

Corrigé de l'examen de rattrapage

Exercice 1 (8 points=1+<1+1+1>+1+1+2) :

On considère le CSP binaire discret $P=(X,D,C)$ suivant :

- $X = \{X_1, X_2, X_3\}$
- $D(X_1)=D(X_2)=D(X_3)=\{3,6,9\}$
- $C = \{c_1, c_2\}$ avec
 - $c_1 : X_1 < X_2$
 - $c_2 : X_2 < X_3$

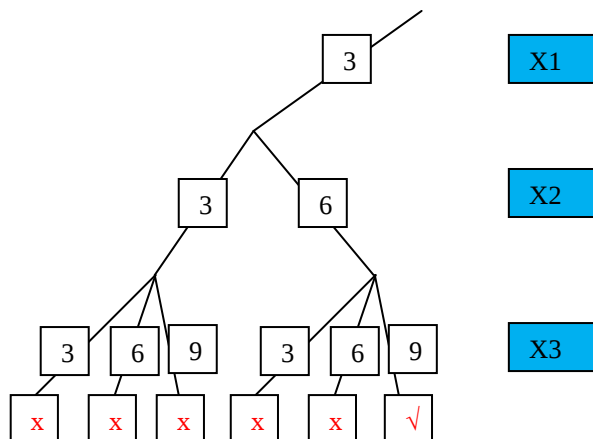
- 1) Le CSP P est trivialement consistant. Donnez-en une explication.
- 2) En choisissant l'ordre statique X_1, X_2, X_3 d'instanciation des variables ; et l'ordre statique 3, 6, 9 de choix des valeurs du domaine pour chacune des variables :
 - a. Déroulez l'algorithme GET (Générer et Tester) sur le CSP P.
 - b. Déroulez l'algorithme SRA (Simple Retour Arrière) sur le CSP P.
 - c. Déroulez l'algorithme FC (Forward Checking) sur le CSP P.
- 3) Donnez une représentation graphique de P.
- 4) Donnez une représentation matricielle de P.
- 5) Appliquez l'algorithme de consistance de chemin PC2 à P.

Solution :

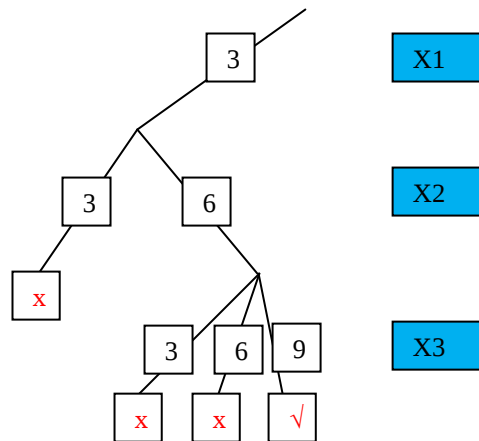
- 1) Le CSP est trivialement consistant : l'instanciation $(X_1, X_2, X_3) = (3, 6, 9)$ est solution puisqu'elle satisfait chacune des deux contraintes du CSP.

- 2) Ordres X_1, X_2, X_3 et 3, 6, 9 :

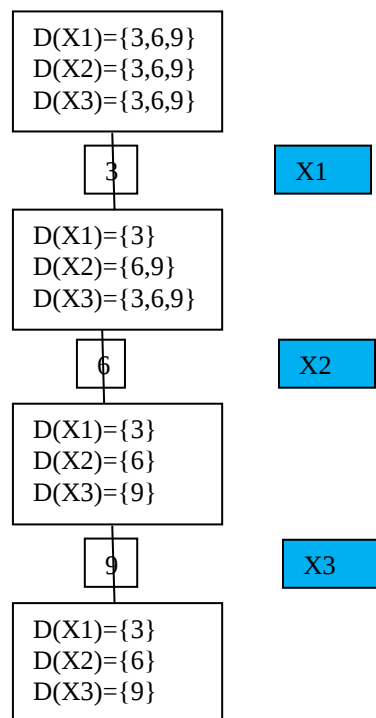
- a. GET



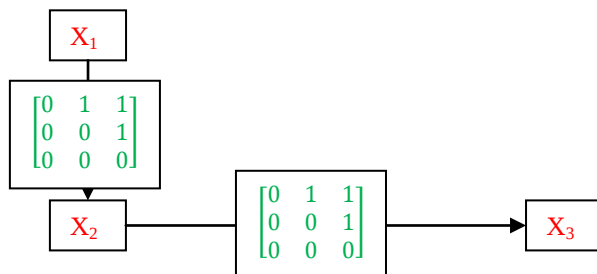
b. SRA



c. FC



3)



