Résolution d'une instance du problème de job shop

Adaptation de l'algorithme LookAhead avec wbdAC-3 comme procédure de filtrage

Exercice 1 TD 5 :

On considère l'instance donnée par la table ci-dessous du problème d'ordonnancement de type job shop, qui consiste en deux jobs J1 et J2 devant passer chacun par deux machines M1 et M2 :

	1ère tâche : <machine, durée>	2ème tâche : <machine, durée>
Job J1	<M1,2>	<M2,2>
Job J2	<M2,3>	<M1,1>

- Toutes les tâches sont non-préemptives
- La date de début au plus tôt est t_d=1 et la date de fin au plus tard est t_f=10

On s'intéresse à la recherche d'une solution réalisable, c'est-à-dire satisfaisant toutes les contraintes mais ne donnant pas forcément l'optimum du problème.

1. Modéliser le problème à l'aide d'un TCSP P=(X,C)
2. Donner la représentation matricielle de P
3. Comment peut-on adapter l'algorithme Look_Ahead avec wbdAC-3 comme procédure de filtrage durant la recherche, de telle sorte qu'il fournisse, pour un TCSP modélisant un problème d'ordonnancement de type job shop, une solution réalisant l'optimum ?

Mr Isli (amar.isli@usthb.edu.dz)

Solution :

1) Modélisation à l'aide d'un TCSP P=(X,C) :

- X={X0,X1,X2,X3,X4}, X0 variable "origine du monde" et Xi, i de 1 à 4, variable représentant la date de début de la tâche Ti (T1 et T2 représentent les première et deuxième tâches du job 1, alors que T3 et T4 représentent les première et deuxième tâches du job 2)
- C={c1:(X1-X0)∈[1,8],
  C2:(X2-X0)∈[1,8],
  C3:(X3-X0)∈[1,7],
  C4:(X4-X0)∈[1,9],
  C5:(X2-X1)∈[2,+ ∞[,
  C6:(X4-X3)∈[3,+ ∞[,
  C7:(X4-X1)∈]-∞,-1]∪[2,+ ∞[,
  C8:(X3-X2)∈]-∞,-3]∪[2,+ ∞[}

2) Représentation matricielle de P :

MP=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,8]	[1,8]	[1,7]	[1,9]
X1	[-8,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	]-∞,-1]∪[2,+ ∞[
X2	[-8,-1]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]∪[2,+∞[	IR
X3	[-7,-1]	IR	]-∞,-2]∪[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-1]	]-∞,-2]∪[1,+∞[	IR	]-∞,-3]	{0}

3) Adaptation de LookAhead à la résolution d'une instance de job shop :

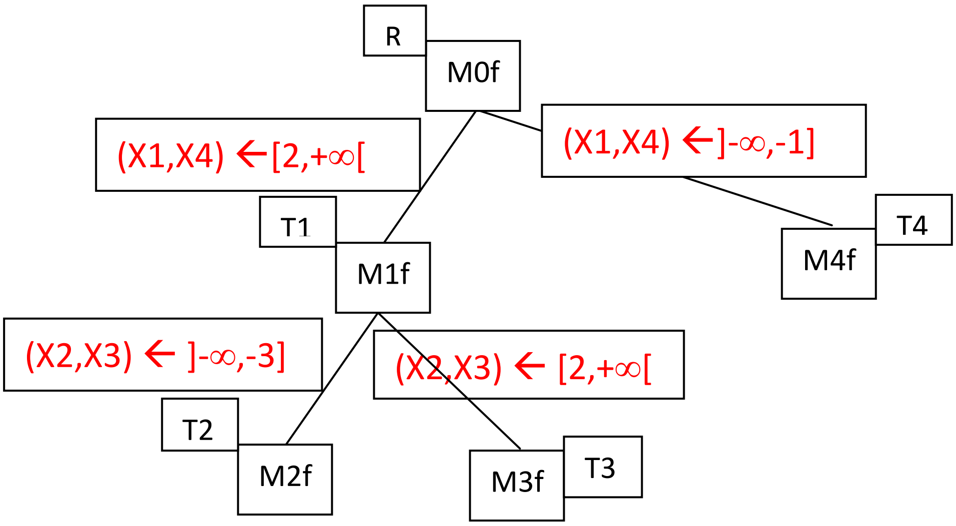
Résumé :

