

USTHB - FEI - Département d'Informatique
Master 2 "Systèmes Informatiques Intelligents" 2015/2016
Module "Programmation par Contraintes"
Date : 24/01/2016 <12h00-13h30>

Corrigé de l'examen de rattrapage

Exercice 1 (7 points)

On considère l'instance suivante du problème SAT :

- **Instance** : $C = (a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg c)$
- **Question** : C est-elle satisfiable ?

- 1) Modélisez l'instance à l'aide d'un CSP binaire discret $P = (X, D, C)$
- 2) Donnez la représentation graphique de P
- 3) Donnez la représentation matricielle de P
- 4) Appliquez l'algorithme de consistance d'arc AC3 au CSP P
- 5) Appliquez l'algorithme de recherche SRA au CSP P

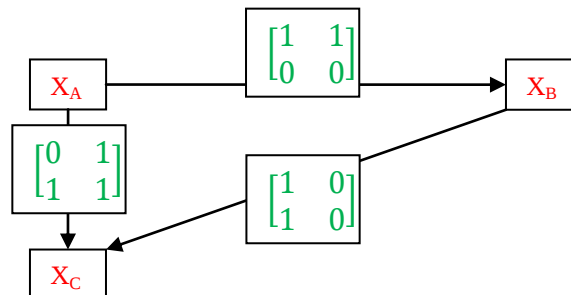
Solution :

- 1) $P = (X, D, C)$, avec :

- $X = \{X_A, X_B, X_C\}$
- $D(X_i) = \{V, F\}$ (V pour Vrai, F pour Faux)
- $C = \{C_1 : X_A \vee X_B = V,$
 $C_2 : X_A \vee \neg X_B = V,$
 $C_3 : X_B \vee X_C = V,$
 $C_4 : \neg X_B \vee X_C = V,$
 $C_5 : \neg X_A \vee \neg X_C = V\}$

- 2) $G_P = (X, E, I)$, avec :

- $E = \{(X_A, X_B), (X_A, X_C), (X_B, X_C)\}$
- $I(X_A, X_B) = M_1(X_A, X_B) \cap M_2(X_A, X_B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $I(X_A, X_C) = M_5(X_A, X_C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
 $I(X_B, X_C) = M_3(X_B, X_C) \cap M_4(X_B, X_C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



3) $M_P = \begin{bmatrix} I & a & b \\ d & I & c \\ e & f & I \end{bmatrix}$ avec :

- $a = I(X_A, X_B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d = a^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $b = I(X_A, X_C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $e = b^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $c = I(X_B, X_C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $f = c^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) **AC3 :**

Initialement : $Q = \{(X_A, X_B), (X_B, X_A), (X_A, X_C), (X_C, X_A), (X_B, X_C), (X_C, X_B)\}$

X_i	X_A	X_B	X_C
$D(X_i)$	{V, F}	{V, F}	{V, F}

On prend l'arc (X_A, X_B) de la file : la valeur F de $D(X_A)$ n'a pas de support dans $D(X_B)$: on la supprime. Rien à ajouter à la file.

Nouvelle situation : $Q = \{(X_B, X_A), (X_A, X_C), (X_C, X_A), (X_B, X_C), (X_C, X_B)\}$

X_i	X_A	X_B	X_C
$D(X_i)$	{V}	{V, F}	{V, F}

On passe à l'arc (X_B, X_A) : Rien à supprimer de $D(X_B)$.

On passe à l'arc (X_A, X_C) : Rien à supprimer de $D(X_A)$.

On passe à l'arc (X_C, X_A) : la valeur V de $D(X_C)$ n'a plus de support dans $D(X_A)$: on la supprime.

Nouvelle situation : $Q = \{(X_B, X_C), (X_C, X_B)\}$

X_i	X_A	X_B	X_C
$D(X_i)$	{V}	{V, F}	{F}

On passe à l'arc (X_C, X_B) : l'unique valeur F de $D(X_C)$ n'a plus de support dans $D(X_B)$: on la supprime, et $D(X_C)$ devient vide.

Conclusion : le CSP P est inconsistant et l'algorithme de consistance d'arc AC3 détecte son inconsistance.

5) **SRA :**

Le déroulement ci-dessous de l'algorithme SRA sur P suit l'ordre statique X_A, X_B, X_C d'instanciation des variables ; et l'ordre statique V, F de choix des valeurs du domaine commun {V, F}. Les feuilles de l'arbre de recherche donne, pour chacun des six échecs $e_1, \dots, e_6$, une des contraintes l'ayant causé, sur la variable en cours d'instanciation et une variable déjà instanciée.