$$4) M_p = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

5) Application de PC2 : la file est initialisée aux arcs sur lesquels il y a une contrainte :
 $Q = \{(X1, X2), (X2, X3)\}$

On prend l'arc (X1, X2) de la file et on l'en supprime : $Q = \{(X1, X2), (X2, X3)\}$ (en rouge, supprimé). K varie de 1 à 3 :

K=1 :

$$M_p[1,1] = M_p[1,1] \cap M_p[1,2] \circ M_p[2,2] \circ M_p[2,1] = M_p[1,1] \cap M_p[1,2] \circ M_p[2,1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On rajoute l'arc (X1, X1) à la file vu que son étiquette a été modifiée :
 $Q = \{(X1, X2), (X2, X3), (X1, X1)\}$. Nouvelle configuration :

$$M_p = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$M_p[1,2] = M_p[1,2] \cap M_p[1,1] \circ M_p[1,1] \circ M_p[1,2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cap$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

K=2 :

$M_p[1,2] = M_p[1,2] \cap M_p[1,2] \circ M_p[2,2] \circ M_p[2,2]$ (aucune modification vu que $M_p[2,2]$ est la matrice identité)

$$M_p[2,2] = M_p[2,2] \cap M_p[2,1] \circ M_p[1,1] \circ M_p[1,2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On rajoute l'arc (X2,X2) à la file vu que son étiquette a été modifiée :
 $Q=\{(X1,X2),(X2,X3),(X1,X1),(X2,X2)\}.$

Nouvelle configuration :

$$M_P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

K=3 :

$$M_P[1,3] = M_P[1,3] \cap M_P[1,2] \circ M_P[2,2] \circ M_P[2,3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_P[3,1] \text{ doit aussi être modifié : } M_P[3,1] = (M_P[1,3])^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On rajoute l'arc (X1,X3) à la file vu que son étiquette a été modifiée :
 $Q=\{(X1,X2),(X2,X3),(X1,X1),(X2,X2),(X1,X3)\}.$

Nouvelle configuration :

$$M_P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$M_P[3,2] = M_P[3,2] \cap M_P[3,1] \circ M_P[1,1] \circ M_P[1,2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cap$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cap$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_P[2,3] \text{ doit aussi être modifié : } M_P[2,3] = (M_P[3,2])^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nouvelle configuration :

$$M_p = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

L'arc (X2,X3) a été modifié mais il est déjà dans la file qui reste donc inchangée :

$$Q = \{(X1,X2), (X2,X3), (X1,X1), (X2,X2), (X1,X3)\}.$$

On prend l'arc suivant de la file, l'arc (X2,X3). La file devient :

$$Q = \{(X1,X2), (X2,X3), (X1,X1), (X2,X2), (X1,X3)\}. K \text{ variera de } 1 \text{ à } 3 :$$

K=1 :

$$M_p[2,1] = M_p[2,1] \cap M_p[2,3] \circ M_p[3,3] \circ M_p[3,1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_p[1,2] \text{ doit aussi être modifié : } M_p[1,2] = (M_p[2,1])^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nouvelle configuration :

$$M_p = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

L'arc (X1,X2), modifié, doit être rajouté à la file :

$$Q = \{(X1,X2), (X2,X3), (X1,X1), (X2,X2), (X1,X3), (X1,X2)\}.$$

$M_p[1,3]$ est minimale (le CSP étant consistant), et ne peut donc être modifiée.

K=2 :

$$M_p[2,2] = M_p[2,2] \cap M_p[2,3] \circ M_p[3,3] \circ M_p[3,2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nouvelle configuration :

$$M_P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

L'arc (X2,X2) a été modifié mais il est déjà dans la file.