Le critère à optimiser (fonction objectif) est la durée globale du projet, et on se ramène facilement à la minimisation de la fin de tout le projet. Initialisation de l'optimum à +∞ : Opt=+∞. Illustration avec le premier arbre ci-dessous.

La racine R de l'arbre de recherche est étiquetée par le résultat M0f du prétraitement, c'est-à-dire du filtrage par wbdAC3 de M0=MP (MP est la représentation matricielle du TCSP de départ) : M0=MP ; M0f=wbdAC3(M0).

M0f contient deux entrées disjonctives, (X1,X4) et (X2,X3). On choisit l'ordre (X1,X2) puis (X2,X3) d'instanciation des entrées disjonctives. L'instanciation de (X1,X2) se fait avec le bloc convexe maximal droit puis avec celui de gauche : [2,+ ∞ [puis]- ∞,-1]. L'instanciation de (X2,X3) se fait avec le bloc convexe maximal gauche puis avec celui de droite. Les matrices étiquetant les nœuds T1, T2, T3 et T4 sont comme suit :

- M1f=wbdAC3(M1), avec M1=M0f((X1,X4) ←[2,+∞[) : M1 est la matrice résultant de l'instanciation au niveau de la racine R de l'entrée (X1,X4) de M0f par [2,+∞[, et M1f la matrice résultant du filtrage de M1 par wbdAC3
- M2f=wbdAC3(M2), avec M2=M1f((X2,X3) ←]-∞,-3])
- M3f=wbdAC3(M3), avec M3=M1f((X2,X3) ←[2,+∞[)
- M4f=wbdAC3(M4), avec M4=M0f((X1,X4) ←]-∞,-1])



Si un TCSP représentant une instance de job shop à n tâches est un STP bd-consistant d'arc, la solution Sol réalisant son optimum est donnée par les bornes inférieures a1, …, an des domaines binarisés des variables X1, …,Xn : Sol=(0,a1, …,an) [la variable X0 instanciée à 0]. En particulier, M2f est un raffinement STP bd-consistant d'arc, et la première mise à jour de l'optimum, après son initialisation à +∞, se fait au niveau du nœud T2.

Au niveau de T3, l'optimum du raffinement M3f, qui est un STP bd-consistant d'arc, ne permet pas d'améliorer l'optimum global.

Au niveau de T4 maintenant, le raffinement M4f, fermé par wbdAC3, n'est pas un STP. Mais M4f permet de nous dire que nous ne pouvons pas améliorer l'optimum global en descendant (c'est-à-dire en instanciant l'unique entrée disjonctive de M4f, (X2,X3)). Ceci se fait par le calcul, au niveau de chaque nœud d'une quantité Optc=max{a1+durée(T1), …,an+durée(Tn)}, a1, …, an étant les bornes inférieures des domaines binarisés de la matrice (raffinement) étiquetant le nœud.

Description plus détaillée :

Prétraitement par wbdAC-3 (racine R de l'arbre de recherche) :
Situation avant prétraitement :
M0=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,8]	[1,8]	[1,7]	[1,9]
X1	[-8,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	]-∞,-1]∪[2,+ ∞[
X2	[-8,-1]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]∪[2,+∞[	IR
X3	[-7,-1]	IR	]-∞,-2]∪[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-1]	]-∞,-2]∪[1,+∞[	IR	]-∞,-3]	{0}

File de wbdAC3 et domaines binarisés :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M0[0,1]	M0[0,2]	M0[0,3]	M0[0,4]
[1,8]	[1,8]	[1,7]	[1,9]

