CHAPITRE 1

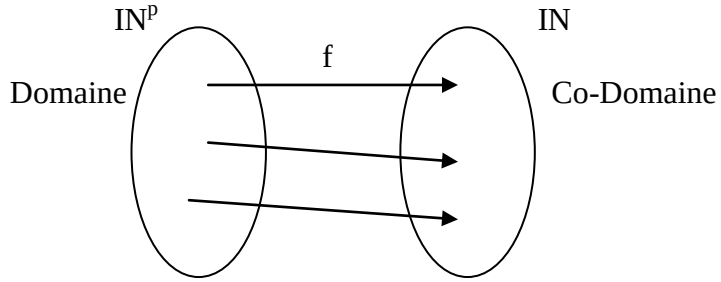
Calculabité des fonctions : les fonctions récursives

I) – INTRODUCTION :

La notion de décidabilité d'un problème et les notions qui lui sont liées comme la semi-décidabilité , la calculabilité et la récursivité sont fondamentales pour l'informatique en général ; car elles caractérisent les choses qui sont à sa portée :

- Un problème qu'un ordinateur est susceptible de résoudre est un problème dit décidable càd un problème correspondant à un prédicat décidable. Ce dernier est un terme ayant un sens mathématique rigoureux et indépendant de tout langage de programmation.
- Une fonction qu'un ordinateur peut calculer est une fonction dite récursive càd une fonction à laquelle correspond un processus de calcul (un algorithme qui la calcule). La récursivité elle aussi peut être défini mathématiquement et formellement

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéresserons à la calculabilité des fonctions de $IN^p \rightarrow IN$:



p est appelé l'arité de la fonction f :

- p =1 , f est d'arité 1 : f est dite monaire
- p =2, f est d'arité 2 : f est dite binaire
- p =3, f est d'arité 3 : f est dite tertiaire
  …
- p =n, f est d'arité n : f est dite n-aire

Nous généraliserons ensuite aux fonctions de $IN^p \rightarrow IN^q$.

Nous étudierons deux caractérisations de la calculabilité des fonctions :

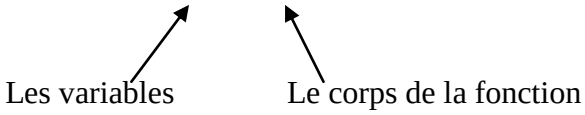
- Caractérisation avec les fonctions récursives
- Caractérisation avec les machines de Turing

Le reste de ce chapitre traitera la première caractérisation. Le chapitre 2 traitera la deuxième caractérisation.

II) – LES FONCTIONS RECURSIVES :

Notation : Nous utiliserons par la suite la notation dite λ - Notation pour définir une fonction.

Exemple 1 : la fonction ⊕ sera notée : ⊕ = λxy•x+y



Nous nous intéressons à présent à la question suivante :

- Etant donnée une fonction f quelconque de $IN^p \rightarrow IN$, f est-elle calculable ?

La réponse sera :

- f est calculable si elle vérifie certains critères.

Pour cela, nous nous donnons des outils permettant de construire cette fonction. Si nous réussissons, cela veut dire que la fonction est calculable. Mais toute construction à besoin de matière première et de règles de construction. Dans notre cas la matière première est constituée des fonctions de base supposées calculables, alors que les règles de construction sont des règles qui nous permettent de combiner des fonctions déjà calculables pour en construire d'autres.

II .1) – LES FONCTIONS DE BASE :

- La Fonction Z d'arité 0 : $Z=\lambda.0$
- La Fonction S d'arité 1 : $S=\lambda n.n+1$
- Les Fonctions Projections d'arité n (n>=1) : $P_i^n=\lambda x_1 \ldots x_n.x_i$ $(1<= i <=n)$

Définies par : $Z=0$

$S(n)=n+1 \qquad \forall n \in IN$

$P_i^n(x_1, \ldots, x_n)= x_i \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in IN^n$

Cas particulier : si i = n = 1 nous obtenons la fonction Identité $P_1^1= \lambda x . x$