$M_P[2,3]$ est minimale.

K=3 :

$M_P[2,3]$ est minimale.

$$M_P[3,3] = M_P[3,3] \cap M_P[3,2] \circ M_P[2,2] \circ M_P[2,3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On rajoute l'arc (X3,X3) à la file vu que son étiquette a été modifiée :

$Q = \{(X1,X2), (X2,X3), (X1,X1), (X2,X2), (X1,X3), (X1,X2), (X3,X3)\}$.

Nouvelle configuration :

$$M_P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

On prend l'arc suivant de la file, l'arc (X1,X1) :

$Q = \{(X1,X2), (X2,X3), (X1,X1), (X2,X2), (X1,X3), (X1,X2), (X3,X3)\}$. K varie de 2 à 3 :

K=2 : $M_P[1,2]$ et $M_P[2,1]$ sont minimales.

K=3 : $M_P[1,3]$ et $M_P[3,1]$ sont minimales.

On prend l'arc suivant de la file, l'arc (X2,X2) :

$Q = \{(X1,X2), (X2,X3), (X1,X1), (), (X2,X2), (X1,X3), (X1,X2), (X3,X3)\}$. K dans l'ensemble {1,3} :

K=1 : $M_P[2,1]$ et $M_P[1,2]$ sont minimales.

K=3 : $M_P[2,3]$ et $M_P[3,2]$ sont minimales.

On prend l'arc suivant de la file, l'arc (X1,X3) :

$Q = \{(X1,X2), (X2,X3), (X1,X1), (), (X2,X2), (X1,X3), (X1,X2), (X3,X3)\}$. K varie de 1 à 3 :

K=1 :

$$M_p[1,1] = M_p[1,1] \cap M_p[1,3] \circ M_p[3,3] \circ M_p[3,1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nouvelle configuration :

$$M_p = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Toutes les étiquettes contiennent un seul 1. Comme le CSP est consistant, les étiquettes sont désormais toutes minimales et PC2 ne peut plus les réduire. Comme les domaines ont été tous réduits à des singletons, le CSP admet une unique solution, la solution $(X_1, X_2, X_3) = (3, 6, 9)$.

Exercice 2 (3 points=1,5+1,5) :

- 1) Calculez la composition $c = c_1 \circ c_2$ des deux contraintes $c_1 : (X_2 - X_1) \in [6, 10] \cup [60, 65]$ et $c_2 : (X_3 - X_2) \in [10, 15] \cup [25, 50]$ d'un TCSP P. Expliquez.
- 2) Calculez la composition $R = R_1 \circ R_2$ des deux relations $R_1 = \{N, NE\}$ et $R_2 = \{SE, E, NE\}$ de l'algèbre des directions cardinales. Expliquez.

Solution :

- 1) $c : (X_3 - X_1) \in [16, 25] \cup [31, 60] \cup [70, 80] \cup [85, 115]$
- 2) $R = \{N\} \circ \{SE\} \cup \{N\} \circ \{E\} \cup \{N\} \circ \{NE\} \cup \{NE\} \circ \{SE\} \cup \{NE\} \circ \{E\} \cup \{NE\} \circ \{NE\}$
 $= \{SE, E, NE\} \cup \{NE\} \cup \{NE\} \cup \{SE, E, NE\} \cup \{NE\} \cup \{NE\}$
 $= \{SE, E, NE\}$

Exercice 3 (4points=0,5+1,5+1+1) :

On considère le CSP binaire discret $P = (X, D, C)$ suivant :

- $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$
- $D(X_1) = D(X_2) = \{a, b\}$; $D(X_3) = \{b, c\}$; $D(X_4) = \{a, c\}$
- $C = \{c_1 : X_1 \neq X_2, c_2 : X_2 \neq X_3, c_3 : X_1 \neq X_4, c_4 : X_3 \neq X_4\}$

1. Appliquez l'algorithme de consistance d'arc AC3 à P.
2. Donnez une représentation graphique du CSP de départ P.
3. Quelle est la contrainte sur X_1 et X_3 inférée par composition des contraintes c_1 et c_2 .
4. Quelle est la contrainte sur X_2 et X_4 inférée par composition des contraintes c_2 et c_4 .

