

Corrigé de l'épreuve de moyenne durée

Exercice 1 (8 points) :

On considère le problème d'ordonnancement à quatre tâches T_1, T_2, T_3 et T_4 et deux machines m_1 et m_2 suivant :

- T_1 et T_2 sont des tâches d'un même job J_1 , et doivent être exécutées dans l'ordre T_1, T_2
- T_3 et T_4 sont des tâches d'un même job J_2 , et doivent être exécutées dans l'ordre T_3, T_4
- Les tâches T_1 et T_3 doivent être exécutées sur la machine m_1
- Les tâches T_2 et T_4 doivent être exécutées sur la machine m_2
- Les durées des tâches T_1, T_2, T_3 et T_4 sont, respectivement, 6, 10, 5 et 7
- Toutes les tâches sont non-préemptives
- La date de début au plus tôt est $t_d=1$ et la date de fin au plus tard est $t_f=35$

On s'intéresse à la recherche d'une solution réalisable, c'est-à-dire satisfaisant toutes les contraintes mais ne donnant pas forcément l'optimum du problème.

1. Modélisez le problème à l'aide d'un TCSP P
2. Donnez la représentation graphique de P
3. Donnez la représentation matricielle de P
4. Comment peut-on adapter l'algorithme GET (Générer et Tester) à un TCSP ?
5. Appliquez l'adaptation au TCSP P

Solution :

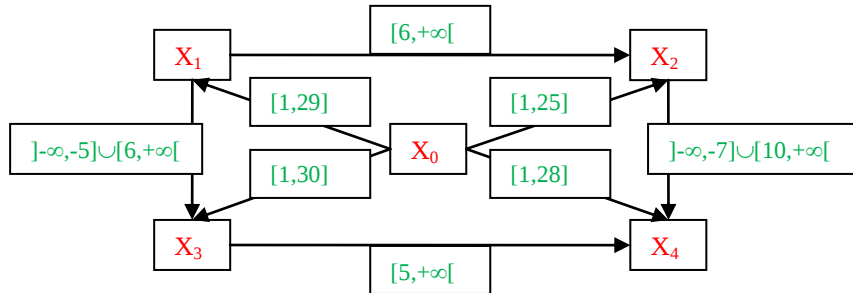
1) Modélisation à l'aide d'un TCSP $P=(X,C)$:

$X=\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$ avec X_0 variable origine du monde et $X_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, variable donnant le début de la tâche T_i . Les contraintes sont données par l'ensemble $C=\{c_1, \dots, c_8\}$ construit comme suit :

- $C_1 : (X_2 - X_1) \in [6, +\infty[$ (contrainte de précédence spécifiant que l'exécution de la tâche T_1 doit précéder celle de la tâche T_2)
- $C_2 : (X_4 - X_3) \in [5, +\infty[$ (contrainte de précédence spécifiant que l'exécution de la tâche T_3 doit précéder celle de la tâche T_4)
- $C_3 : (X_3 - X_1) \in]-\infty, -5] \cup [6, +\infty[$ (contrainte disjonctive spécifiant que l'exécution de la tâche T_1 ne doit pas chevaucher celle de la tâche T_3 , les deux tâches devant être exécutées sur la même machine m_1)
- $C_4 : (X_4 - X_2) \in]-\infty, -7] \cup [10, +\infty[$ (contrainte disjonctive spécifiant que l'exécution de la tâche T_2 ne doit pas chevaucher celle de la tâche T_4 , les deux tâches devant être exécutées sur la même machine m_2)
- $C_5 : (X_1 - X_0) \in [1, 29]$
- $C_6 : (X_1 - X_0) \in [1, 25]$
- $C_7 : (X_1 - X_0) \in [1, 30]$

- $C_8 : (X_1 - X_0) \in [1, 28]$

2) Représentation graphique de P :



3) Représentation matricielle de P :