Etape 0-1 : prendre la paire (X1,X2)
$M0[0,1]=M0[0,1]\cap M0[0,2]\circ^{W} M0[2,1]=[1,8]\cap[1,8]\circ]-\infty,-2[=[1,6]$
Modification. Rien à rajouter à la file. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M0[0,1]	M0[0,2]	M0[0,3]	M0[0,4]
[1,6]	[1,8]	[1,7]	[1,9]

Etape 0-2 : prendre la paire (X2,X1)
$M0[0,2]=M0[0,2]\cap M0[0,1]\circ^{w}M0[1,2]=[1,8]\cap[1,6]\circ[2,+\infty[=[3,8]$
Modification. Ajouter à la file les paires (Xk,X2) avec k différent de 0, de 2 et de 1, et $M0[k,2]\subset IR$ (rien à ajouter). Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M0[0,1]	M0[0,2]	M0[0,3]	M0[0,4]
[1,6]	[3,8]	[1,7]	[1,9]

Etape 0-3 : prendre la paire (X1,X4)
$M0[0,1]=M0[0,1]\cap M0[0,4]\circ^{w}M0[4,1]=[1,6]\cap[1,9]\circ IR=[1,6]$
Pas de modification.

De la même façon, la propagation des paires (X4,X1),(X2,X3),(X3,X2) ne produit aucun changement, vu que les fermetures convexes de M0[1,4], M0[3,2] et M0[2,3] sont toutes égales à IR. Ce qui nous fait aboutir à la nouvelle configuration suivante :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M0[0,1]	M0[0,2]	M0[0,3]	M0[0,4]
[1,6]	[3,8]	[1,7]	[1,9]

Etape 0-4 : prendre la paire (X3,X4)
$M0[0,3]=M0[0,3]\cap M0[0,4]\circ^{w}M0[4,3]=[1,7]\cap[1,9]\circ]-\infty,-3]=[1,6]$
Modification. On ne remet pas (X2,X3) dans la file car fermeture convexe égale à IR. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M0[0,1]	M0[0,2]	M0[0,3]	M0[0,4]
[1,6]	[3,8]	[1,6]	[1,9]

Etape 0-5 : prendre la paire (X4,X3)
$M0[0,4]=M0[0,4]\cap M0[0,3]\circ^{w}M0[3,4]=[1,9]\cap[1,6]\circ[3,+\infty[=[4,9]$

Modification. On ne remet pas (X1,X4) dans la file car fermeture convexe égale à IR. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M0[0,1]	M0[0,2]	M0[0,3]	M0[0,4]
[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]

File vide. Prétraitement terminé sans qu'un domaine devienne vide.
Le TCSP après prétraitement :
M0f=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]
X1	[-6,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	]-∞,-1]∪[2,+ ∞[
X2	[-8,-3]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]∪[2,+∞[	IR
X3	[-6,-1]	IR	]-∞,-2]∪[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-4]	]-∞,-2]∪[1,+∞[	IR	]-∞,-3]	{0}

Instanciation de l'arc disjonctif (X1,X4) avec [2,+∞[, création d'un fils gauche T1 de la racine R :

M1=M0f((X1,X4)← [2,+∞[)=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]
X1	[-6,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	[2,+∞[
X2	[-8,-3]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]∪[2,+∞[	IR
X3	[-6,-1]	IR	]-∞,-2]∪[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-4]	]-∞,-2]	IR	]-∞,-3]	{0}

Filtrage avec wbdAC3, avec file comme suit : Q={(X1,X4),(X4,X1)}. Comme le TCSP au niveau du nœud père (racine) était fermée par xbdAC3, on initialise la file à l'arc instancié (dans les deux sens).