II.2) – LES REGLES DE CONSTRUCTION DE FONCTIONS :

Ce sont des règles qui permettent de construire des fonctions à l'aide d'autres fonctions calculables. Les fonctions ainsi construites deviennent à leur tour calculables.
Il s'agit des trois (03) règles suivantes :

- Règle de COMPOSITION
- Règle de RECURSION
- Règle de MINIMISATION

II.2.1) - Règle de COMPOSITION :

Définition 1 :
Soient H une fonction d'arité m et G1, …, Gm m fonctions d'arité n. La fonction F d'arité n est dite construite par composition à partir des fonctions H et G1, …, Gm si F est définie de la manière suivante :

$$\mathbf{F=\lambda x_1 \ldots x_n.H(G1(x_1 \ldots x_n),\ldots,Gm(x_1 \ldots x_n))}$$

Notation :
$H(G1(x_1 \ldots x_n),\ldots,Gm(x_1 \ldots x_n))$ est noté $[H°(G1, \ldots, Gm)](x_1 \ldots x_n)$: donc $F= H°(G1, \ldots, Gm)$. C'est la composition généralisée.
Cas particulier : m = 1
$F=\lambda x_1 \ldots x_n.H(G(x_1,\ldots,x_n))$: nous retrouvons la composition simple H°G.

II.2.2) - Règle de RECURSION :

Définition 2 :
Soient G une fonction d'arité n et H une fonction d'arité n+2. La fonction F d'arité (n+1) est dite construite par récursion à partir des fonctions G et H si $\forall (x_1, \ldots,x_n) \in IN^n$

$$\mathbf{F(x_1,\ldots,x_n,0) = G(x_1,\ldots,x_n)}$$
$$\mathbf{F(x_1,\ldots,x_n,y+1) = H(x_1, \ldots,x_n, F(x_1, \ldots,x_n,y),y)}$$

Cas particuliers :

- n=1 : F(x,0)=G(x)
  F(x,y+1)=H(x,F(x,y),y)
- n=0 : F(0)=Cst
  F(y+1)=H(F(y),y)
  où Cst est une constante entière considérée comme une fonction d'arité 0 appelée fonction constante.

II.2.3) - Règle de MINIMISATION :

Définition 3 :
Soit G une fonction d'arité n+1 telle que pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in IN^n$ il existe au moins un $y \in IN$ tel que : $G(x_1,\ldots,x_n,y) = 0$.
La fonction F d'arité n est dite construite par minimisation à partir de la fonction G si F est définie da la manière suivante :

$$\mathbf{F=\lambda x_1 \ldots x_n.F(x_1, \ldots,x_n)}$$

Où $F(x_1, \ldots,x_n)$ est le plus petit entier y tel que $G(x_1,\ldots,x_n,y)=0$.

Exemple 2 :
Soit la fonction $G=\lambda xyz.(x+y)/(z+1)$, avec / représentant la division entière. La fonction G vérifie bien la condition : pour tous x, y dans IN, il existe z dans IN tel que G(x,y,z)=0 ; prendre, par exemple, z=x+y. La fonction $plus=\lambda xy.x+y$ est construite par minimisation à partir de G : pour tous x, y dans IN, plus(x,y)=x+y est le plus petit entier tel que G(x,y,plus(x,y))=0.

II .3) – LES FONCTIONS PRIMITIVES RECURSIVES ET LES FONCTIONS RECURSIVES :

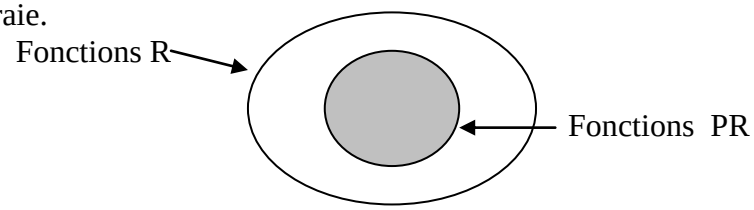
Définition 4 :
Une fonction est dite PRIMITIVE RECURSIVE (PR) si elle est :

- soit une fonction de base,
- soit une fonction construite à partir d'autres fonctions PR au moyen des règles de Composition et/ou de Récursion.

