

Programmation par Contraintes

Module du Master "Systèmes Informatiques Intelligents" 2ème année

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Mr ISLI

Faculté d'Informatique

Département Intelligence Artificielle et Science des Données

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

BP 32, El-Alia, Bab Ezzouar

DZ-16111 ALGER

https://perso.usthb.dz/~aisli/TA_PpC.htm

amar.isli@usthb.edu.dz

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Contrainte

- Une contrainte est une relation sur un nombre fini de variables (inconnues)
- Une variable admet un domaine (d'instanciation) : l'ensemble où elle prend ses valeurs
- Une contrainte restreint les valeurs que peuvent prendre simultanément les variables qu'elle relie

$R(X_1, \dots, X_k)$, R relation k-aire

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Problème de satisfaction de contraintes

- **CSP** : Constraint Satisfaction Problem
- Triplet $P=(X,D,C)$:
 - X est l'ensemble des variables :
 - X fini
 - $X=\{X_1, \dots, X_n\}$
 - D est l'ensemble des domaines des variables :
 - $D=\{D(X_1), \dots, D(X_n)\}$, les domaines étant finis
 - C est l'ensemble des contraintes sur les variables :
 - C fini
 - $C=\{c_1, \dots, c_m\}$

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Définition d'une contrainte

- Définition en extension :
 - une contrainte k-aire sur $X_{i1}, \dots, X_{ik}$ définie en extension énumère tous les k-uplets permis de l'ensemble $D(X_{i1}) \times \dots \times D(X_{ik})$
- Définition en compréhension :
 - une contrainte k-aire sur $X_{i1}, \dots, X_{ik}$ définie en compréhension est donnée mathématiquement, par exemple sous forme d'équation ou d'inégalité linéaire sur ces k variables

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Instanciation d'un CSP

- Soit $P=(X,D,C)$ un CSP
- Une instanciation (complète) est un élément du produit cartésien $D(X_1) \times \dots \times D(X_n)$
 - une instanciation associe à chacune des variables du CSP un élément de son domaine, le $i^{\text{ème}}$ élément étant la valeur associée à la $i^{\text{ème}}$ variable X_i
- Instanciation partielle

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Solution d'un CSP

- Soit $P=(X,D,C)$ un CSP
- Une solution est une instantiation satisfaisant chacune des contraintes du CSP
 - pour chacune des contraintes, si on remplace chacune des variables sur lesquelles elle porte par la valeur que lui affecte l'instanciation, ladite contrainte s'évalue à vrai
- Une instantiation est donc une solution potentielle : instantiation devenant solution si elle satisfait toutes les contraintes

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Instanciation partielle d'un CSP

- Soit $P=(X,D,C)$ un CSP
- Une instanciation partielle est un élément du produit cartésien $D(X_{i1}) \times \dots \times D(X_{ik})$, avec $k \leq n$ et $\{X_{i1}, \dots, X_{ik}\} \subseteq X$
 - L'instanciation partielle est solution partielle si elle satisfait chacune des contraintes portant exclusivement sur des variables de $\{X_{i1}, \dots, X_{ik}\}$

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Espace de recherche d'un CSP

- Soit $P=(X,D,C)$ un CSP
- L'espace de recherche de P est l'ensemble de toutes ses instanciations (complètes), c'est-à-dire le produit cartésien $D(X_1) \times \dots \times D(X_n)$

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Exemple : le problème de coloriage d'un graphe

■ Instance :

- Un graphe et une fonction cl associant à chaque nœud un ensemble de couleurs permises

■ Question :

- Peut-on colorier les nœuds du graphe, chacun avec une couleur de l'ensemble que lui associe la fonction cl , de telle sorte que deux nœuds adjacents (i.e., reliés par une arête) n'aient pas la même couleur ?

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

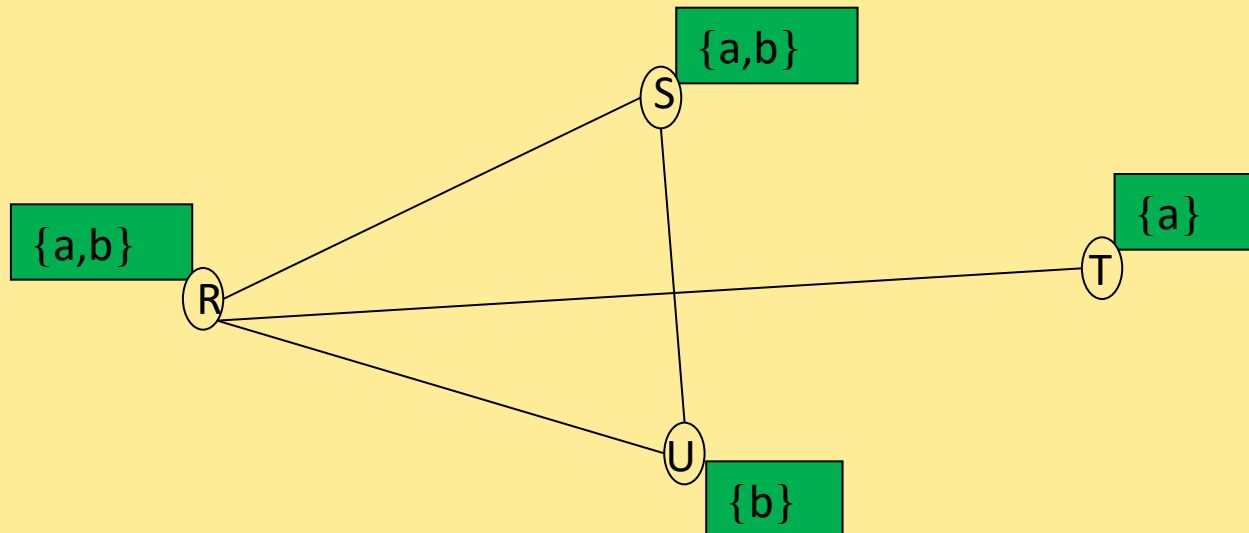
Exemple : le problème de coloriage d'un graphe

- Le graphe peut être vu comme une représentation graphique d'une carte géographique à colorier :
 - Les nœuds du graphe sont les différents pays de la carte
 - Les couleurs associées à un nœud sont celles avec lesquelles le pays correspondant peut être colorié (drapeau)
 - Deux nœuds sont adjacents si et seulement si les pays correspondants sont limitrophes (voisins) l'un de l'autre

CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Exemple : une instance du problème de coloriage d'un graphe



CHAPITRE I

Contraintes et problèmes de satisfaction de contraintes

Exemple : modélisation de l'instance avec un CSP

- CSP $P=(X,D,C)$ avec :
 - $X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$
 - $D(X_1)=D(X_2)=\{a,b\}$; $D(X_3)=\{a\}$; $D(X_4)=\{b\}$
 - $C=\{X_1 \neq X_2, X_1 \neq X_3, X_1 \neq X_4, X_2 \neq X_4\}$
- L'espace de recherche du CSP est constitué de ses quatre instanciations complètes possibles, qui sont tous les éléments du produit cartésien des domaines
 - $\{(a,a,a,b), (a,b,a,b), (b,a,a,b), (b,b,a,b)\}$
- Le CSP n'admet néanmoins aucune solution