# Programmation par Contraintes

Module du Master "Systèmes Informatiques Intelligents" 2ème année

Chapitre V

Programmation logique

Mr ISLI

Faculté d'Informatique

Département Intelligence Artificielle et Science des Données

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

BP 32, El-Alia, Bab Ezzouar

DZ-16111 ALGER

https://perso.usthb.dz/~aisli/TA_PpC.htm

amar.isli@usthb.edu.dz

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Une première vue globale :

- Programme Prolog = ensemble de clauses de Horn
- Clause de Horn= affirmation sur des atomes logiques
- Atome logique = relation sur des termes
- Terme = objet de l'univers

Terme – atome logique – clause de Horn – programme Prolog

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Les termes PROLOG

- Les variables
- Les termes élémentaires
- Les termes composés

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Les variables PROLOG

- Chaîne sur l'alphabet alphanumérique augmenté du symbole de soulignement, commençant par une lettre majuscule ou par le caractère de soulignement (_objet, _100)
  - Var, X, Var_longue_2
  - _objet, _100
- Les variables commençant par "_" sont dites variables anonymes

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Les termes élémentaires PROLOG

- Les nombres
  - entiers ou flottants
- Les identificateurs (aussi appelés atomes)
  - chaîne alphanumérique commençant par une minuscule
  - Exemples : alger bureau226 babezzouar
- Les chaînes de caractères entre guillemets
  - Exemples : "\#\{@" "alger" "2022”

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Les termes composés PROLOG

- foncteur($t_1$,…,$t_n$)
- foncteur : chaine alphanumérique commençant par une minuscule (identificateur)
- $t_1$, …,$t_n$ : termes
- n : arité du foncteur
- Exemples
  - adresse(18,"rue Abane Ramdane", ”Alger”)
  - cons(a,cons(X,nil))

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Les listes : définition**

La liste est un terme composé particulier, de symbole de fonction ``." et d'arité 2:

- le premier argument est l'élément de tête de la liste,
- le deuxième argument est la queue de la liste.
- la liste vide est notée ``[]".

# CHAPITRE V
# Programmation logique

***Listes : notations***

- la liste .(X,L) est également notée [X|L] ,
- la liste .(X1, .(X2, L)) est également notée [X1, X2|L],
- la liste .(X1, .(X2, ..., .(Xn, L) ... )) est également notée [X1, X2, ..., Xn|L],
- la liste [X1, X2, X3, ..., Xn|[]] est également notée [X1, X2, X3, ..., Xn].
- Par exemple, la liste [a,b,c] correspond à la liste .(a,.(b,.(c,[]))) et contient les 3 éléments a, b et c.
- La liste [a,b|L] correspond à la liste .(a,.(b,L)) et contient les 2 éléments a et b , suivis de la liste (inconnue) L.

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Listes : leur importance en Prolog**

Une liste est une structure récursive: la liste Liste = [X|L] est composée d'un élément de tête X et d'une queue de liste L qui est elle-même une liste. Par conséquent, les relations Prolog qui ``manipulent'' les listes seront généralement définies par

- une ou plusieurs clauses récursives, définissant la relation sur la liste [X|L] en fonction de la relation sur la queue de liste L,
- une ou plusieurs clauses non récursives assurant la terminaison de la manipulation, et définissant la relation pour une liste particulière (par exemple, la liste vide, ou la liste dont l'élément de tête vérifie une certaine condition...).

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Les atomes logiques :**

**ou propositions atomiques**

- symbole_de_prédicat($t_1$, ..., $t_n$ )
- symbole_de_prédicat : chaîne alphanumérique commençant par une minuscule (identificateur)
- $t_1$, ..., $t_n$ : termes
- Exemples
  - pere(rachid,ines)
  - habite(X,adresse(18,"rue Abane Ramdane",”Alger”))

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Les clauses

- Une clause
  - affirmation inconditionnelle (fait)
  - affirmation conditionnelle (règle)

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Les clauses

- fait : atome logique A
  - la relation définie par A est vraie (sans condition)
  - Exemple
    - pere(rachid,ines)
    - la relation "rachid est le père de ines" est vraie (sans condition)

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Les clauses

- règle : $A_0$ :- $A_1,\ldots,A_n$.
  - $A_0,A_1,\ldots,A_n$ : atomes logiques
  - La relation $A_0$ est vraie si les relations $A_1,\ldots,A_n$ sont vraies
  - $A_0$ : tête de la clause
  - $A_1,\ldots,A_n$ : corps de la clause

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Les clauses

- Une variable apparaissant dans la tête d'une règle (et éventuellement dans son corps) est quantifiée universellement
- Une variable apparaissant dans le corps d'une clause mais pas dans sa tête est quantifiée existentiellement

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Les clauses** : exemple

- meme_pere(X,Y) :- pere(P,X), pere(P,Y).
- pour tout X et pour tout Y
  - meme_pere(X,Y) est vrai s'il existe un P tel que pere(P,X) et pere(P,Y) soient vrais