Etape 1-1 : prendre la paire (X1,X4)
$M1[0,1]=M1[0,1]\cap M1[0,4]\circ^{w}M1[4,1]=[1,6]\cap[4,9]\circ]-\infty,-2]=[1,6]$
Aucune modification. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M1[0,1]	M1[0,2]	M1[0,3]	M1[0,4]
[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]

Etape 1-2 : prendre la paire (X4,X1)

$M1[0,4]=M1[0,4]\cap M1[0,1]\circ^{w}M1[1,4]=[4,9]\cap[1,6]\circ[2,+\infty[=[4,9]$

Aucune modification. Nouvelle configuration :

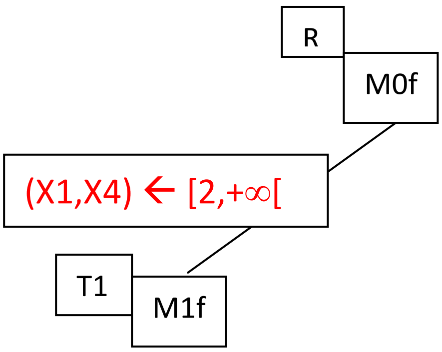
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M1[0,1]	M1[0,2]	M1[0,3]	M1[0,4]
[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]

File vide. Filtrage de M1 (fils gauche T1 de R) terminé sans qu'un domaine devienne vide. Le TCSP après filtrage :

M1f=wbdAC3(M1)=M1=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]
X1	[-6,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	[2,+∞[
X2	[-8,-3]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]∪[2,+∞[	IR
X3	[-6,-1]	IR	]-∞,-2]∪[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-4]	]-∞,-2]	IR	]-∞,-3]	{0}



Optc =max{1+durée(T1),3+durée(T2),1+durée(T3),4+dirée(T4)}
=max{3,5,4,5}=5<Opt=+∞. Donc pas de retour arrière :
instanciation de l'arc disjonctif (X2,X3) avec]-∞,-3], au niveau de T1 :

M2=M1f((X2,X3)←]-∞,-3])=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]
X1	[-6,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	[2,+∞[
X2	[-8,-3]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]	IR
X3	[-6,-1]	IR	[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-4]	]-∞,-2]	IR	]-∞,-3]	{0}

Filtrage avec wbdAC3, avec file comme suit : Q={(X2,X3),(X3,X2)}. Comme le TCSP au niveau du nœud père (T1) était fermée par wbdAC3, on initialise la file à l'arc instancié (dans les deux sens).

Etape 2-1 : prendre la paire (X2,X3)
M2[0,2]=M2[0,2]∩M2[0,3]°^{w}M2[3,2]=[3,8]∩[1,6]°[3,+∞[=[4,8]
Modification. Remise de (X1,X2) dans la file.Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M2[0,1]	M2[0,2]	M2[0,3]	M2[0,4]
[1,6]	[4,8]	[1,6]	[4,9]

Etape 2-2 : prendre la paire (X1,X2)
M2[0,1]=M2[0,1]∩M2[0,2]°^{w}M2[2,1]=[1,6]∩[4,8]°]-∞,-2]=[1,6]
Pas de modification. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M2[0,1]	M2[0,2]	M2[0,3]	M2[0,4]
[1,6]	[4,8]	[1,6]	[4,9]

Etape 2-3 : prendre la paire (X3,X2)
M2[0,3]=M2[0,3]∩M2[0,2]°^{w}M2[2,3]=[1,6]∩[4,8]°]-∞,-3]=[1,5]
Modification. Remise de (X4,X3) dans la file. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M2[0,1]	M2[0,2]	M2[0,3]	M2[0,4]
[1,6]	[4,8]	[1,5]	[4,9]

Etape 2-4 : prendre la paire (X4,X3)

$M2[0,4]=M2[0,4]\cap M2[0,3]\circ^{w}M2[3,4]=[4,9]\cap[1,5]\circ[3,+\infty[=[4,9]$

Pas de modification. Nouvelle configuration :

Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M2[0,1]	M2[0,2]	M2[0,3]	M2[0,4]
[1,6]	[4,8]	[1,5]	[4,9]

File vide sans qu'un domaine binarisé devienne vide. Filtrage par wbdAC3 terminé avec raffinement résultant convexe (TP) et bd-consistant d'arc :

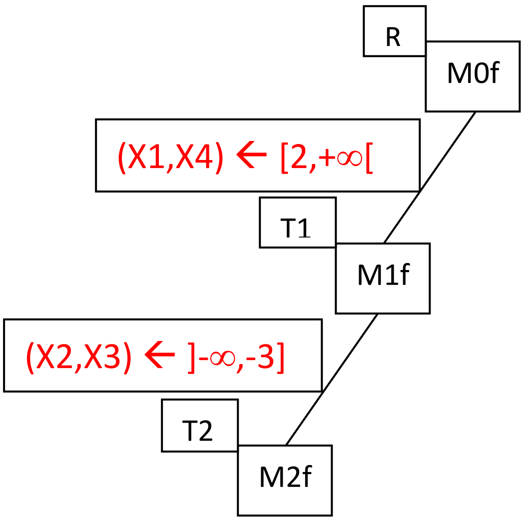
M2f=wbdAC3(M2)=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,6]	[4,8]	[1,5]	[4,9]
X1	[-6,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	[2,+∞[
X2	[-8,-4]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]	IR
X3	[-5,-1]	IR	[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-4]	]-∞,-2]	IR	]-∞,-3]	{0}

Opt(M2f)=max{1+durée(T1),4+durée(T2),1+durée(T3),4+durée(T4)}
=max{3,6,4,5}=6<Opt

Amélioration. Mise à jour de l'optimum et de la solution le réalisant :

- Opt=6
- Sol=(0,1,4,1,4)



L'exploration continue, et le solveur fait un retour arrière (backtracks) sur le nœud T1 pour essayer la deuxième possibilité de l'arc disjonctif (X2,X3) de M1f, et instancie ce dernier donc avec [2,+∞[, avec création d'un fils droit T3 de T1 :

M3=M1f((X2,X3)🡨[2,+∞[)=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]
X1	[-6,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	[2,+∞[
X2	[-8,-3]	]-∞,-2]	{0}	[2,+∞[	IR
X3	[-6,-1]	IR	]-∞,-2]	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-4]	]-∞,-2]	IR	]-∞,-3]	{0}

Filtrage avec wbdAC3, avec file comme suit : Q={(X2,X3),(X3,X2)}. Comme le TCSP au niveau du nœud père (T1) était fermée par wbdAC3, on initialise la file à l'arc instancié (dans les deux sens).

Etape 3-1 : prendre la paire (X2,X3)

M3[0,2]=M3[0,2]∩M3[0,3]$\circ^{w}$M3[3,2]=[3,8]∩[1,6]°]-∞,-2]=[3,4]

Modification. Remise de (X1,X2) dans la file. Nouvelle configuration :

Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M3[0,1]	M3[0,2]	M3[0,3]	M3[0,4]
[1,6]	[3,4]	[1,6]	[4,9]

Etape 3-2 : prendre la paire (X1,X2)

M3[0,1]=M3[0,1]∩M3[0,2]$\circ^{w}$M3[2,1]=[1,6]∩[3,4]°]-∞,-2]=[1,2]

Modification. Remise de (X4,X1) dans la file. Nouvelle configuration :

Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M3[0,1]	M3[0,2]	M3[0,3]	M3[0,4]
[1,2]	[3,4]	[1,6]	[4,9]

Etape 3-3 : prendre la paire (X4,X1)

M3[0,4]=M3[0,4]∩M3[0,1]$\circ^{w}$M3[1,4]=[4,9]∩[1,2]°[2,+∞[=[3,9]

Modification. Remise de (X3,X4) dans la file. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M3[0,1]	M3[0,2]	M3[0,3]	M3[0,4]
[1,2]	[3,4]	[1,6]	[3,9]