$M_P =$

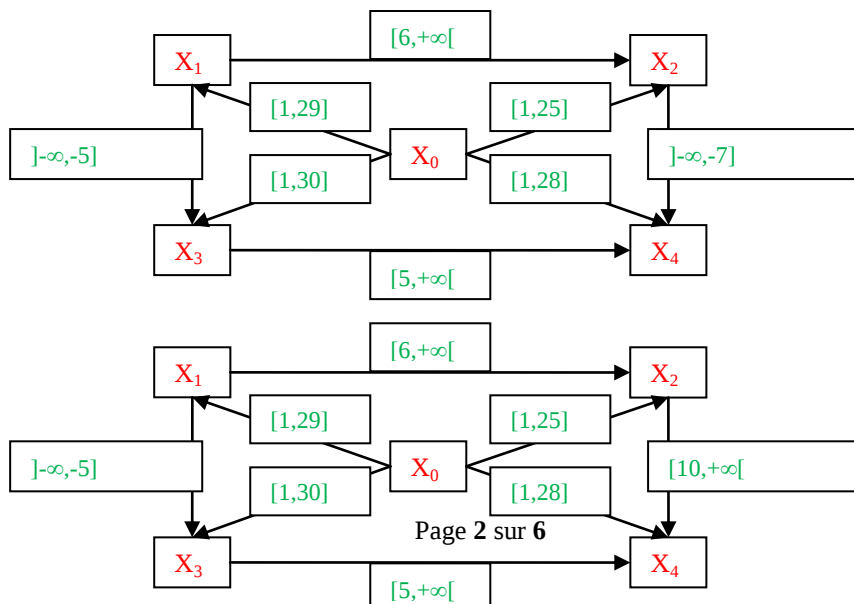
{0}	[1, 29]	[1, 25]	[1, 30]	[1, 28]
[-29, -1]	{0}	[6, +∞[	]-∞, -5] ∪ [6, +∞[	]-∞, +∞[
[-25, -1]	]-∞, -6]	{0}	]-∞, +∞[	]-∞, -7] ∪ [10, +∞[
[-30, -1]	]-∞, -6] ∪ [5, +∞[	]-∞, +∞[	{0}	[5, +∞[
[-28, -1]	]-∞, +∞[	]-∞, -10] ∪ [7, +∞[	]-∞, -5]	{0}

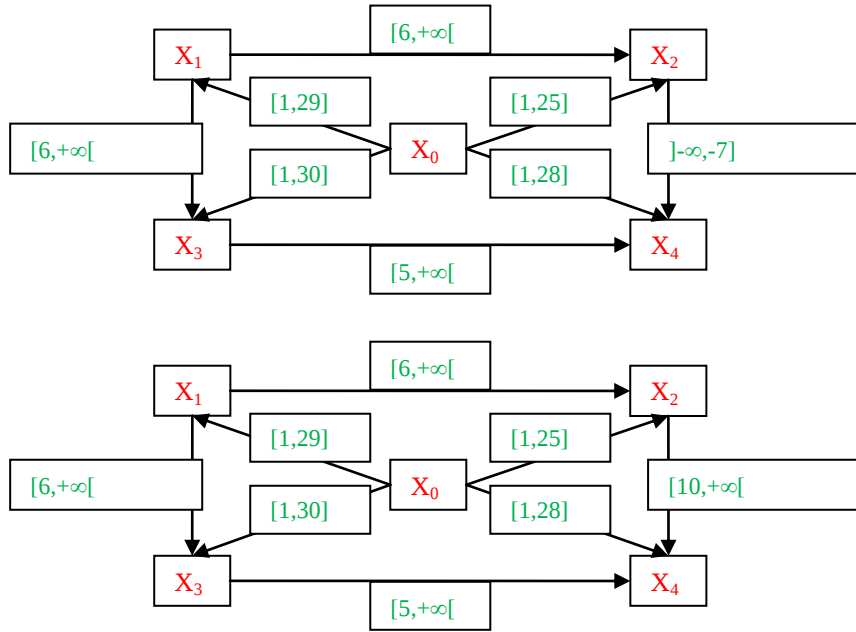
4) Adaptation de l'algorithme GET à un TCSP :