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Un programme prolog

- Suite de clauses regroupées en paquets
- L'ordre dans lequel sont définis les paquets n'est pas significatif
- Paquet :
  - Suite de clauses ayant le même atome de tête
  - L'arité de l'atome de tête (d'un même paquet) est la même au niveau de toutes les clauses du paquet
  - Un paquet définit un prédicat (dont le nom est l'atome de tête du paquet)
  - Un paquet définit une disjonction de clauses
  - L'ordre des clauses dans un paquet est donc important, voire crucial
    - L'efficacité de la résolution en dépend
- Un programme prolog définit une conjonction de paquets

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Un programme prolog** : exemple

```
personne(X) :- homme(X).
personne(X) :- femme(X).
```

- Un paquet à deux clauses
- pour tout X
  - personne(X) est vrai si homme(X) est vrai ou femme(X) est vrai

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Exécution d'un programme prolog

- Exécuter un programme prolog revient à poser une question à l'interprète PROLOG
- Question (également appelée but ou activant)
  - Suite d'atomes logiques séparés par des virgules : A1,…,An
- Réponse de l'interprète PROLOG à une question
  - yes si la question est une conséquence logique du programme
  - no sinon (si la question n'est pas une conséquence logique du programme)

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Exécution d'un programme prolog

- une question peut inclure des variables, qui sont alors quantifiées existentiellement
  - La réponse de Prolog à une telle question est l'ensemble des valeurs des variables pour lesquelles la question est une conséquence logique du programme
    - Toutes les instanciations satisfaisant la formule

programme $\Rightarrow$ question

($\Rightarrow$ est l'implication logique)

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Exécution d'un programme prolog**

?- pere(rachid,X), pere(X,Y).

- Existe-t-il un X et un Y tels que pere(rachid,X) et pere(X,Y) soient vrais
- Réponse de prolog :
  - enfants et petits-enfants de rachid si rachid est grand-père

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Dénotation d'un programme Prolog : sémantique logique**

- La dénotation d'un programme Prolog P est l'ensemble de tous les atomes logiques A qui sont des conséquences logiques de P
- Lorsqu'on exécute un programme Prolog P en posant une question (ou but) Q :
  - La réponse de Prolog est l'ensemble des instances de la question Q qui font partie de la dénotation de P

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Dénotation d'un programme Prolog : sémantique logique**

La dénotation d'un programme Prolog P peut être calculée par une approche ascendante (en chaînage avant)

- Partir des faits
- Appliquer les règles pour déduire de nouveaux faits, jusqu'à fermeture

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Dénotation d'un programme Prolog : sémantique logique**

```
parent(rachid,ines).
parent(ines,mohamed).
parent(ali,younes).
parent(younes,said).

homme(rachid).
homme(ali).

pere(X,Y):-parent(X,Y),homme(X).

gdpere(X,Y):-pere(X,Z),parent(Z,Y).
```

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Dénotation d'un programme Prolog : sémantique logique**

- **L'ensemble des faits de P (relations vraies sans condition) :**
  - **$E_0$={parent(rachid,ines),**
    **parent(ines,mohamed),**
    **parent(ali,younes),**
    **parent(younes,said),**
    **homme(rachid),**
    **homme(ali)}**
- **On applique les règles de P à $E_0$ pour obtenir :**
  - **$E_1$={pere(rachid,ines),**
    **pere(ali,younes)}**

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Dénotation d'un programme Prolog : sémantique logique**

- **On applique les règles de P à $E_0 \cup E_1$ pour obtenir :**
  - **$E_2$={gdpere(rachid,mohamed),**
    **gdpere(ali,said)}**
  - **L'application des règles de P à $E_0 \cup E_1 \cup E_2$ ne permet pas de déduire de nouveaux faits**
  - **La dénotation de P est donc**

**$E_0 \cup E_1 \cup E_2$ ={parent(rachid,ines),parent(ines,mohamed),**
**parent(ali,younes),parent(younes,said),**
**homme(rachid),homme(ali),**
**pere(rachid,ines),pere(ali,younes),**
**gdpere(rachid,mohamed),**
**gdpere(ali,said)}**

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Dénotation d'un programme Prolog : sémantique logique**

**La dénotation d'un programme peut être infinie :**

```
plus(0,X,X).
plus(succ(X),Y,succ(Z)):-plus(X,Y,Z).
```

- **E={**plus(0,X,X),
  plus(succ(0),X,succ(X)),
  plus(succ(succ(0)),X,succ(succ(X))),
  plus(succ(succ(succ(0))),X,succ(succ(succ(X)))), **...}**

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Substitution**

- Fonction s de l'ensemble des variables dans l'ensemble des termes
- s={X←Y,Z←f(a,Y)} est la substitution remplaçant X par Y et Z par f(a,Y), et laisse inchangées les autres variables
- Une substitution peut être appliquée à un atome :
  - s(p(X,f(Y,Z)))=p(s(X),f(s(Y),s(Z))=P(Y,f(Y,f(a,Y)))