Etape 3-4 : prendre la paire (X3,X4)
$M3[0,3]=M3[0,3]\cap M3[0,4]\circ^{w}M3[4,3]=[1,6]\cap[3,9]\circ]-\infty,-3]=[1,6]$
Pas de modification. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M3[0,1]	M3[0,2]	M3[0,3]	M3[0,4]
[1,2]	[3,4]	[1,6]	[3,9]

Etape 3-5 : prendre la paire (X3,X2)
$M3[0,3]=M3[0,3]\cap M3[0,2]\circ^{w}M3[2,3]=[1,6]\cap[3,4]\circ[2,+\infty[=[5,6]$
Modification. Remise de (X4,X3) dans la file. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M3[0,1]	M3[0,2]	M3[0,3]	M3[0,4]
[1,2]	[3,4]	[5,6]	[3,9]

Etape 3-6 : prendre la paire (X4,X3)
$M3[0,4]=M3[0,4]\cap M3[0,3]\circ^{w}M3[3,4]=[3,9]\cap[5,6]\circ[3,+\infty[=[8,9]$
Modification. Remise de (X1,X4) dans la file. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M3[0,1]	M3[0,2]	M3[0,3]	M3[0,4]
[1,2]	[3,4]	[5,6]	[8,9]

Etape 3-7 : prendre la paire (X1,X4)
$M3[0,1]=M3[0,1]\cap M3[0,4]\circ^{w}M3[4,1]=[1,2]\cap[8,9]\circ]-\infty,-2]=[1,2]$

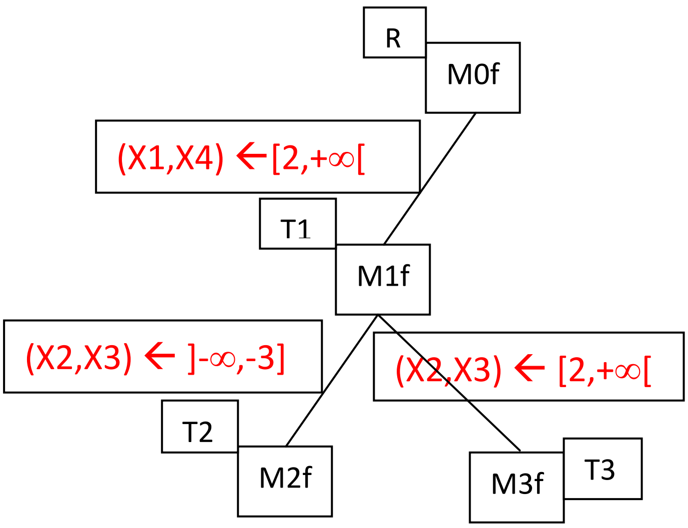
Pas de modification. Nouvelle configuration :
Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M3[0,1]	M3[0,2]	M3[0,3]	M3[0,4]
[1,2]	[3,4]	[5,6]	[8,9]

File vide sans qu'un domaine binarisé devienne vide. Filtrage par wbdAC3 terminé avec raffinement résultant convexe et bd-consistant d'arc :
M3f=bdAC3(M3)=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,2]	[3,4]	[5,6]	[8,9]
X1	[-2,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	[2,+∞[
X2	[-4,-3]	]-∞,-2]	{0}	[2,+∞[	IR
X3	[-6,-5]	IR	]-∞,-2]	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-8]	]-∞,-2]	IR	]-∞,-3]	{0}

Opt(M3f)=max{1+durée(T1),3+durée(T2),5+durée(T3),8+durée(T4)}
=max{3,5,8,9}=9>Opt.
Pas d'amélioration de l'optimum.



