Programmation par Contraintes

Module du Master "Systèmes Informatiques Intelligents" 2ème année

Annexe 5

Logique du premier ordre

Mr ISLI

Faculté d'Informatique

Département Intelligence Artificielle et Science des Données

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

BP 32, El-Alia, Bab Ezzouar

DZ-16111 ALGER

https://perso.usthb.dz/~aisli/TA_PpC.htm

amar.isli@usthb.edu.dz

Annexe 5

Logique du premier ordre

La logique du premier ordre est également appelée

- calcul des prédicats
- logique des prédicats
- logique des prédicats du premier ordre

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Les termes
- Les propositions atomiques
- Les formules logiques

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Les termes :

Soient S_F un ensemble dénombrable de symboles de fonction dénotés par f, g, … (α(f) est l'arité de f) ; V un ensemble infini dénombrable de variables (d'arité 0) dénotées par x, y, … . L'ensemble T des termes du premier ordre est le plus petit ensemble satisfaisant :

  - $V \subseteq T$
  - Si $f \in S_F$ avec $\alpha(f)=n$, et $M_1, \ldots, M_n \in T$, alors $f(M_1,\ldots,M_n) \in T$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Les propositions atomiques :

Soit S_P un ensemble de symboles de prédicat dénotés par p, q, … . L'arité d'un prédicat p est désignée par $\alpha(p)$. L'ensemble P_a des propositions atomiques du premier ordre est défini comme suit :

$$P_a=\{p(M_1, \ldots, M_n) \mid p\in S_p,\ \alpha(p)=n \text{ et } M_1,\ldots,M_n\in T\}$$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Les formules logiques :

Soit $S_L=\{\neg,\vee,\exists\}$ l'ensemble des symboles usuels de négation logique, de ou logique et de quantification existentielle. L'ensemble P des formules logiques du premier ordre est le plus petit ensemble satisfaisant :

  - $P_a \subseteq P$
  - $\phi \in P \Rightarrow \neg\phi \in P$
  - $\phi,\varphi \in P \Rightarrow \phi \vee \varphi \in P$
  - $x \in V, \phi \in P \Rightarrow \exists x \phi \in P$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Variables libres (free variables) :

L'ensemble des variables libres d'une formule ϕ, dénoté par $FV(\phi)$, est défini comme suit :

  - $FV(x)=\{x\}$
  - $FV(f(M_1,\ldots,M_n))=\cup_{i=1\ldots n}FV(M_i)$
  - $FV(p(M_1,\ldots,M_n))=\cup_{i=1\ldots n}FV(M_i)$
  - $FV(\neg\phi)=FV(\phi)$
  - $FV(\phi\vee\varphi)=FV(\phi)\cup FV(\varphi)$
  - $FV(\forall x\phi)=FV(\exists x\phi)=FV(\phi)\backslash\{x\}$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Variables liées (bound variables) :

L'ensemble des variables liées d'une formule ϕ, dénoté par $BV(\phi)$, est défini comme suit :

  - $BV(x)=\varnothing$
  - $BV(f(M_1,\ldots,M_n))=\varnothing$
  - $BV(p(M_1,\ldots,M_n))=\varnothing$
  - $BV(\neg\phi)=BV(\phi)$
  - $BV(\phi\vee\varphi)=BV(\phi)\cup BV(\varphi)$
  - $BV(\forall x\phi)=BV(\exists x\phi)=\{x\}\cup BV(\phi)$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Formule close :

Soit ϕ une formule logique avec $FV(\phi)= \{x_1,\ldots,x_n\}$

  - ϕ est close si $FV(\phi)=\varnothing$
  - $\forall(\phi)$ désigne la formule close $\forall x_1 \ldots \forall x_n \phi$
  - $\exists(\phi)$ désigne la formule close $\exists x_1 \ldots \exists x_n \phi$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Littéral :

Un littéral est :

  - une proposition atomique : on parle alors de littéral positif
  - ou la négation d'une proposition atomique : on parle alors de littéral négatif

- Clause :

Une clause est une disjonction de littéraux universellement quantifiés : $\forall(L_1 \vee \ldots \vee L_n)$

- Clause de Horn :

Clause ayant au plus un littéral positif

Annexe 5

Logique du premier ordre

Sémantique

- Pré-interprétation :

Une pré-interprétation d'un langage du premier ordre est une paire <D,[]>, D étant un domaine d'interprétation, et [] une fonction sémantique associant à tout symbole de constante $c \in S_F$ un élément $[c] \in D$, et à tout symbole de fonction $f \in S_F$ d'arité supérieure ou égale à 1 une fonction $[f]:D^n \rightarrow D$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Sémantique

- Valuation :
  - Une valuation des variables est une fonction ρ: V→D
  - La valuation des termes induite par une valuation ρ des variables et une pré-interprétation <D,[]> est définie comme suit :
    1. $[]_\rho$: T→D
    2. $[X]_\rho=\rho(X)$, pour toute variable X
    3. $[c]_\rho=[c]$, pour tout $c \in S_F$ avec c d'arité 0 (symbole de constante)
    4. $[f(M_1,\ldots,M_n)]_\rho=[f]([M_1]_\rho,\ldots,[M_n]_\rho)$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Sémantique

- Interprétation :

Pré-interprétation <D,[]> associant à tout symbole de prédicat $p \in S_P$ d'arité n une relation $[p]:D^n \rightarrow \{0,1\}$