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Instance**

- Une instance d'un atome logique A est l'atome s(A) obtenu par application d'une substitution s à A
- L'atome pere(rachid, ines) est une instance de l'atome pere(rachid,X) :
  - Appliquer, par exemple, la substituion s={X←ines}

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Unificateur**

- Un unificateur de deux atomes logiques A1 et A2 est une substitution s telle que s(A1)=s(A2)
- s={X←a,Z←f(a,Y)} est un unificateur des deux atomes A1=p(X,f(X,Y)) et A2=p(a,Z)
- s(A1)=s(A2)=p(a,f(a,Y))
- Unifier deux atomes A1 et A2 revient à résoudre l'équation A1=A2

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Unificateur le plus général**

- Un unificateur s de deux atomes logiques A1 et A2 est dit unificateur le plus général (upg) si pour tout autre unificateur s', il existe une substitution s'' telle que s'=s''(s)
- s={X←Y} est un upg des deux atomes p(X,b) et p(Y,b)
- s'={X←a,Y←a} est un unificateur de p(X,b) et p(Y,b) mais pas un upg

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Algorithme d'unification de Robinson**

- Entrée : deux atomes logiques A1 et A2
- Sortie :
  - un upg de A1 et A2 si A1 et A2 sont unifiables
  - Échec sinon

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Algorithme d'unification de Robinson : unification de deux termes**

- Si T1 et T2 sont des termes élémentaires (nombres, identificateurs ou chaînes de caractères), alors T1 et T2 sont unifiables ssi ils consistent en le même terme élémentaire
- Si T1 est une variable et T2 est un terme quelconque, alors T1 et T2 sont unifiables, et T1 est instancié à T2
- Si T2 est une variable et T1 est un terme quelconque, alors T1 et T2 sont unifiables, et T2 est instancié à T1
- Si T1 et T2 sont des termes complexes, alors ils sont unifiables ssi :
  - Ils ont le même foncteur et la même arité,
  - Le $i^{ème}$ argument de T1 et le $i^{ème}$ argument de T2 sont unifiables, et
  - Les instanciations des variables sont compatibles (par exemple, il n'est pas possible d'instancier une variable X à meriem quand on unifie une paire d'arguments, et d'instancier X à ania quand on unifie une autre paire d'arguments)
- Deux termes sont unifiables ssi les quatre points ci-dessus permettent de montrer qu'ils le sont

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Algorithme d'unification de Robinson : unification de deux atomes logiques**

- Si A1 et A2 sont deux atomes logiques (propositions atomiques), alors ils sont unifiables ssi :
  - Ils ont le même symbole de prédicat et la même arité,
  - Le $i^{ème}$ argument de A1 et le $i^{ème}$ argument de A2 sont unifiables, et
  - Les instanciations des variables sont compatibles (par exemple, il n'est pas possible d'instancier une variable X à meriem quand on unifie une paire d'arguments, et d'instancier X à ania quand on unifie une autre paire d'arguments)

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Algorithme d'unification de Robinson : exemples**

?- ines=ines.
true
?- ines=younes.
false
?- 54=68.
false
?- 'ines'=ines.
true
?- '54'=54.
false

?- ines=X.
X=ines
?- X=Y.
X=Y
?- X=ines,Y=younes.
X=ines
Y=younes
?- f(g(h),Y)=f(X,i(f)).
X=g(h)
Y=i(f)

?- f(g(h),i(f))=f(X,i(Y)).
X=g(h)
Y=f
?- plus(X,X)=plus(2,9).
false

# CHAPITRE V
# Programmation logique

## Sémantique opérationnelle :

### Algorithme d'unification de Robinson :

Problème avec l'algorithme d'unification utilisé par Prolog :

```
?- pere(X)=X.
X=pere(X)
?-
```

- L'algorithme d'unification de Prolog n'utilise pas la vérification d'occurrence (the occurs check) des algorithmes d'unification standard pour des raisons d'efficacité
- Unification standard : Si l'unification standard est confrontée à l'unification d'une variable avec un terme composé, elle commence par vérifier si la variable occurre dans le terme (occurs check) : si tel est le cas, l'unification échoue.
- Prolog dispose néanmoins d'un prédicat prédéfini pour l'unification standard de deux termes (unification avec vérification d'occurrence) :

```
?-  unify_with_occurs_check(pere(X),X).
false
?-
```

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

**Algorithme d'unification de Robinson : son utilisation par l'algorithme de résolution**

- L'algorithme de résolution de Prolog teste si un but B=A1,…,An est une conséquence logique d'un programme P
- Un but est une suite d'atomes logiques séparés par des virgules, interprétés conjonctivement
- Atome logique=proposition atomique=symbole_de_predicat(terme1,…,termeN)
- But=Question=Activant
- Une action clé de l'algorithme de résolution :

  sélectionner une clause de P dont l'atome de tête s'unifie avec le premier atome logique A1 :

  C0:-C1,…,Cm
- Pour ne pas être confronté au problème de vérification d'occurrence, l'unification utilisée par l'algorithme de résolution a recours au renommage éventuel des variables de telle sorte qu'il n'y ait pas de variable commune au premier atome logique du but et à l'atome de tête de la clause sélectionnée