Le solveur fait un retour arrière, d'abord sur T1, qui n'offre plus de possibilités, puis sur la racine R pour essayer la deuxième possibilité]-∞,-1] de l'arc disjonctif (X1,X4) : création d'un fils droit T4 de la racine R :

M4= M0f((X1,X4)←]-∞,-1])=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[1,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]
X1	[-6,-1]	{0}	[2,+∞[	IR	]-∞,-1]
X2	[-8,-3]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]∪[2,+∞[	IR
X3	[-6,-1]	IR	]-∞,-2]∪[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-9,-4]	[1,+∞[	IR	]-∞,-3]	{0}

Filtrage avec wbdAC3, avec file comme suit : Q={(X1,X4),(X4,X1)}. Comme le TCSP au niveau du nœud père (racine) était fermée par wbdAC3, on initialise la file à l'arc instancié (dans les deux sens).

Etape 4-1 : prendre la paire (X1,X4)

M4[0,1]=M4[0,1]∩M4[0,4]°^{w}M4[4,1]=[1,6]∩[4,9]°[1,+∞[=[5,6]

Modification. On remet dans la file (X2,X1). Nouvelle configuration :

Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M4[0,1]	M4[0,2]	M4[0,3]	M4[0,4]
[5,6]	[3,8]	[1,6]	[4,9]

Etape 4-2 : prendre la paire (X2,X1)

M4[0,2]=M4[0,2]∩M4[0,1]°^{w}M4[1,2]=[3,8]∩[5,6]°[2,+∞[=[7,8]

Modification. On ne remet pas (X3,X2) dans la file car fermeture convexe de M1[2,3] égale à IR (IR absorbant pour la composition). Nouvelle configuration :

Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M4[0,1]	M4[0,2]	M4[0,3]	M4[0,4]
[5,6]	[7,8]	[1,6]	[4,9]

Etape 4-3 : prendre la paire (X4,X1)

M4[0,4]=M4[0,4]∩M4[0,1]°^{w}M4[1,4]=[4,9]∩[5,6]°]-∞,-1]=[4,5]

Modification. On remet (X3,X4) dans la file. Nouvelle configuration :

Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2),
(X3,X4),(X4,X3)}

M4[0,1]	M4[0,2]	M4[0,3]	M4[0,4]
[5,6]	[7,8]	[1,6]	[4,5]

Etape 4-4 : prendre la paire (X3,X4)

$M4[0,3]=M4[0,3]\cap M4[0,4]\circ^{w} M4[4,3]=[1,6]\cap[4,5]\circ]-\infty,-3]=[1,2]$

Modification. On ne remet pas (X2,X3) dans la file car fermeture convexe de M1[X3,X2] égale à IR. Nouvelle configuration : Q={(X1,X2),(X2,X1),(X1,X4),(X4,X1),(X2,X3),(X3,X2), (X3,X4),(X4,X3)}

M4[0,1]	M4[0,2]	M4[0,3]	M4[0,4]
[5,6]	[7,8]	[1,2]	[4,5]

File vide. Filtrage de M4 (fils droit de la racine) terminé sans qu'un domaine devienne vide. Le TCSP après filtrage :

M4f=bdAC3(M4)=

	X0	X1	X2	X3	X4
X0	{0}	[5,6]	[7,8]	[1,2]	[4,5]
X1	[-6,-5]	{0}	[2,+∞[	IR	]-∞,-1]
X2	[-8,-7]	]-∞,-2]	{0}	]-∞,-3]∪[2,+∞[	IR
X3	[-2,-1]	IR	]-∞,-2]∪[3,+∞[	{0}	[3,+ ∞[
X4	[-5,-4]	[1,+∞[	IR	]-∞,-3]	{0}

Optc=max{5+durée(T1),7+durée(T2),1+durée(T3),4+durée(T4)}=9

Comme la valeur courante de Opt est 6, on a Optc>Opt, ce qui nous garantit qu'on ne peut pas améliorer en descendant. Le solveur prend fin, avec l'optimum et la solution le réalisant comme suit :

- Opt=6
- Sol=(0,1,4,1,4)