

## Examen final

### Exercice 1 (7 points = (1,5+1,5)+2+2) (Fonctions récursives)

1) Montrer que les fonctions suivantes sont Primitives Récursives :

- Triple (x) = 3 x
- Moitié (x) = x Div 2

2) Montrer que la relation suivante est Primitive Récursive :

$$\text{Pair}(x) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } x \text{ est pair,} \\ \text{faux} & \text{sinon} \end{cases}$$

3) Dédurre que la fonction « Collatz » suivante est Primitive Récursive :

$$\text{Collatz}(x) = \begin{cases} x \text{ Div } 2 & \text{si } x \text{ est pair,} \\ 3x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indication : Les fonctions suivantes sont PR :  $\oplus$ ,  $\otimes$ , Moins, Fact, Abs, Exp, Sg,  $\overline{\text{Sg}}$ , Pred, mod, les fonctions constantes d'arité 0 ou 1.

### Exercice 2 (6,5 points = ((0,5+1+1,5)+1) +2,5) (Machines de Turing)

1) Soit la Machine de Turing  $MT = \langle E, S, I \rangle$  avec :

$$I = \{ (1) q_0 1 D q_0, (2) q_0 0 G q_1, (3) q_1 1 G q_1, (4) q_1 0 D q_f, (5) q_0 ** q_3, (6) q_3 * 0 q_2, (7) q_2 0 D q_3, (8) q_3 1 0 q_2, (9) q_3 0 G q_4, (10) q_4 0 G q_4, (11) q_4 1 G q_1 \}$$

a) Donner les configurations finales après exécution des instructions de MT en partant des configurations initiales suivantes :

<b>Configuration Initiale</b>	$q_0 \underline{3}$	$q_0 \underline{3} * \underline{2}$	$q_0 \underline{3} * \underline{2} * \underline{1}$
<b>Configuration Finale</b>	$q_f \underline{?}$	$q_f \underline{?}$	$q_f \underline{?}$

b) Quelles sont toutes les fonctions calculées par MT ?

2) Définir les instructions d'une Machine de Turing qui calcule la fonction f suivante :  $f(x,y) = \text{Sg}(x+y)$

### Exercice 3 (6,5 points = ((1,5+(1,5+1)) +2,5) (Langage CAML)

1) On considère l'instruction CAML suivante :

let rec f x = if x = [] then [] else (hd x, string\_length(hd x)) :: f (tl x) ;;

a) Donner le type de f inféré par CAML.

b) Dérouler la fonction f pour  $x = ["OPM"; "Algo"; ""; "Analyse"]$ . Que fait f ?

2) Ecrire une fonction CAML **nbMaj** comptant le nombre de lettres majuscules dans une chaîne de caractères.

Indication : si x est une chaîne de caractères et i un entier,  $x.[i]$  donne le caractère de x d'indice i, le premier caractère étant d'indice 0.

...Bon courage...

Corrigé Final OPM (3/6/2023)  
Isli et Behloul

Exercice 1

1)i) Notons par :  $\forall x \in \mathbb{N}, C_3^1(x) = 3 : PR$   
alors  $Triple(x) = 3x = \otimes \circ (C_3^1, P_1^1)(x) : PR$

1,5

ii) Notons par  $rest(x) = x \text{ mod } 2 : PR.$

Preuve par récursion

$Moitié(0) = 0 = Z : PR$

$$Moitié(y + 1) = \begin{cases} Moitié(y) & \text{si } rest(y) = 0 \\ 1 + Moitié(y) & \text{si } rest(y) = 1 \end{cases}$$

$$Moitié(y + 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } rest(y) = 0 \\ 1 & \text{si } rest(y) = 1 \end{cases} + \begin{cases} Moitié(y) & \text{si } rest(y) = 0 \\ Moitié(y) & \text{si } rest(y) = 1 \end{cases}$$

$$Moitié(y + 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } rest(y) = 0 \\ 1 & \text{si } rest(y) = 1 \end{cases} + Moitié(y) \begin{cases} 1 & \text{si } rest(y) = 0 \\ 1 & \text{si } rest(y) = 1 \end{cases}$$

$$Moitié(y + 1) = rest(y) + Moitié(y)$$

$$Moitié(y + 1) = \oplus \circ (rest \circ P_2^2, P_1^2)(Moitié(y), y) : PR$$

1,5

donc la fonction *Moitié* est PR

2) La fonction caractéristique de la relation "Pair", s'écrit

$$Car_{pair}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } rest(x) = 0 \\ 0 & \text{si } rest(x) = 1 \end{cases} = \overline{Sg}(rest(x)) : PR$$

2

donc la relation "Pair" est PR

$$3) \text{ On a } Collatz(x) = \begin{cases} Moitié(x) & \text{si } rest(x) = 0 \\ S(Triple(x)) & \text{si } rest(x) = 1 \end{cases}$$

2

alors  $Collatz(x) = \overline{Sg}(rest(x)) * Moitié(x) + Sg(rest(x)) * S(Triple(x))$

ainsi  $Collatz(x) = \oplus \circ (\otimes \circ (\overline{Sg} \circ rest, Moitié), \otimes \circ (Sg \circ rest, S \circ Triple))(x) : PR$

Exo 2:

