0,N1,N2).

B. E_6 est une extension ssi $E_6= \Gamma_{\Delta 2}(E_6)$.

- W' $\subset \Gamma_{\Delta 2}(E_6)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta 2}(E_6)$ à Th(W')=Th({a}).
- d3 utilisable mais non applicable ; les trois autres défauts sont utilisables et applicables.
- Le déclenchement de d1 [applicable car les négations b et d de ses justifications ne sont pas dans Th({a})] permet alors d'inférer a qui est déjà dans $\Gamma_{\Delta 2}(E_6)$, qui reste égal à Th({a}). d2 et d4 restent donc applicables.
- on déclenche d4 : le conséquent b est ajouté et $\Gamma_{\Delta 2}(E_6)$ devient Th({a,b}).
- Cette deuxième extension n'est cependant pas consistante avec les justifications des défauts d1 et d4 appliqués pour sa génération. Voir arbre illustratif : branche (N0,N1,N3).

C. E_7 est une extension ssi $E_7= \Gamma_{\Delta 2}(E_7)$.

- W' $\subset \Gamma_{\Delta 2}(E_7)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta 2}(E_7)$ à Th(W')=Th({a}).
- d3 utilisable mais non applicable ; les trois autres défauts sont utilisables et applicables.
- Le déclenchement de d2 [applicable car les négations b et d de ses justifications ne sont pas dans Th({a})] permet alors d'inférer c et $\Gamma_{\Delta 2}(E_7)$ devient Th({a,c}). d1toujours applicable et d4 devient utilisable mais non applicable.
- on déclenche d1 : le conséquent a est déjà dans $\Gamma_{\Delta 2}(E_7)$,qui reste égal à devient Th({a,c}).
- L'extension ainsi générée, Th({a,c}), consistante avec les justifications des défauts appliqués d2 et d1, est égale à E_5 : $E_7=\Gamma_{\Delta 1}(E_7)=E_5=\Gamma_{\Delta 1}(E_5)$=Th({a,c}). Voir arbre illustratif : branche (N0,N4,N5).

D. E_8 est une extension ssi $E_8= \Gamma_{\Delta 2}(E_8)$.

- W' $\subset \Gamma_{\Delta 2}(E_8)$: initialisation de $\Gamma_{\Delta 2}(E_8)$ à Th(W')=Th({a}).
- d3 utilisable mais non applicable ; les trois autres défauts sont utilisables et applicables.
- Le déclenchement de d4 [applicable car la négation c de sa justification n'est pas dans Th({a})] permet alors d'inférer b et $\Gamma_{\Delta 2}(E_8)$ devient Th({a,b}). d1et d2 toujours utilisables mais deviennent non applicables.
- Une deuxième extension consistante avec la justification de l'unique défaut appliqué d4 est ainsi générée : $E_8=\Gamma_{\Delta 1}(E_8)$=Th({a,b}). Voir arbre illustratif : branche (N0,N6).

Conclusion : ainsi, cette théorie Δ_2 admet deux extensions :

- $E_5=\Gamma_{\Delta 1}(E_5)=E_7=\Gamma_{\Delta 1}(E_7)$=Th({a,c}), obtenable de deux façons
- $E_8=\Gamma_{\Delta 1}(E_8)$=Th({a,b})

E. Que pouvez-vous conclure ?

Solution : Non monotonie du raisonnement par défaut : le passage de W=$\emptyset$ à W'=W$\cup${a}={a}, par l'ajout de la connaissance a, ne permet plus d'inférer la connaissance d.

Exercice 6 :
La théorie des défauts priorisée Δ=<W,D, $\prec$ > étend la théorie des défauts à l'aide d'un ordre $\prec$ sur les règles de défaut. Un défaut **d** devra être préféré à un défaut d′ quand l'ordre **d $\prec$ d′** apparaît.

Considérons la théorie des défauts priorisée Δ=<W,D, $\prec$> suivante :
W = ∅
D={a:b/b, :¬a/¬a; :a/a } et
$\prec$ = {d1 $\prec$ d2, d2 $\prec$ d3}.

Quelles sont les extensions classiques de cette théorie ?

