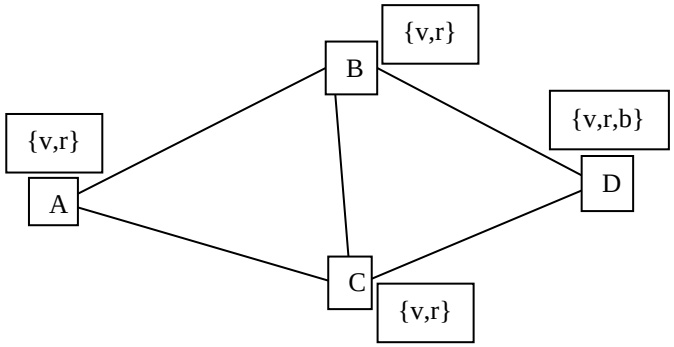
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté d'Electronique et d'Informatique
Département d'Informatique
LMD Master 2ème Année ''Systèmes Informatiques Intelligents'' 2013/2014
Module ''Programmation par Contraintes''
Date : 15/12/2013 (par Mr Isli)

Corrigé de l'interrogation

Exercice 1 (10 points=1,5+0,5+0,5+1+1+1,5+2+2) :
On considère l'instance ci-dessous du problème de coloriage d'un graphe (pour chacun des sommets A, B, C et D, l'ensemble l'étiquetant constitue l'ensemble des couleurs avec lesquelles il peut être colorié) :

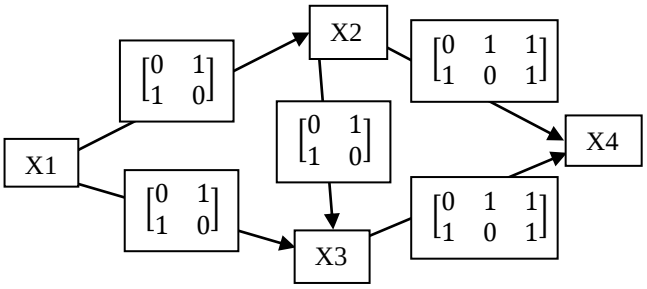


1) Modélisez l'instance à l'aide d'un problème de satisfaction de contraintes (CSP) P=(X,D,C).
2) Le CSP P est trivialement inconsistant. Donnez-en une explication.
3) L'algorithme de consistance d'arc AC3 permet-il de détecter l'inconsistance de P ?
4) Donnez une représentation graphique de P.
5) Donnez une représentation matricielle de P.
6) Déroulez l'algorithme de consistance de chemin PC2 sur le CSP P.
7) Déroulez l'algorithme SRA (Simple Retour Arrière) sur le CSP P.
8) Déroulez l'algorithme FC (Forward Checking) sur le CSP P.

Solution :
1) Modélisation de l'instance à l'aide d'un CSP P=(X,D,C) :
   - $X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ (les variables X_1, X_2, X_3 et X_4 correspondent, respectivement, aux sommets A, B, C et D)
   - $D(X_1)=D(X_2)=D(X_3)=\{v,r\}$ et $D(X_4)=\{v,r,b\}$
   - $C=\{c_1:X_1\neq X_2, c_2:X_1\neq X_3, c_3:X_2\neq X_3, c_4:X_2\neq X_4, c_5:X_3\neq X_4\}$
2) Le CSP est trivialement inconsistant car le sous-graphe se réduisant au triangle ABC ne peut pas être colorié avec seulement deux couleurs, v et r, sans que deux sommets adjacents aient la même couleur.
3) L'algorithme de consistance d'arc AC3 ne détectera pas l'inconsistance du CSP P vu que le CSP est déjà consistant d'arc. En effet, si on prend une arête quelconque (x,y) du graphe, si on colorie le sommet x avec une couleur a, on peut toujours colorier le sommet y avec une couleur b différente de a. En termes de CSP, AC3 initialisera sa file Q aux paires

$(X_1,X_2),(X_2,X_1),(X_1,X_3),(X_3,X_1),(X_2,X_3),(X_3,X_2),(X_2,X_4),(X_4,X_2),(X_3,X_4),(X_4,X_3)$. Quand l'algorithme prend une paire (Xi,Xj) de la file pour éventuellement filtrer le domaine de Xi, il se rendra compte qu'un tel filtrage est impossible vu que pour toute valeur du domaine de Xi, il sera toujours possible de choisir une valeur du domaine de Xj qui lui est différente.