(2/3)

$$1) a) q_0 \underline{3} = q_0 \text{||||} \xrightarrow{4x(1)} \text{||||} q_0 0 \xrightarrow{(2)} \text{||} q_1 1 \xrightarrow{4x(3)} q_1 0 \text{||||}$$

$$\xrightarrow{(4)} q_f \text{||||} = q_f \underline{3} \quad (0,5)$$

$$q_0 \underline{3} * \underline{2} = q_0 \text{||||} * \text{||} \xrightarrow{4x(1)} \text{||||} q_0 * \text{||} \xrightarrow{(5)} \text{||||} q_3 * \text{||}$$

$$\xrightarrow{(6)} \text{||||} q_2 0 \text{||} \xrightarrow{3x[(7) \text{ puis } (8)]} \text{||||} 0000 q_2 0 \xrightarrow{(7)} \text{||||} 0000 q_3 0$$

$$\xrightarrow{(9)} \text{||||} 0000 q_4 0 \xrightarrow{4x(10)} \text{||} q_4 1 \xrightarrow{(11)} \text{||} q_1 1 \xrightarrow{3x(3)} q_1 0 \text{||||}$$

$$\xrightarrow{(4)} q_f \text{||||} = q_f \underline{3} \quad (1)$$

$$q_0 \underline{3} * \underline{2} * \underline{1} = q_0 \text{||||} * \text{||} * \text{||} \xrightarrow{4x(1)} \text{||||} q_0 * \text{||} * \text{||}$$

$$\xrightarrow{(5)} \text{||||} q_3 * \text{||} * \text{||} \xrightarrow{7x[(6) \text{ ou } (8) \text{ puis } (7)]} \text{||||} 00000000 q_3 0$$

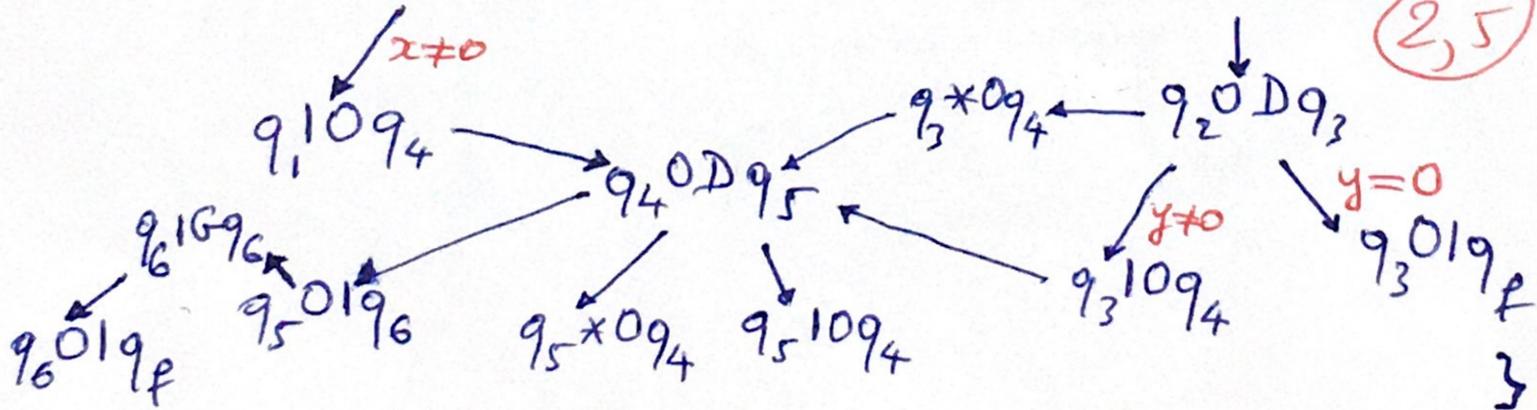
$$\xrightarrow{(9) \text{ puis } 7x(10)} \text{||} q_4 1 \xrightarrow{(11) \text{ puis } 3x(3)} q_1 0 \text{||||}$$

$$\xrightarrow{(4)} q_f \text{||||} = q_f \underline{3} \quad (1,5)$$

b) NT Calcule toutes les fonctions  $P_1^n$ ,  $n \geq 1$  (1)

2) I = {

$$q_0 10 q_0 \rightarrow q_0 0 D q_1 \xrightarrow{x=0} q_1 * 0 q_1 \rightarrow q_1 0 D q_2 \rightarrow q_2 10 q_2$$



1)

1,5

a)  $f: \text{string list} \rightarrow (\text{string} * \text{int}) \text{ list} = \langle \text{fun} \rangle$ b)  $f ["OPM"; "Algo"; ""; "Analyse"];$ - :  $(\text{string} * \text{int}) \text{ list} = ["OPM", 3; "Algo", 4; "", 0; "Analyse", 7]$ 

Déroulement:

 $f ["OPM"; "Algo"; ""; "Analyse"] =$ 

1,5

 $("OPM", 3) :: f ["Algo"; ""; "Analyse"] =$  $("OPM", 3) :: ("Algo", 4) :: f [""; "Analyse"] =$  $("OPM", 3) :: ("Algo", 4) :: ("", 0) :: f ["Analyse"] =$  $("OPM", 3) :: ("Algo", 4) :: ("", 0) :: ("Analyse", 7) :: f [] =$  $["OPM", 3] :: ["Algo", 4] :: ["", 0] :: ["Analyse", 7] :: [] =$  $["OPM", 3]; ["Algo", 4]; ["", 0]; ["Analyse", 7]$ 

①

La fonction  $f$  ajoute à chaque chaîne de caractères d'une liste, sa longueur.

2) let rec nbCaraj x = if x = "" then 0

else if (x.[0] &gt;= 'A' &amp;&amp; x.[0] &lt;= 'Z') then

1 + nbCaraj (substring x 1

(string\_length x - 1))

else nbCaraj (substring x 1

(string\_length x - 1));;

nbCaraj: string  $\rightarrow$  int =  $\langle \text{fun} \rangle$ 

2,5