Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté d'Electronique et d'Informatique
Département d'Informatique
LMD Licence 1ère Année Mathématiques-Informatique 2012/2013
Module ''Programmation Fonctionnelle''
Date : 26/05/2013

Corrigé de l'examen
(préparé par Mrs Behloul et Isli)

Exercice 1 :

1. Les réponses sont comme suit :
   1.1. f :string→string→int=<fun>
   1.2. f "12" "112012" =f "12" "12012"=1+f "12" "2012"=1+f "12" "012"=1+f "12" "12"
   =1+1+f "12" "2"=1+1+0=2
   1.3. La fonction f compte le nombre de fois que le premier argument est sous-chaine du deuxième argument (le nombre d'occurrences du premier argument dans le second) ; c'est-à-dire le nombre de possibilités d'écrire y sous forme txv, x et y étant les premier et deuxième arguments de f, et t et v deux chaînes de caractères.
2. let rec fusion L1 L2=if L1=[] then L2

```
let rec fusion L1 L2=if L1=[] then L2
                     else   if L2=[] then L1
                            else   if hd L1<hd L2 then hd L1::fusion (tl L1) L2
                                   else hd L2::fusion L1 (tl L2);;
```

La version ci-dessus de la fonction fusion est une version "avec répétition" (elle ne supprime pas les redondances). Ci-dessous trois versions "sans répétition" de la fonction fusion :

- Version 1 : remplacer la partie en gras par :

```
else   if hd L2<hd L1 the hd L2::fusion L1 (tl L2)
       else hd L1::fusion (tl L1) (tl L2);;
```

- Version 2 : remplacer la partie en gras par :

```
else   if hd L2<hd L1 the hd L2::fusion L1 (tl L2)
       else fusion (tl L1) L2;;
```

- Version 3 : remplacer la partie en gras par :

```
else   if hd L2<hd L1 the hd L2::fusion L1 (tl L2)
       else fusion L1 (tl L2);;
```

Exercice 2 :

1. A est primitif récursif ssi sa fonction caractéristique Car_A est PR :

$$Car_A=\lambda x.\begin{cases}1\ si\ x\ pair,\\ 0\ sinon\end{cases}$$

$Car_A(x)=r(2,x+1)=r(S°S°Z1(x),S(x))=[r°(S°S°Z1,S)](x)$
Donc Car_A est bien PR. En voici une dérivation PR :

g_1=Z1 PR (montré en cours), Z1 étant la fonction zéro d'arité 1 : Z1=λx.0
g_2= S PR car de base
g_3= r de base (par hypothèse)
$g_4= g_2°g_1$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_2 et g_1)
$g_5= g_2°g_4$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_2 et g_4)
$Car_A= g_3°(g_5,g_2)$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_3, g_5 et g_2)

Conclusion : l'ensemble A est bien primitif récursif

2. La fonction f_0 vérifie $f_0(x)=1=(S°Z1)(x)$. Donc $f_0=S°Z1$ et est donc PR grâce à la règle de composition appliquée aux fonctions PR S et Z1 (S PR car de base, $Z1=\lambda x.0$ PR –montré en cours).
La fonction f_1 vérifie $f_1(x)=x=P_1^1(x)$. La fonction f_1 est la fonction de base P_1^1 et est donc PR.
Hypothèse de récurrence : on suppose l'hypothèse vraie jusqu'à un certain $k\geq 1$: $\forall i\leq k$, f_i est PR
Montrons que l'hypothèse reste vraie pour $i=k+1$:

$f_{k+1}(x)=x^{k+1}=\otimes(f_k(x),x)=[\otimes°(f_k,P_1^1)](x)$. Donc f_{k+1} est PR ; en voici une dérivation PR :

$g_1=f_k$ PR (hypothèse de récurrence)
$g_2= P_1^1$ PR car de base
$g_3= \otimes$ PR
$f_{k+1}=g_3°(g_1,g_2)$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_3, g_1 et g_2)

Conclusion : $\forall i\geq 0$, f_i PR

3. $g(x)=x^2*r(2,x+1)+x^3*r(2,x)= x^2*car_A(x)+x^3*r(2,x)$. On montre que $h=\lambda x.r(2,x)$ est PR :

$h(x)=r(2,x)=[r°(S°S°Z1,P_1^1)](x)$ donc h est PR ; en voici une dérivation PR :