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle**

- L'ensemble de toutes les conséquences logiques d'un programme (dénotation) ne peut donc pas toujours être calculé
- MAIS on peut montrer si un but (question) est une conséquence logique d'un programme
  - But : suite d'atomes logiques (conjonction d'atomes logiques)

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle**

- Pour prouver si un but B=A1,…,An est une conséquence logique d'un programme P :
  - Approche descendante (en chaînage arrière)
  - Commencer par prouver que A1 est une conséquence logique de P
    - Chercher une clause règle de P dont l'atome de tête s'unifie avec A1

      C0:-C1,…,Cm telle que upg(A1,C0)=s
    - Le nouveau but à prouver est

      But=s(C1),…,s(Cm),s(A2),…,s(An)
  - Réitérer le processus jusqu'à ce que le but à prouver devienne vide

# CHAPITRE V
# Programmation logique

```
procedure prouver(But: liste d'atomes logiques )
    si But = [] alors
        /* le but initial est prouvé */
        /* afficher les valeurs des variables du but initial */
    sinon soit But = [A1, A2, .., An]
        pour toute clause (C0 :- C1, C2, ..,Cm) du programme:
          (où les variables ont été renommées)
          s=upg(A1,C0)
           si s≠échec alors
                prouver([s(C1), s(C2), .. s(Cm), s(A2), .. s(An)])
           finsi
        finpour
    finsi
```

# CHAPITRE V
# Programmation logique

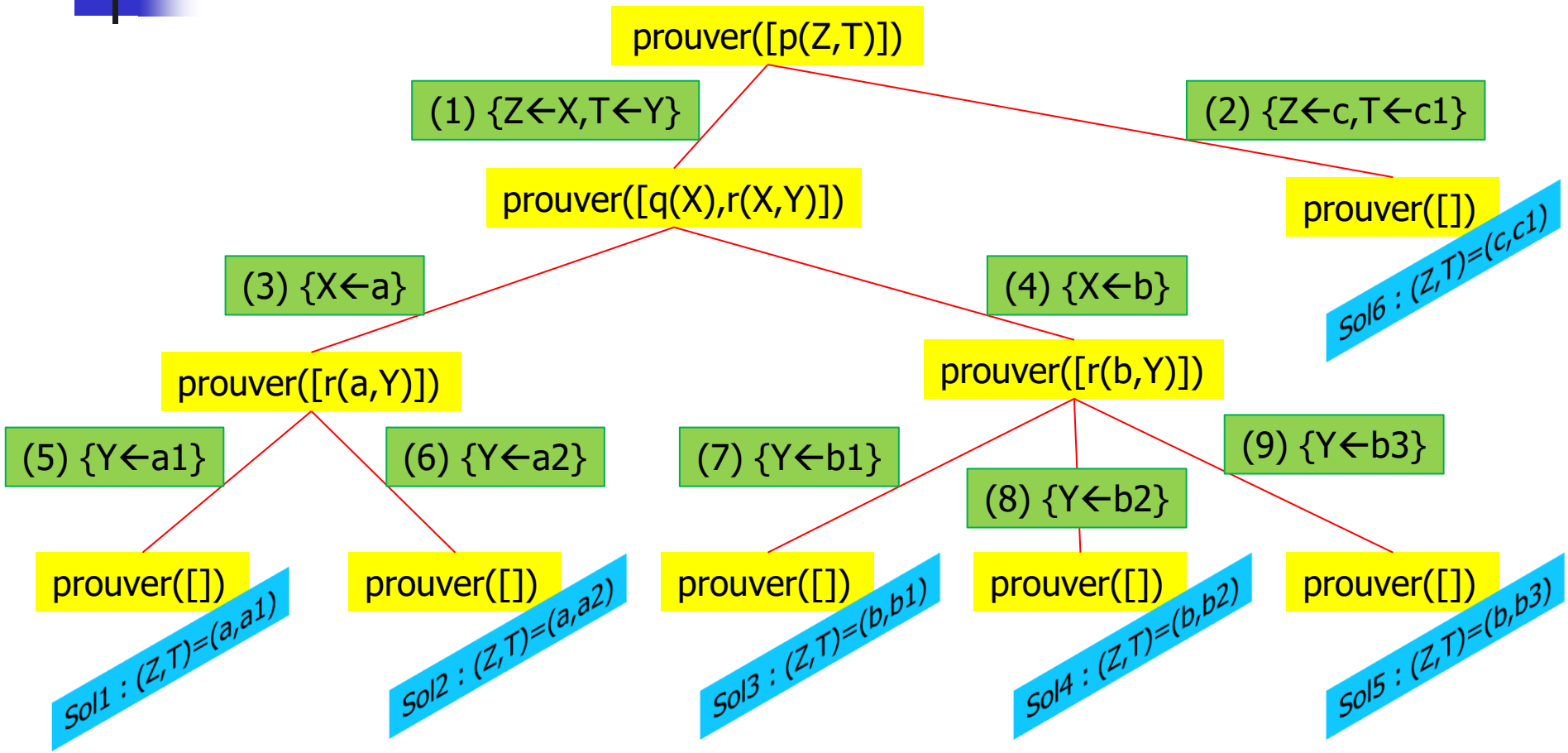
- Quand on pose une question à l'interprète Prolog, celui-ci exécute dynamiquement la procédure prouver :
  - L'arbre constitué de l'ensemble des appels récursifs à la procédure prouver est appelé *arbre de recherche*
- la stratégie de recherche dépend :
  - d'une part de l'ordre de définition des clauses dans un paquet : si plusieurs clauses peuvent être utilisées pour prouver un atome logique, on considère les clauses selon leur ordre d'apparition dans le paquet
  - et d'autre part de l'ordre des atomes logiques dans le corps d'une clause : on prouve les atomes logiques selon leur ordre d'apparition dans la clause