Définition 5 :
Une fonction est dite RECURSIVE (R) si elle est :

- soit une fonction de base,
- soit une fonction construite à partir d'autres fonctions R au moyen des règles de Composition et/ou de Récursion et/ou de Minimisation.

Remarque 1 :
Toute fonction PRIMITIVE RECURSIVE est RECURSIVE mais la réciproque n'est pas vraie.



Remarque 2 :
Plusieurs constructions différentes peuvent être associées à une même fonction.

Remarque 3 :
Une fonction est PRIMITIVE RECURSIVE si elle est définie sans utiliser la règle de minimisation. Mais dire qu'une fonction RECURSIVE n'est pas PRIMITIVE RECURSIVE signifie que toutes tentative de construction de cette fonction fait intervenir la règle de minimisation.

EXEMPLE 3 :
Montrons que la fonction $\oplus$ d'arité 2 définie par : $\oplus=\lambda xy.x+y$ est PR.

Pour ce faire nous allons procéder à une construction en utilisant la règle de récursion :

$\oplus(x,0)= x + 0 = x=P_1^1(x)$

$\oplus(x,y+1)=x+(y+1)=(x+y)+1=\oplus(x,y)+1=S(\oplus(x,y))$
$=S(P_2^3(x,\oplus(x,y),y))$
$=(S\circ P_2^3)(x,\oplus(x,y),y)$

Nous avons donc : $G=P_1^1$ est PR car c'est fonction de base.
$H=(S\circ P_2^3)$ est PR car c'est une composition de 2 fonctions de base.

La fonction $\oplus$ est construite par récursion à partir de 2 fonctions PR, à savoir G et H, donc $\oplus$ est PR.

Exemple 4 :

Une constante n est considérée comme la fonction constante d'arité 0 $F_n=\lambda.n$. On montre par récurrence que F_n est PR, pour toute constante n :

- $F_0=\lambda.0=Z$ est PR car fonction de base
- $F_1=\lambda.1=S°Z$ est PR par application de la règle de composition aux fonctions de base (donc PR) H=S d'arité m=1 et G1=Z d'arité n=0 (voir règle de composition)
- **Hypothèse de récurrence :** supposons que la propriété est vraie jusqu'à un certain $k\geq 1$: pour toute constante $n\leq k$, la fonction constante d'arité 0 $F_n=\lambda.n$ est PR
- Montrons que la propriété reste alors vraie pour n=k+1 ; en d'autres termes, montrons que la fonction constante d'arité 0 $F_{k+1}=\lambda.k+1$ est PR. C'est le cas parce que la fonction peut être construite par application de la règle de composition aux fonctions PR H=S d'arité m=1 et $G1=F_k=\lambda.k$ ($G1=F_k$ PR d'après l'hypothèse de récurrence) d'arité n=0 : $F_{k+1}=S°F_k$
- **Conclusion :** la fonction constante d'arité 0 $F_n=\lambda.n$ est PR, pour toute constante n

Exemple 5:

Montrons que la fonction constante d'arité 1 $F=\lambda n.c$ est PR. On le montre par application de la règle de récursion aux fonctions PR $g=\lambda.c$ (d'arité 0) et $h= P^2_1$ d'arité 2 :

- F(0)=c=g
- $F(n+1)=F(n)=c= P^2_1(F(n),n)$

Définition 6 (Equivalente) :

Une fonction F est PRIMITIVE RECURSIVE (respectivement : RECURSIVE) s'il existe une suite finie de fonctions $F_1,\ldots,F_n$ telles que :

- $F_n = F$
- Et pour chaque $i\in\{1,\ldots,n\}$
  - soit F_i est une fonction de base,
  - soit il a été déjà prouvé que F_i est PRIMITIVE RECURSIVE (respectivement : RECURSIVE)
  - soit F_i est définie à partir de certaines des fonctions $F_1,\ldots,F_{i-1}$ au moyen de la règle de composition ou de récursion (respectivement : la règle de composition ou de récursion ou de minimisation).