On considère le problème d'ordonnancement de type job shop donné par la table ci-dessous, qui consiste en deux jobs J1 et J2 devant passer chacun par deux machines M1 et M2 :

	1 ^{ère} tâche : <machine, durée>	2 ^{ème} tâche : <machine, durée>
Job J1	<M1,4>	<M2,3>
Job J2	<M1,2>	<M2,5>

On s'intéresse à la recherche d'une solution réalisable, c'est-à-dire satisfaisant toutes les contraintes mais ne donnant pas forcément l'optimum du problème.

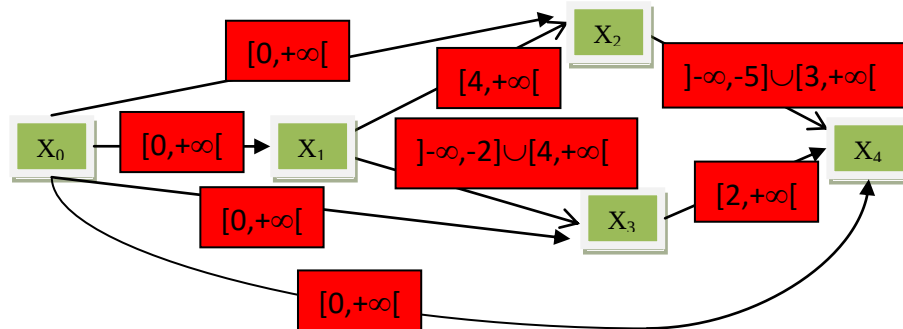
- 1) Modélisez le problème à l'aide d'un TCSP $P=(X,C)$
- 2) Donnez la représentation graphique de P
- 3) Donnez la représentation matricielle de P
- 4) Donnez un raffinement de P qui soit STP

Solution :

- 1) Le problème de job shop est constitué de quatre tâches : T_1 (passage du job J1 par la machine M1), T_2 (passage du job J1 par la machine M2), T_3 (passage du job J2 par la machine M1), et T_4 (passage du job J2 par la machine M2). Le problème peut être modélisé par le TCSP $P=(X,C)$ suivant :
- $X=\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$, la variable X_0 désignant l'origine du monde, la variable X_i (i de 1 à 4) désignant le début de la tâche T_i
 - Pour un TCSP modélisant une instance du problème de job shop, il est supposé que toutes les tâches commencent au plus tôt à la date $t=X_0$
 - $C=\{c_1 : (X_2-X_1) \in [4, +\infty[, c_2 : (X_4-X_3) \in [2, +\infty[, c_3 : (X_3-X_1) \in]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[, c_4 : (X_4-X_2) \in]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[, c_5 : (X_1-X_0) \in [0, +\infty[, c_6 : (X_2-X_0) \in [0, +\infty[, c_7 : (X_3-X_0) \in [0, +\infty[, c_8 : (X_4-X_0) \in [0, +\infty[\}$

- Les contraintes c_1 et c_2 sont des contraintes conjonctives (de précédence) entre les tâches d'un même job ; les contraintes c_3 et c_4 sont des contraintes disjonctives entre les tâches de jobs différents devant passer par une même machine ; et, enfin, les tâches c_5 à c_8 expriment que chacune des quatre tâches a la date $t=X_0$ comme date de début au plus tôt

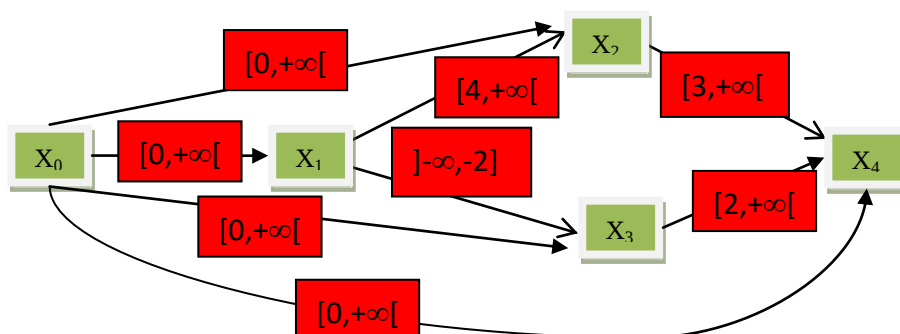
2) **Représentation graphique** : $G_p=(X,E,I)$



3) **Représentation matricielle** :

$\{0\}$	$[0, +\infty[$	$[0, +\infty[$	$[0, +\infty[$	$[0, +\infty[$
$]-\infty, 0]$	$\{0\}$	$[4, +\infty[$	$]-\infty, -2] \cup [4, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$
$]-\infty, 0]$	$]-\infty, -4]$	$\{0\}$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$
$]-\infty, 0]$	$]-\infty, -4] \cup [2, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$	$\{0\}$	$[2, +\infty[$
$]-\infty, 0]$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, -3] \cup [5, +\infty[$	$]-\infty, -2]$	$\{0\}$