# CHAPITRE V
# Programmation logique

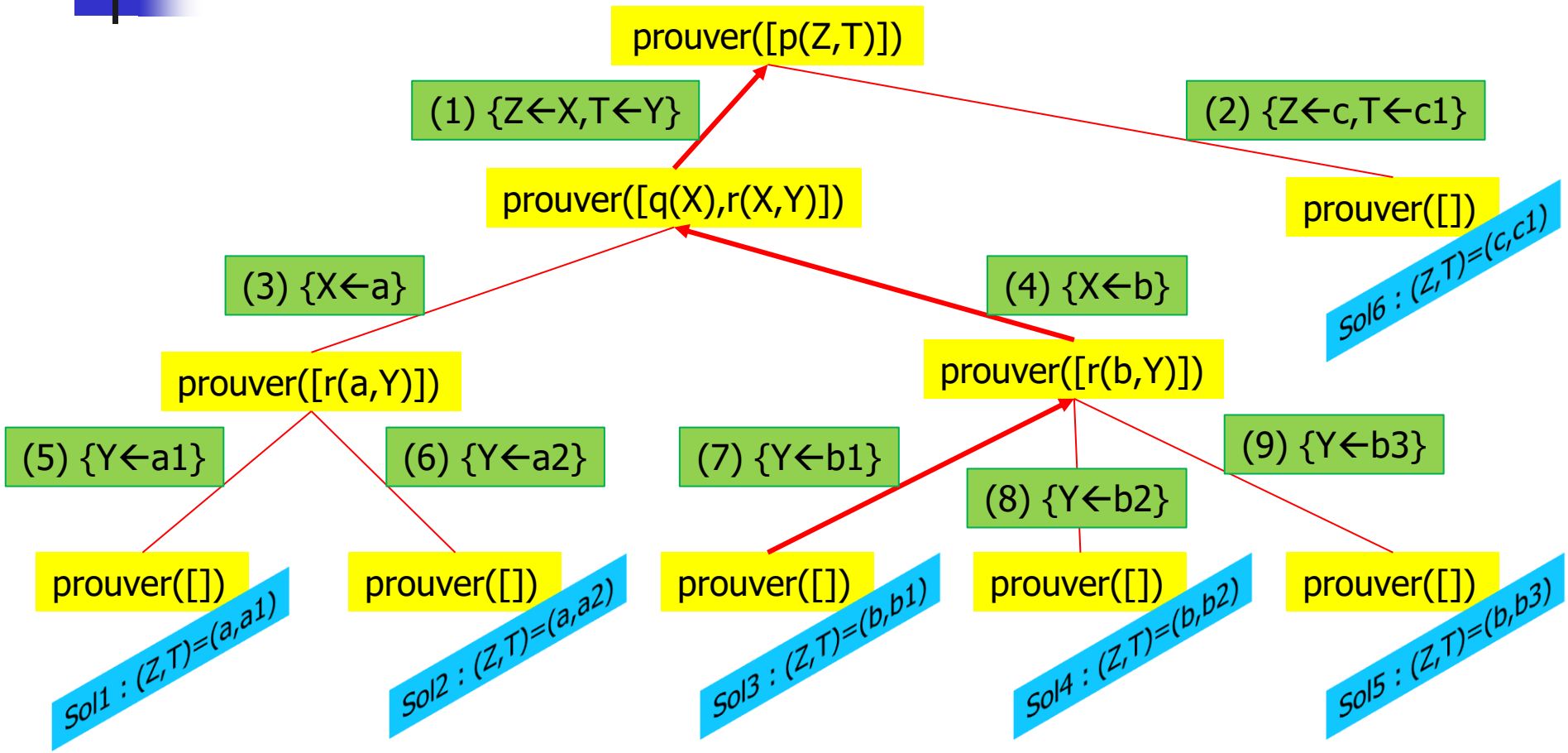
**Sémantique opérationnelle :** exemple 1

| | | |
|---|---|---|
| Programme : | p(X,Y) :- q(X), r(X,Y). | (1) |
| | p(c,c1). | (2) |
| | q(a). | (3) |
| | q(b). | (4) |
| | r(a,a1). | (5) |
| | r(a,a2). | (6) |
| | r(b,b1). | (7) |
| | r(b,b2). | (8) |
| | r(b,b3). | (9) |
| Question : | ? p(Z,T). | |