La suite des fonctions $F_1 , \ldots , F_n$ est appelée une dérivation PRIMITIVE RECURSIVE (respectivement : RECURSIVE) de F

EXEMPLE 6 :

Montrons que la fonction $\otimes$ d'arité 2 définie par : $\otimes=\lambda xy.x+y$ est PR.
Puis donnons une dérivation PRIMITIVE RECURSIVE de $\otimes$.

Pour ce faire nous allons procéder à une construction en utilisant la règle de récursion :

$\otimes(x,0)=x*0=0=Z(x)$

$\otimes(x,y+1)=x*(y+1)=(x*y)+x=\otimes(x,y)+x=\oplus(\otimes(x,y),x)$

$=\oplus(P^3_2(x,\otimes(x,y),y),P^3_1(x,\otimes(x,y),y))$

$=[\oplus°(P^3_2, P^3_1)](x,\otimes(x,y),y)$

Nous avons donc : G=Z est PR car c'est fonction de base.

H=⊕°(P^3_2, P^3_1) est PR car c'est une composition de fonctions PR, ⊕ (déjà montré), P^3_2 (de base) et P^3_1 (de base).

La fonction ⊗ est construite par récursion à partir de 2 fonctions PR , à savoir G et H, donc ⊗ est PR.

A partir de cette construction, nous pouvons définir pour la fonction ⊗, la dérivation PR suivante :

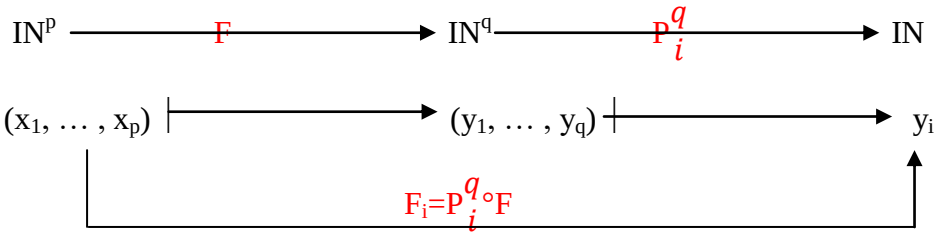
F_1=Z	fonction de base (arité 1)
F_2=⊕	PR déjà montrée (arité 2)
F_3=P^3_2	fonction de base (arité 3)
F_4=P^3_1	fonction de base (arité 3)
F_5=F_2°(F_3,F_4)	composition appliquée à F_2, F_3 et F_4 (arité 3)
F_6=⊗	récursion appliquée à F_1 et F_5 (arité 2)

En conclusion, la suite de fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 est une dérivation PR de la fonction ⊗.

Remarque :

Nous pouvons étendre les notions de fonctions PRIMITIVES RECURSIVES et de fonctions RECURSIVES aux fonctions de IN^p ---> IN^q avec q>=1.

Pour cela, nous utiliserons le fait qu'une fonction F de IN^p ---> IN^q peut être décomposée en q fonctions F_i de IN^p ---> IN comme le montre le diagramme suivant :



Alors F est dite PRIMITIVE RECURSIVE (respectivement : RECURSIVE) si et seulement si toutes les fonctions de projection F_i= P^q_i°F (1<=i<=q) sont PRIMITIVES RECURSIVES (respectivement : RECURSIVES).