- Considérer l'ensemble $rc(P)$ de tous les raffinements convexes (STP) de P obtenus en instanciant chacun des arcs disjonctifs avec un des blocs convexes qui composent son étiquette
- Initialement, aucun élément de $rc(P)$ n'est marqué
- Considérer un élément non marqué Q de $rc(P)$
- Marquer Q
- Si PC2 appliqué à Q détecte la relation vide alors
 - Si tous les éléments de $rc(P)$ sont marqués alors retourner « P inconsistant »
 - Si non aller à c.
- Si non retourner « P consistant »

5) Application de l'adaptation au TCSP P :

- P présente deux arcs disjonctifs étiquetés chacun avec une union de deux blocs convexes
- $rc(P)$ contient donc quatre raffinements STP Q_1 , Q_2 , Q_3 et Q_4 dont les représentations graphiques respectives sont comme suit :



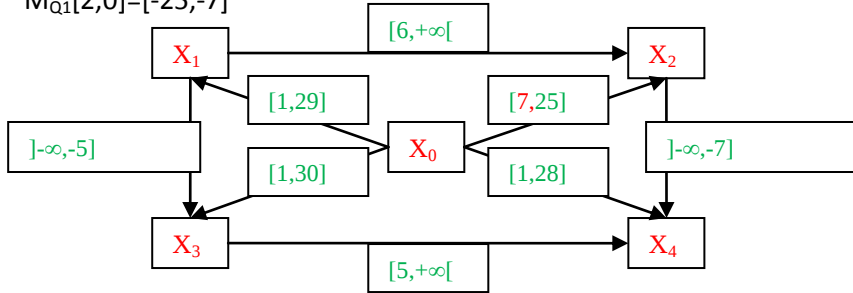


On prend le raffinement STP Q_1 et on applique PC2 : PC2 ne pourra pas détecter la relation vide vu que Q_1 est trivialement consistant, une de ses solutions étant $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4) = (0, 6, 19, 1, 12)$ obtenue en plaçant la tâche T_3 d'abord, suivie de la tâche T_1 , suivie de la tâche T_4 , suivie de la tâche T_2 , sans le moindre chevauchement entre les tâches, sans laisser d'espace entre une tâche et la suivante, et en faisant commencer le projet à la date $t=1$. Mais nous montrons quand même, chose non nécessaire, les premières étapes de l'application de PC2 à Q_1 . La file est initialisée comme suit : $Q = \{(X_0, X_1), (X_0, X_2), (X_0, X_3), (X_0, X_4), (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_2, X_4), (X_3, X_4)\}$. On prend l'arc (X_0, X_1) de la file (k dans l'ensemble $\{2, 3, 4\}$) :

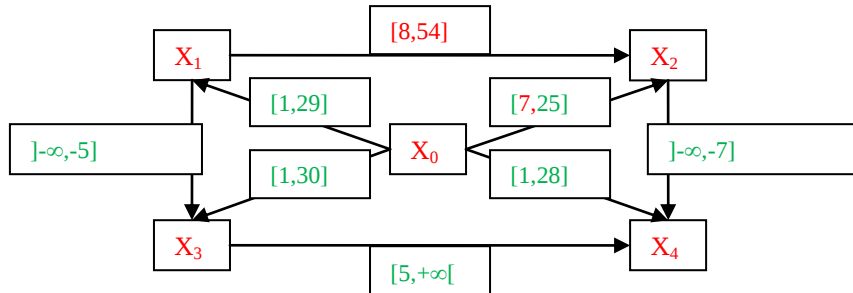
$Q = \{(\mathbf{X_0, X_1}), (X_0, X_2), (X_0, X_3), (X_0, X_4), (X_1, X_2), (X_1, X_3), (X_2, X_4), (X_3, X_4)\}$

• $K=2$:

- $M_{Q_1}[0,2] = M_{Q_1}[0,2] \cap M_{Q_1}[0,1] \circ M_{Q_1}[1,2] = [1,25] \cap [7,+\infty[= [7,25]$ (l'arc (X_0, X_2) modifié mais déjà dans la file)
- $M_{Q_1}[2,0] = [-25,-7]$

