

TD 3 : Logique Modale

Exercice 1

Montrer que :

1. $(a \supset \Box \Diamond a)$ est une tautologie si et seulement si R est symétrique.
2. $(\Box(a \vee b) \supset (\Box a \vee \Box b))$ est une tautologie si et seulement si R relie chaque monde à au plus un monde.
3. $(\Diamond \Box a \supset \Box \Diamond a)$ est une tautologie si et seulement si R est "confluente" (c'est-à-dire que chaque fois que R relie un monde w à deux mondes w1 et w2, il existe un monde w3 accessible à la fois depuis w1 et w2).

Exercice 2

La logique de S5 est axiomatisée de la façon suivante :

$$(A6) : (\Box(a \supset b) \supset (\Box a \supset \Box b))$$

$$(A7) : (\Box a \supset a)$$

$$(A9) : (\Diamond a \supset \Box \Diamond a)$$

(R6)[nécessitation]: si x est une formule, R6(x) est l'ensemble contenant l'unique élément $\Box x$

Montrer que :

- 1) si $a \supset b$ est un théorème, $\Box a \supset \Box b$ l'est aussi.
- 2) si $a \supset b$ est un théorème, $\Diamond a \supset \Diamond b$ l'est aussi
- 3) la formule suivante est un théorème de S5

$$(\Box(a \supset \Diamond b) \wedge \Box(c \supset \Diamond d)) \supset ((a \vee c) \supset \Diamond(b \vee d))$$