4) Représentation graphique :



5) Représentation matricielle :

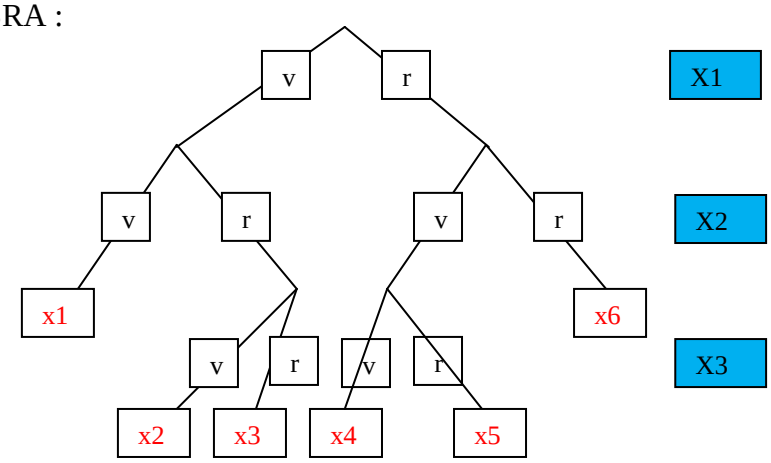
$$M_P=\begin{bmatrix} I2 & m1 & m1 & U23 \\ m1 & I2 & m1 & m2 \\ m1 & m1 & I2 & m2 \\ U32 & m3 & m3 & I3 \end{bmatrix}$$

Avec :

- $m1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
- $m2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$
- $m3=(m2)^t$
- $U_{i,j}$ matrice universelle (des 1 partout) à i lignes et j colonnes ; I_i matrice (carrée) identité (des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs) à i lignes et i colonnes ; $(m_i)^t$ matrice transposée de m_i.

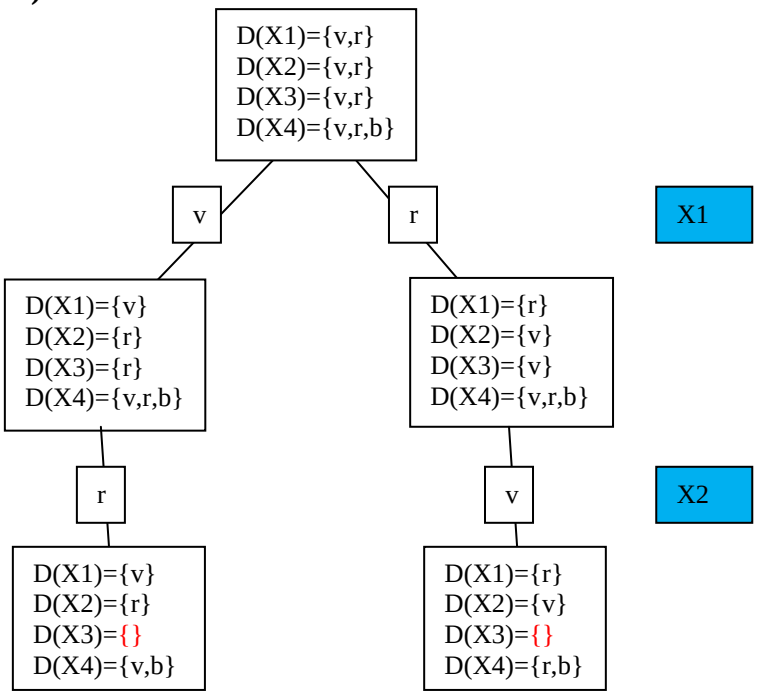
6) L'opérartion MP[1,3]=MP[1,3]∩MP[1,2]°MP[2,2]°MP[2,3] conduit à MP[1,3]=$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ car MP[2,2] est la matrice identité et MP[1,2]°MP[2,3]= $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Donc l'algorithme PC2 détectera que P est inconsistant.

7) SRA :



Echec	Explication
x1	l'instanciation partielle ne satisfait pas c1
x2	l'instanciation partielle ne satisfait pas c2
x3	l'instanciation partielle ne satisfait pas c3
x4	l'instanciation partielle ne satisfait pas c3
x5	l'instanciation partielle ne satisfait pas c2
x6	l'instanciation partielle ne satisfait pas c1

8) FC :



Exercice 2 (5 points=2+2+1) :

1) Composition de deux contraintes TCSP : quelle est la contrainte sur les variables X_1 et X_3 inférée par composition des deux contraintes $(X_2\text{-}X_1)\in[2,20]$ et $(X_3\text{-}X_2)\in[15,20]\cup[25,30]$?
2) Composition de deux contraintes de directions cardinales : quelle est la contrainte sur les variables X_1 et X_3 inférée par composition des deux contraintes $\{SE,NW\}(X_1,X_2)$ et $\{SE\}(X_2,X_3)$?
3) Composition de deux contraintes d'intervalles : quelle est la contrainte sur les variables X_1 et X_3 inférée par composition des deux contraintes $\{o,oi\}(X_1,X_2)$ et $\{m\}(X_2,X_3)$?