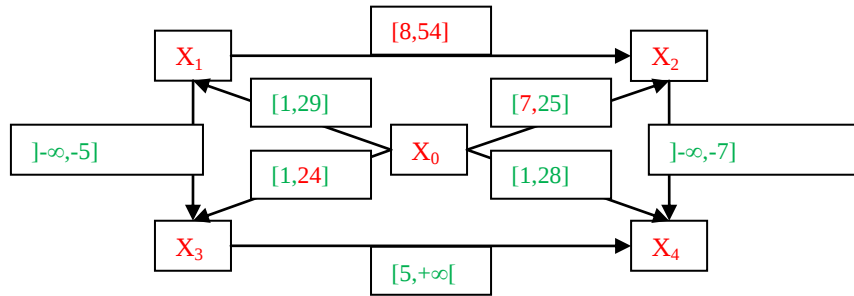


- $M_{Q_1}[2,1] = M_{Q_1}[2,1] \cap M_{Q_1}[2,0] \circ M_{Q_1}[0,1] = [-\infty,-6] \cap [-54,-8] = [-54,-8]$
- $M_{Q_1}[1,2] = [8,54]$ (l'arc (X_1, X_2) modifié mais déjà dans la file)

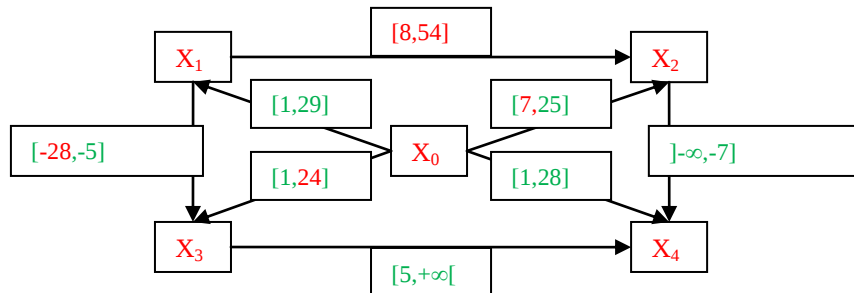


• $K=3$:

- $M_{Q1}[0,3]=M_{Q1}[0,3]\cap M_{Q1}[0,1]\circ M_{Q1}[1,3]=[1,30]\cap]-\infty,24]=[1,24]$ (l'arc (X_0,X_3) modifié mais déjà dans la file)



- $M_{Q1}[3,0]=[-24,-1]$
- $M_{Q1}[3,1]=M_{Q1}[3,1]\cap M_{Q1}[3,0]\circ M_{Q1}[0,1]=[5,+\infty[\cap[-23,28]=[5,28]$
- $M_{Q1}[1,3]=[-28,-5]$ (l'arc (X_1,X_3) modifié mais déjà dans la file)



On continue ainsi avec $k=4$, puis avec les autres arcs de la file, en ajoutant à chaque fois tout arc modifié à la file s'il n'y est pas déjà, jusqu'à ce que cette dernière devienne vide. La suite est laissée à l'étudiant.

Exercice 2 (7 points) :

On considère la description qualitative suivante des trois villes Alger, Béjaia et Oran et d'un bateau :

- Béjaia est à l'est d'Alger
- Oran est à l'ouest d'Alger
- Le bateau est au nord-est d'Alger
- Le bateau est au nord-ouest de Béjaia
- Le bateau est au nord-ouest d'Oran

1. Modélisez la description à l'aide d'un CSP P de directions cardinales
2. Donnez la représentation graphique de P
3. Donnez la représentation matricielle de P
4. Montrez que l'algorithme de consistance de chemin PC2 détecte que P est inconsistant.

Solution :

- 1) **Modélisation à l'aide d'un CSP de directions cardinales $P=(X,C)$:**

$X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$, avec X_1,X_2,X_3 et X_4 variables désignant, respectivement, les positions d'Alger, de Béjaia, d'Oran et du bateau. Les contraintes sont données par l'ensemble $C=\{c_1,...,c_5\}$ construit comme suit :