# CHAPITRE V
# Programmation logique



# CHAPITRE V
# Programmation logique



# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

La coupure : élagage de branches de l'arbre de recherche

- **Signification opérationnelle de la coupure**
  - La coupure, aussi appelée "cut", est notée !. La coupure est un prédicat sans signification logique (la coupure n'est ni vraie ni fausse), utilisée pour "couper" des branches de l'arbre de recherche
  - La coupure est toujours "prouvée" avec succès dans la procédure prouver. La "preuve" de la coupure a pour effet de bord de modifier l'arbre de recherche :

    elle coupe l'ensemble des branches en attente créées depuis l'appel de la clause qui a introduit la coupure

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :**

La coupure : exemples d'utilisation

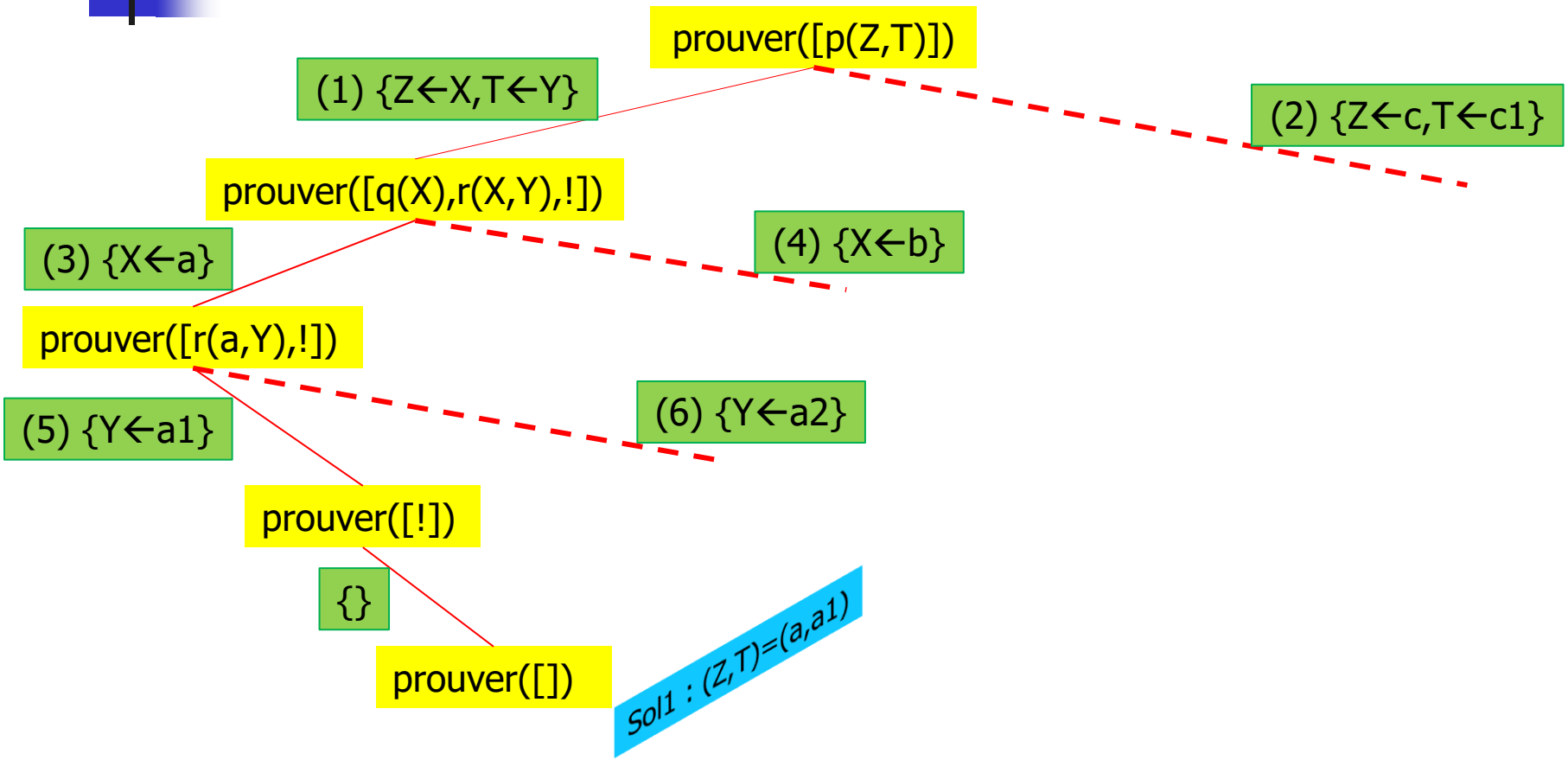
- Recherche de la première solution
- Exprimer le déterminisme
- La négation
- Le "si-alors-sinon"

# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :** exemple 2

| | | |
|---|---|---|
| Programme : | p(X,Y) :- q(X), r(X,Y),!. | (1) |
| | p(c,c1). | (2) |
| | q(a). | (3) |
| | q(b). | (4) |
| | r(a,a1). | (5) |
| | r(a,a2). | (6) |
| | r(b,b1). | (7) |
| | r(b,b2). | (8) |
| | r(b,b3). | (9) |
| Question : | ? p(Z,T). | |

# CHAPITRE V
# Programmation logique

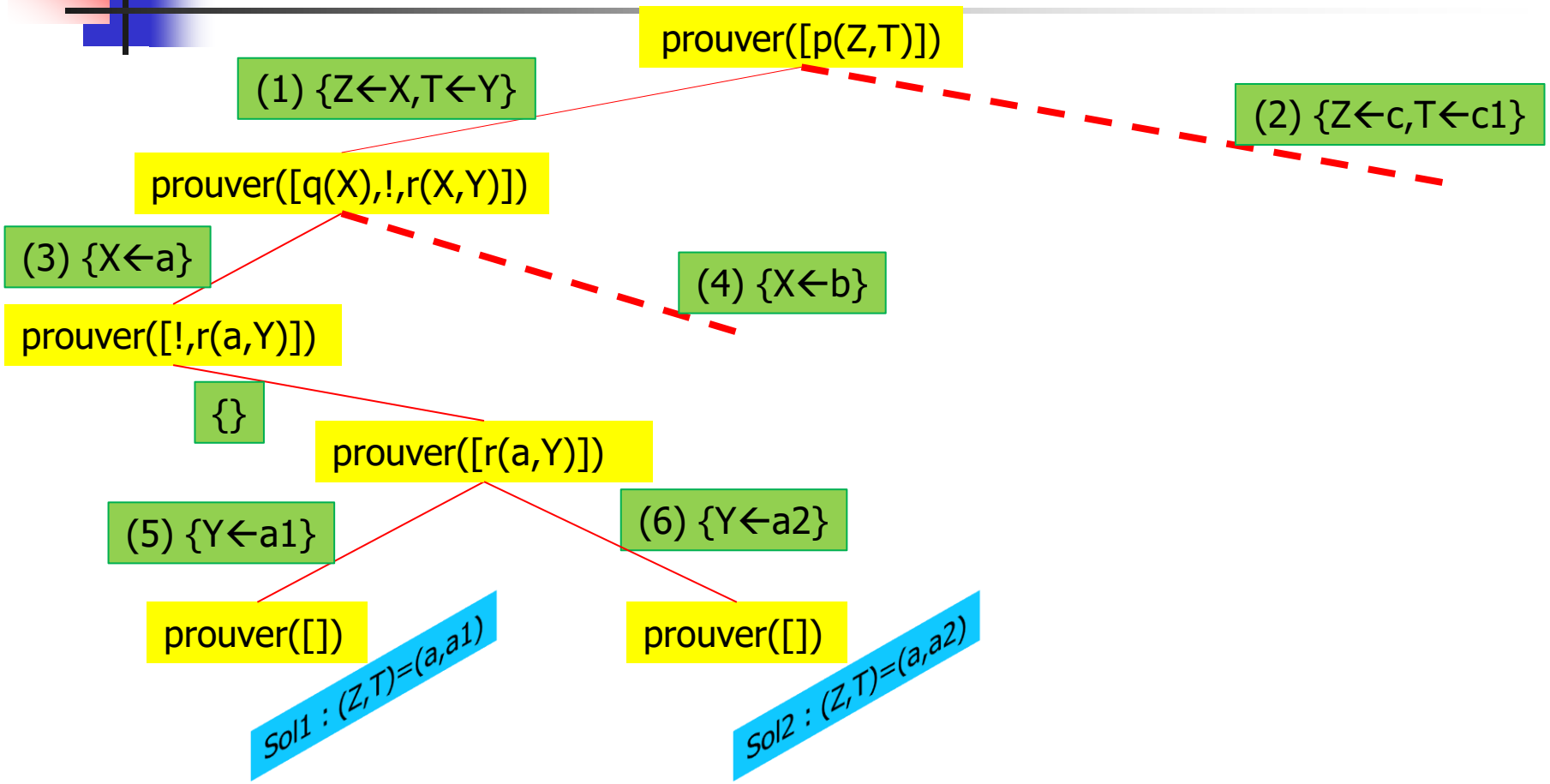


# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :** exemple 3

| | | |
|---|---|---|
| Programme : | p(X,Y) :- q(X), !,r(X,Y). | (1) |
| | p(c,c1). | (2) |
| | q(a). | (3) |
| | q(b). | (4) |
| | r(a,a1). | (5) |
| | r(a,a2). | (6) |
| | r(b,b1). | (7) |
| | r(b,b2). | (8) |
| | r(b,b3). | (9) |
| Question : | ? p(Z,T). | |