Solution :

A. E est une extension ssi E= Γ_Δ(E).
- W ⊂ Γ_Δ(E) : initialisation de Γ_Δ(E) à Th(W)=Th(∅)= ∅.
- Les défauts d2 et d3 sont utilisables car ils n'ont pas de prérequis et W=∅, impliquant que leurs conséquents respectifs, ¬a et a, sont tels que W∪{¬a} et W∪{a} sont consistants ; ils sont applicables car pour chacun des deux, la négation de la justification n'est pas dans Th(∅). d1 n'est pas utilisable.
- Déclenchement de d2 : ajout du conséquent ¬a et Γ_Δ(E) devient Th({¬a})
- d1 toujours non utilisable et d3 devient non applicable
- Première extension : E=Γ_Δ(E)=Th({¬a}).

B. E' est une extension ssi E'= Γ_Δ(E).
- W ⊂ Γ_Δ(E') : initialisation de Γ_Δ(E') à Th(W)=Th(∅)= ∅.
- Les défauts d2 et d3 sont utilisables car ils n'ont pas de prérequis et W=∅, impliquant que leurs conséquents respectifs, ¬a et a, sont tels que W∪{¬a} et W∪{a} sont consistants ; ils sont applicables car pour chacun des deux, la négation de la justification n'est pas dans Th(∅). d1 n'est pas utilisable.
- Déclenchement de d3 : ajout du conséquent a et Γ_Δ(E') devient Th({a})
- d2 devient non applicable
- d1 devient utilisable et applicable : Γ_Δ(E') devient Th({a,b}).
- Deuxième extension : E'=Γ_Δ(E')=Th({a,b}).

Conclusion : ainsi, cette théorie Δ admet deux extensions :
- E= Γ_Δ(E)= Th({¬a})
- E'= Γ_Δ(E')= Th({a,b})

Quelle est l'extension préférée?

Solution : Comme la décision de croire ou de ne pas croire **a** dépend de l'ordre dans lequel d2 et d3 sont déclenchés et vu que d2 est préféré à d3, on voudrait plutôt conclure ¬a. En d'autres termes, l'extension E est préférée à E'.

Exercice 7 :
Soit la théorie des défauts priorisée Δ=<W,D, $\prec$> suivante :
W={p⊃ q∧r; r ⊃¬s}
D={: p/p; r: ¬q/ ¬q; s: t /t; p:v/v; q: ¬v/¬v; v:t/t}={d1,d2,d3,d4,d5,d6} et

$\prec = \{d1 \prec d2 \prec d3 \prec d4 \prec d5 \prec d6\}$.
Quelles est l'extension préférée à toutes les autres de cette théorie, si extension il y a ?

Solution :

- E est une extension ssi $E = \Gamma_\Delta(E)$.
- $W \subset \Gamma_\Delta(E)$: initialisation de $\Gamma_\Delta(E)$ à $Th(W)=Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s\})$.
- Seul le défaut d1 est utilisable car il n'a pas de prérequis et son conséquent p est tel $W \cup \{p\}$ est consistant ; d1 est applicable car la négation $\neg p$ de sa justification n'est pas dans $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s\})$; ajout du conséquent p et $\Gamma_\Delta(E)$ devient $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s ;\ p\})$.
- p, q, r et $\neg s$ appartiennent à $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p\})$; de plus, pour chacun des défauts d2, d4 et d5, l'ajout du conséquent à $\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p\}$ donne un ensemble consistant : d2, d4 et d5 utilisables ; d3 et d6 toujours non utilisables car le prérequis, pour chacun des deux, n'est pas dans $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p\})$.
- La négation q de la justification de d2 appartient à $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p\})$: d2 non applicable
- d4 applicable car la négation $\neg v$ de sa justification n'appartient pas à $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p\})$: ajout du conséquent v et $\Gamma_\Delta(E)$ devient $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p ;\ v\})$.
- d5 devient non applicable car la négation v de sa justification est dans $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p ;\ v\})$.
- d6 devient utilisable et applicable : le conséquent t est ajouté et $\Gamma_\Delta(E)$ devient $Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p ;\ v ;\ t\})$.

Conclusion : par clôture déductive et minimalité, l'extension préférée à toutes les autres est $E = \Gamma_\Delta(E) = Th(\{p \supset q \wedge r;\ r \supset \neg s, ;\ p ;\ v ;\ t\})$.