- 4) **Un raffinement STP (maximal)** : donné par sa représentation graphique obtenue en instanciant chacun des deux arcs disjonctifs (X_1, X_3) et (X_2, X_4) avec un des deux blocs convexes maximaux constituant son étiquette



Exercice 3 (4 points) :

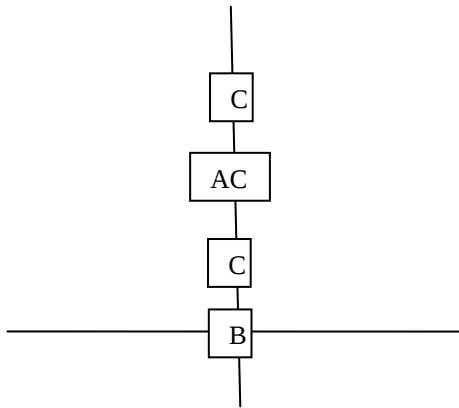
Calculez les compositions suivantes de l'algèbre des directions cardinales : $\{N\}^\circ\{S\}$, $\{NE\}^\circ\{NW\}$ et $\{E\}^\circ\{S\}$. Illustrez graphiquement vos réponses.

Solution :**Calcul des compositions $\{N\}^\circ\{S\}$, $\{NE\}^\circ\{NW\}$ et $\{E\}^\circ\{S\}$:**

- Calcul de $\{N\}^\circ\{S\}$:

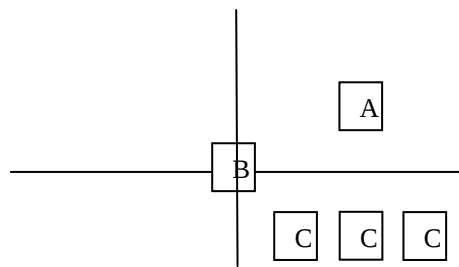
Soient A, B et C trois points du plan tels que $\{N\}(A,B)$ et $\{S\}(B,C)$. Quelle relation inférer sur les points extrêmes A et C ?

La relation $\{N\}(A,B)$ implique que A est sur la verticale Sud-Nord passant par B, en haut de B. L'ajout de la relation $\{S\}(B,C)$, équivalente à $\{N\}(C,B)$, implique que C doit être sur la verticale Sud-Nord passant par B, en haut de B : soit en bas de A, soit coïncidant avec A, soit, enfin, en haut de A. D'où $\{N,Eq,S\}(A,C)$ (voir illustration ci-dessous).



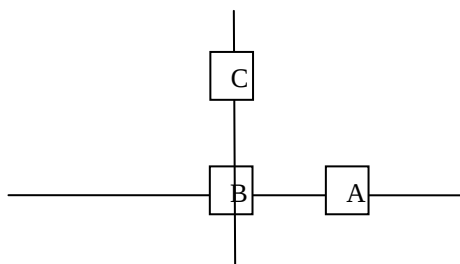
Conclusion : $\{N\}^\circ\{S\} = \{N,Eq,S\}$

- Calcul de $\{NE\}^\circ\{NW\}$: si trois points A, B et C du plan sont tels que $\{NE\}(A,B)$ et $\{NW\}(B,C)$, ceci est équivalent à $\{NE\}(A,B)$ et $\{SE\}(C,B)$, qui signifient que A et C sont, respectivement, dans le quart de plan supérieur droit ouvert délimité par l'horizontale Ouest-Est passant par B, et dans le quart de plan inférieur droit ouvert délimité par la même horizontale : A est donc soit au Nord-Est, soit au Nord, soit au Nord-Ouest de C



Conclusion : $\{NE\}^\circ\{NW\} = \{NE,N,NW\}$

- Calcul de $\{E\}^\circ\{S\}$: si trois points A, B et C du plan sont tels que $\{E\}(A,B)$ et $\{S\}(B,C)$, ceci est équivalent à $\{E\}(A,B)$ et $\{N\}(C,B)$. La relation entre A et C est alors la relation $\{SE\}$ (voir illustration): $\{SE\}(A,C)$.



Conclusion : $\{E\}^\circ\{S\}=\{SE\}$

Exercice 4 (5 points) :

Donnez un programme Prolog qui transforme une liste L1 de paires d'entiers en une liste L2 d'entiers dont le $i^{\text{ème}}$ élément est la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ paire de L1.

Solution :

```
tr([],[]).  
tr([[X,Y]|L1],[Z|L2]) :-  
    Z is X+Y,  
    tr(L1,L2).
```