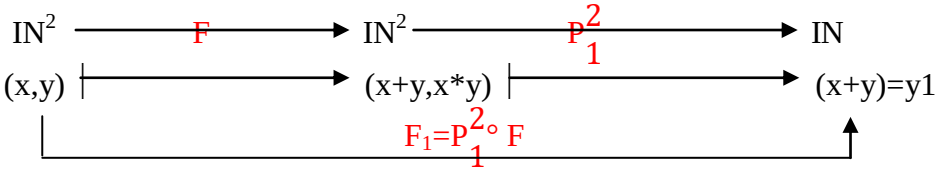
EXEMPLE 7 :

Montrons que la fonction F définie comme suit est PR :

F : IN^2 ⟶ IN^2

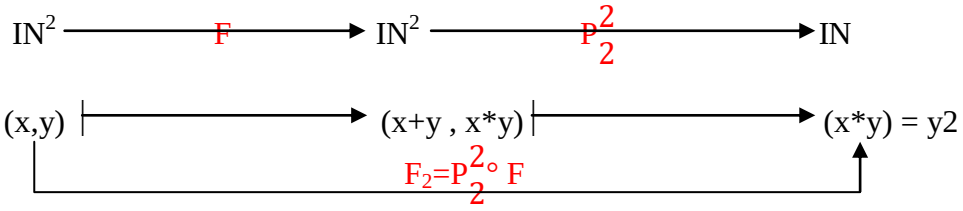
(x , y) ⟼ (x+y,x*y)

soit F_1 la fonction définie par :



$F_1 = \oplus$ donc PR.

De même soit F_2 la fonction définie par :



$F_2 = \otimes$ donc PR.

Conclusion : F_1 et F_2 sont PR donc F est PR

II .4) – RECURSIVITE POUR LES ENSEMBLES

Définition 7 :
Soit A un sous ensemble de IN^p, nous appelons fonction CARACTERISTIQUE de A (par rapport à IN^p) , notée Car_A , la fonction :

$$Car_A : IN^p \longrightarrow \{ 0 , 1 \}$$
$$X \longmapsto 1 \quad Si \quad X \in A$$
$$X \longmapsto 0 \quad Si \quad X \notin A$$

Définition 8 :
Un ensemble A est dit RECURSIF (Respectivement : PREMITIF RECURSIF) si Car_A est RECURSIVE (Respectivement : PREMITIVE RECURSIVE).

Définition 9 (Intuitive):
Un ensemble A de IN^p est dit DECIDABLE si nous pouvons décider quelque soit $x \in IN^p$ si $x \in A$ ou si $x \notin A$.

Proposition : ?
Si A est un ensemble RECURSIF alors A est un ensemble DECIDABLE.

Indications sur la preuve :
En effet, si un ensemble A est récursif cela signifie que la fonction caractéristique de A, soit Car_A, est elle même récursive. Donc nous savons calculer la valeur $Car_A(x)$ et cela quelque soit $x \in IN^p$. De plus, comme l'ensemble des images de Car_A étant restreint à 2 valeurs : 0 ou 1, nous sommes devant 2 cas :

- ou bien $Car_A(x) = 1$ au quel cas $x \in A$.
- ou bien $Car_A(x) = 0$ au quel cas $x \notin A$.

En conclusion, quelque soit $x \in IN^p$ nous pouvons toujours décider si $x \in A$ ou si $x \notin A$.

EXEMPLE : ?

Définition 10 :
Un ensemble A est dit EFFECTIVEMENT ENUMERABLE si et seulement s'il existe une fonction F récursive telle que l'ensemble des images de F est l'ensemble A lui même.

EXEMPLE : ?

Remarque :
D'une manière analogue, nous pouvons étendre la notion de RECURSIVITE aux relations.

Définition 11 :
Soit R une relation définie sur l'ensemble IN^p, nous appelons fonction CARACTERISTIQUE de R (par rapport à IN^p) , notée Car_R , la fonction :

$$Car_R : \quad IN^p \longrightarrow \{0 , 1 \}$$

$$X \longmapsto 1 \text{ Si } X \text{ vérifie la relation R}$$

$$X \longmapsto 0 \text{ Si } X \text{ ne vérifie pas la relation R}$$

Définition 12 :
Une relation R est dite RECURSIVE (Respectivement : PREMITIVE RECURSIVE) si Car_R est RECURSIVE (Respectivement : PREMITIVE RECURSIVE).

EXEMPLE : ?