$C_1 : \{E\}(X_2,X_1)$

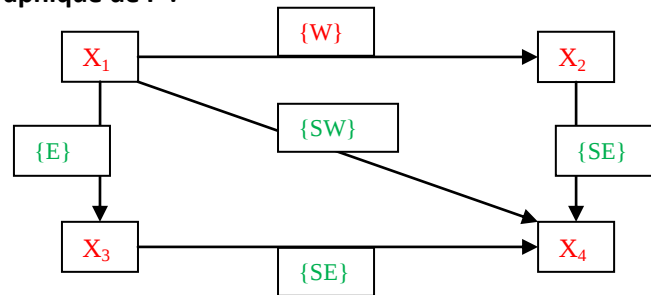
$C_2 : \{W\}(X_3,X_1)$

$C_3 : \{NE\}(X_4,X_1)$

$C_4 : \{NW\}(X_4,X_2)$

$C_5 : \{NW\}(X_4,X_3)$

2) Représentation graphique de P :



3) Représentation matricielle de P :

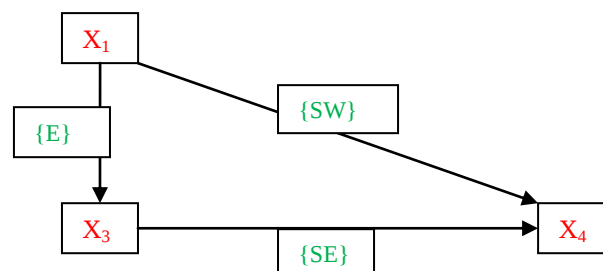
MP=

{EQ}	{W}	{E}	{SW}
{E}	{EQ}	?	{SE}
{W}	?	{EQ}	{SE}
{NE}	{NW}	{NW}	{EQ}

avec ? désignant la relation universelle de l'algèbre des directions cardinales, et qui consiste en l'ensemble des neuf relations atomiques de l'algèbre : $\{EQ,N,NE,E,SE,S,SW,W,NW\}$

4) Détection de l'inconsistance par l'algorithme PC2 :

Le sous-réseau de P restreint aux variables X_1, X_3 et X_4 est $P_{\{X_1,X_3,X_4\}}$ et est donné par sa représentation graphique

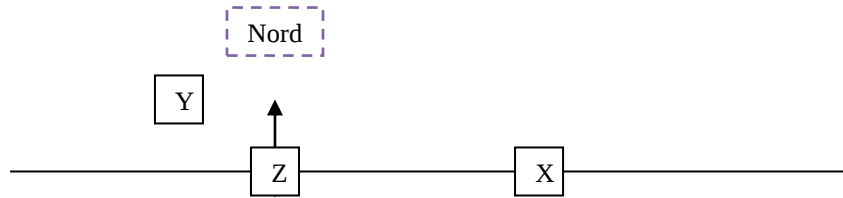


Le sous-réseau est trivialement inconsistant : Oran étant à l'ouest d'Alger, le bateau ne peut pas être en même au nord-ouest d'Oran et au nord-est d'Alger. Comme le sous-réseau est de taille 3, l'algorithme de consistance de chemin PC2 appliqué à P peut détecter son inconsistance et, avec, l'inconsistance de P. Pour le vérifier, appliquons PC2 à P. La file manipulée par PC2 sera initialisée comme suit : $Q=\{(X_1,X_2),(X_1,X_3),(X_1,X_4),(X_2,X_4),(X_3,X_4)\}$. On prend l'arc (X_1,X_3) de la file pour propagation (k dans l'ensemble $\{2,4\}$) :

K=4 :

$$M_p[1,4] = M_p[1,4] \cap M_p[1,3] \circ M_p[3,4] = \{SW\} \cap \{E\} \circ \{SE\} = \{SW\} \cap \{SE\} = \emptyset$$

La composition des deux relations atomiques $\{E\}$ et $\{SE\}$ est $\{E\} \circ \{SE\} = \{SE\}$: Si $\{E\}(X,Z)$ et $\{SE\}(Z,Y)$ alors $\{SE\}(X,Y)$ (voir illustration ci-dessous) :



Exercice 3 (5 points) :

Donnez un programme Prolog de fusion de deux listes triées, le résultat devant être une liste triée.

Solution :

```
fusion([],L,L).
```

```
fusion((L,[],L).
```

```
fusion([X|L1],[Y|L2],[X|L]) :-X<=Y,fusion(L1,[Y|L2],L).
```

```
fusion(L1,[X|L2],[X|L]) :-fusion(L1,L2,L).
```