$g_1= Z1=\lambda x.0$ PR (montré en cours)
$g_2=$ S PR car de base
$g_3= P_1^1$ PR car de base
$g_4= g_2°g_1$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_2 et g_1)
$g_5= g_2°g_4$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_2 et g_4)
$g_6=$ r PR (hypothèse)
$h= g_6°(g_5,g_3)$ PR (règle de composition appliquée aux fonctions g_6, g_5 et g_3)

g(x) devient : $g(x)=[\oplus°(\otimes°(f_2,Car_A), \otimes°(f_3,h))](x)$. g est donc PR ; en voici une dérivation PR :

$g_1=f_2$
$g_2= Car_A$
$g_3=\otimes$
$g_4=g_3°(g_1,g_2)$
$g_5=f_3$
$g_6=h$
$g_7= g_3°(g_5,f_6)$
$g_8=\oplus$
$g= g_8°(g_4,g_7)$

Exercice 3 :

1. Les réponses sont comme suit :

   A. **Calcul de f(1,20) :**

   Initialement : $q_0 1^2 * 1^{21}$

   2 fois l'instruction (1) : $1^2 q_0 * 1^{21}$

   1 fois l'instruction (2) : $1^2 q_1 1^{22}$

   3 fois l'instruction (3) : $q_1 0 1^{24}$

   1 fois l'instruction (4) : $q_2 1^{24}$

   1 fois l'instruction (5) : $q_3 0 1^{23}$

   1 fois l'instruction (6) : $q_4 1^{23}$

   1 fois l'instruction (7) : $q_5 0 1^{22}$

   1 fois l'instruction (8) : $q_6 1^{22}$

   1 fois l'instruction (9) : $q_7 0 1^{21}$

   1 fois l'instruction (10) : $q_f 1^{21}$

   Donc f(1,20)=20

   Calcul de f(4,3) :

   Initialement : $q_0 1^5 * 1^4$

   5 fois l'instruction (1) : $1^5 q_0 * 1^4$

   1 fois l'instruction (2) : $1^5 q_1 1^5$

   6 fois l'instruction (3) : $q_1 0 1^{10}$

   1 fois l'instruction (4) : $q_2 1^{10}$

   1 fois l'instruction (5) : $q_3 0 1^9$

   1 fois l'instruction (6) : $q_4 1^9$

   1 fois l'instruction (7) : $q_5 0 1^8$

   1 fois l'instruction (8) : $q_6 1^8$

   1 fois l'instruction (9) : $q_7 0 1^7$

   1 fois l'instruction (10) : $q_f 1^7$

   Donc f(4,3)=6

   B. $f=\lambda xy.(x+y-1)$

2. L'ensemble I des instructions de la machine est comme suit :

   I={ (1) $q_0 1 0 q_1$, (2) $q_1 0 D q_2$, (3) $q_2 1 D q_2$, (4) $q_2 * D q_3$, (5) $q_3 1 D q_4$,
   (6) $q_4 0 G q_{10}$, (7) $q_4 1 D q_5$, (8) $q_5 1 D q_5$, (9) $q_5 0 G q_6$, (10) $q_6 1 0 q_7$,
   (11) $q_7 0 G q_6$, (12) $q_6 * D q_8$, (13) $q_8 0 1 q_8$, (14) $q_8 1 D q_9$, (15) $q_9 0 1 q_{10}$,
   (16) $q_{10} 1 G q_{10}$, (17) $q_{10} * G q_{10}$, (18) $q_{10} 0 D q_f$}

   La machine commence par remplacer la barre la plus à gauche par un blanc (instruction (1)). Ensuite elle avance jusqu'à arriver sur le deuxième symbole après l'étoile : elle se retrouve alors dans l'état interne q_4. Si ce deuxième symbole est un blanc (instruction (6)), elle recule d'une case et passe dans l'état interne q_{10} qui lui permet d'exécuter la suite (16)-(17)-(18) d'instructions et de passer dans l'état final. Si le deuxième symbole est une barre (instruction (7)), elle avance jusqu'à arriver sur le premier blanc à droite puis recule d'une case pour passer dans l'état q_6 (instruction (9)) qui lui permet alors de supprimer toutes les barres à droite de l'étoile avant de se retrouver dans l'état interne q_6 avec la tête de lecture/écriture sur l'étoile : elle exécute alors les instructions

(12)-(13)-(14) pour mettre deux barres à droite de l'étoile et passer dans l'état interne q_{10} lui permettant, grâce aux instructions (16)-(17)-(18), de se ramener dans l'état interne final.