Solution :

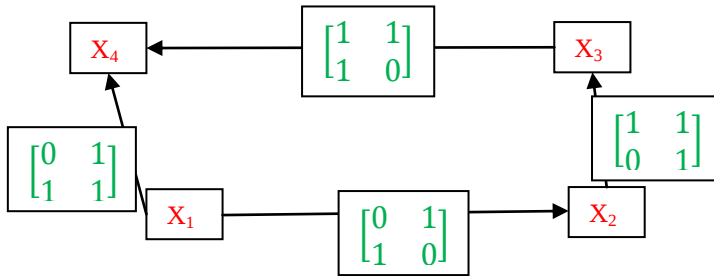
1. L'algorithme AC3 appliqué à P initialiserait sa file comme suit :
 $F = \{(X_1, X_2), (X_2, X_1), (X_2, X_3), (X_3, X_2), (X_1, X_4), (X_4, X_1), (X_3, X_4), (X_4, X_3)\}$. L'algorithme,

néanmoins, ne modifierait aucunement les domaines des variables pour la raison suivante :
 Pour toute paire (X_i, X_j) appartenant à F , pour tout élément V_i de $D(X_i)$, V_i a un correspondant dans $D(X_j)$: il existe $V_j \in D(X_j)$ tel que $V_i \neq V_j$ (l'unique contrainte portant sur X_i et X_j étant $X_i \neq X_j$). En d'autres termes, le CSP P est consistant d'arc.

2. Une représentation graphique de P (qui n'est pas unique) est le graphe orienté étiqueté $G_P = (V, E, l)$, dont les sommets sont les variables de P , et les arcs les paires (X_i, X_j) telles que $i < j$ et il existe une contrainte de P entre X_i et X_j :

- $V = X$
- $E = \{(X_1, X_2), (X_1, X_4), (X_2, X_3), (X_3, X_4)\}$
- L'étiquette d'un arc (X_i, X_j) , $l(X_i, X_j)$, est l'intersection des matrices $M_k(X_i, X_j)$ représentant les relations $R_k(X_i, X_j)$ associées aux contraintes c_k portant sur X_i et X_j

$$\begin{aligned} \circ \quad l(X_1, X_2) &= M_1(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \circ \quad l(X_2, X_3) &= M_2(X_2, X_3) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \circ \quad l(X_1, X_4) &= M_3(X_1, X_4) = \begin{bmatrix} a & c \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \circ \quad l(X_3, X_4) &= M_4(X_3, X_4) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



3. La contrainte sur X_1 et X_3 inférée par composition de c_1 et c_2 est la contrainte c_{13} dont la relation associée est représentée par la matrice $M_{13}(X_1, X_3)$ qui est la composition de $M_1(X_1, X_2)$ et $M_2(X_2, X_3)$:

$$M_{13}(X_1, X_3) = M_1(X_1, X_2) \circ M_2(X_2, X_3) = \begin{bmatrix} a & b \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. La contrainte sur X_2 et X_4 inférée par composition de c_2 et c_4 est la contrainte c_{24} dont la relation associée est représentée par la matrice $M_{24}(X_2, X_4)$ qui est la composition de $M_2(X_2, X_3)$ et $M_4(X_3, X_4)$:

$$M_{24}(X_2, X_4) = M_2(X_2, X_3) \circ M_4(X_3, X_4) = \begin{bmatrix} a & b \\ a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a & c \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ a & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 (5 points) :

Donnez un programme Prolog supprimant d'une liste, pour tout élément y ayant plus d'une occurrence, toutes les occurrences autres que la première.

Solution :

```
reduction(L1,L2):-supp(L1,[],L2).
supp([],[],[]).
Supp([],_,_).
supp([X|L1],L2,L3):-element(X,L2),supp(L1,L2,L3).
supp([X|L1],L2,[X|L3]):-supp(L1,[X|L2],[X|L3]).
element(X,[X|_]).
element(X,[Y|L]):-element(X,L).
```