Solution :

1) Les deux contraintes $(X_2\text{-}X_1)\in[2,20]$ et $(X_3\text{-}X_2)\in[15,20]\cup[25,30]$ sont équivalentes à $(X_2\text{-}X_1)\in[2,20]$ et $\{(X_3\text{-}X_2)\in[15,20]$ ou $(X_3\text{-}X_2)\in[25,30]\}$. En distribuant, on obtient $\{(X_2\text{-}X_1)\in[2,20]$ et $(X_3\text{-}X_2)\in[15,20]\}$ ou $\{(X_2\text{-}X_1)\in[2,20]$ et $(X_3\text{-}X_2)\in[25,30]\}$. L'écriture sous forme d'inégalités linéaires donne :

$$\begin{cases} 2 \le X2 - X1 \le 20 \\ 15 \le X3 - X2 \le 20 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 \le X2 - X1 \le 20 \\ 25 \le X3 - X2 \le 30 \end{cases}$$

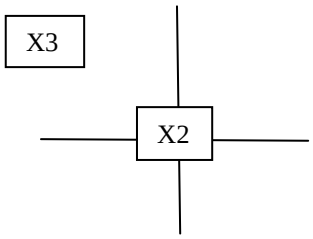
L'addition membre à membre donne :

$17 \le X3\text{-}X1 \le 40$ ou $27 \le X3\text{-}X1 \le 50$

Conclusion : la composition des contraintes $(X_2\text{-}X_1)\in[2,20]$ et $(X_3\text{-}X_2)\in[15,20]\cup[25,30]$ est la contrainte $(X_3\text{-}X_1)\in[17,40]\cup[27,50]$, qui est équivalente à la contrainte convexe $(X_3\text{-}X_1)\in[17,50]$.

2) Les deux contraintes $\{SE,NW\}(X_1,X_2)$ et $\{SE\}(X_2,X_3)$ sont équivalentes à $[\{SE\}(X_1,X_2)$ et $\{SE\}(X_2,X_3)]$ ou $[\{NW\}(X_1,X_2)$ et $\{SE\}(X_2,X_3)]$.

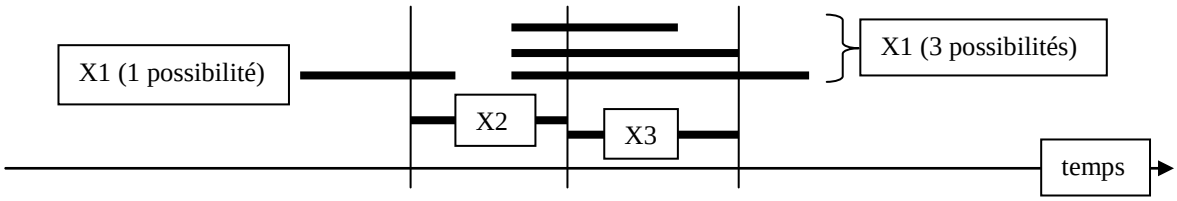
   La contrainte $\{SE\}(X_2,X_3)]$ est schématisée comme suit (X3 est dans le quart de plan supérieur gauche délimité par l'horizontale et la verticale passant par X2):



   Combinée avec la contrainte $\{NW\}(X_1,X_2)$ (X1 est au nord-ouest de X2), on déduit que X1 peut se trouver dans n'importe quelle position du quart de plan supérieur gauche de la figure ci-dessus. Il s'ensuit que toutes les relations sont possibles entre X1 et X3.

   Conclusion : la contrainte sur les variables X_1 et X_3 inférée par composition des deux contraintes $\{SE,NW\}(X_1,X_2)$ et $\{SE\}(X_2,X_3)$est la contrainte universelle U(X1,X3). Dans le cas de l'algèbre des directions cardinales, la relation universelle U est synonyme de l'ensemble des neuf relations atomiques de l'algèbre.

3) des deux contraintes $\{o,oi\}(X_1,X_2)$ et $\{m\}(X_2,X_3)$ sont équivalentes à $[\{o\}(X_1,X_2)$ et $\{m\}(X_2,X_3)]$ ou $[\{oi\}(X_1,X_2)$ et $\{m\}(X_2,X_3)]$. La composition est illustrée par le schéma ci-dessous :



   Conclusion : la contrainte sur les variables X_1 et X_3 inférée par composition des deux contraintes $\{o,oi\}(X_1,X_2)$ et $\{m\}(X_2,X_3)$ est $\{<,o,fi,di\}(X_1,X_3)$.