# CHAPITRE V
# Programmation logique

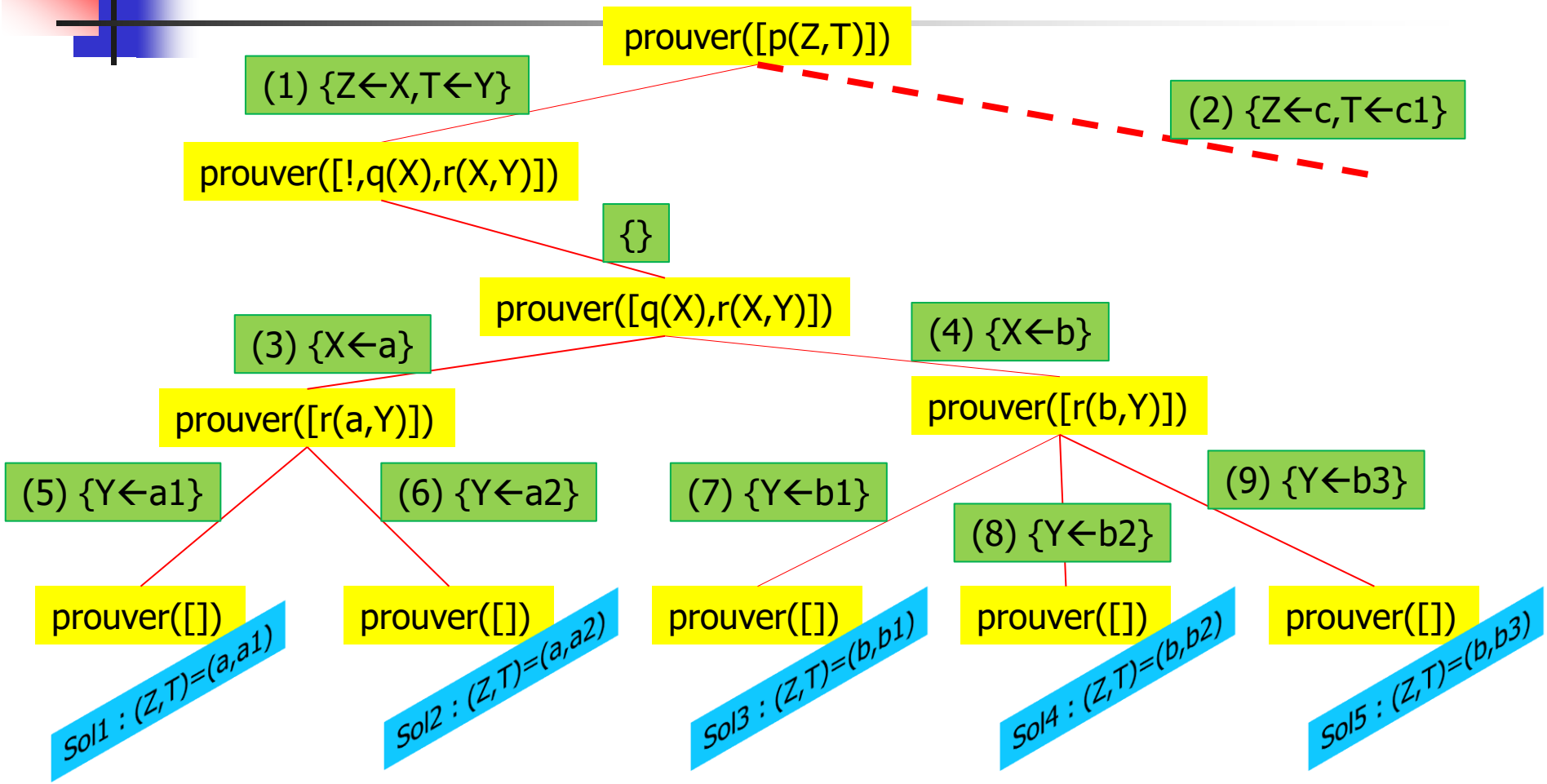


# CHAPITRE V
# Programmation logique

**Sémantique opérationnelle :** exemple 4

| | | |
|---|---|---|
| Programme : | p(X,Y) :- !,q(X), r(X,Y). | (1) |
| | p(c,c1). | (2) |
| | q(a). | (3) |
| | q(b). | (4) |
| | r(a,a1). | (5) |
| | r(a,a2). | (6) |
| | r(b,b1). | (7) |
| | r(b,b2). | (8) |
| | r(b,b3). | (9) |
| Question : | ? p(Z,T). | |

# CHAPITRE V
# Programmation logique



# CHAPITRE V
# Programmation logique par contraintes

**Programmation logique → Programmation logique par contraintes :**

- **Fixer une structure d'interprétation S représentant l'univers du discours**
- **Distinguer dans un programme les deux choses suivantes :**
  - **Le langage de contraintes défini sur S, supposé décidable**
  - **Le langage des prédicats défini par des formules logiques**
- **Les formules logiques permettant de définir des prédicats sont restreintes aux clauses de Horn de la forme :**

  **A:-c1,…,cm,A1,…,An.**
- **CLP(S)**