

## Examen Final

### Exercice 1 (6,5 points = 2,5+2,5+1,5) (Fonctions Récursives)

- 1) En utilisant la règle de récursion, montrer que la fonction F1 est Primitive Récursive :

$$F1(x, y) = |x - 0| + \dots + |x - y| = \sum_{k=0}^y Abs(x, k)$$

- 2) En déduire, en utilisant la règle de composition, que la fonction F2 est Primitive Récursive :

$$F2(x, y, z) = \sum_{k=0}^y |x - k + z|$$

- 3) Montrer que les fonctions  $S_n$  d'arité  $n \geq 1$  sont Primitives Récursives :

$$S_n = \lambda x_1 \dots x_n . (x_1 + \dots + x_n) \bmod 2$$

**Indication :** les fonctions suivantes sont PR :  $\oplus$ ,  $\otimes$ , Moins, Fact, Abs, Exp, Sg,  $\overline{Sg}$ , Pred, mod, div, les fonctions constantes d'arité 0, les fonctions constantes d'arité 1.

### Exercice 2 (6,5 points = (4\*0,5+1) + (1,5+2)) (Machines de Turing)

- 1) Soit la Machine de Turing  $MT = \langle S, E, I \rangle$  avec :

$$I = \{ (1) q_0 1 D q_1, (2) q_1 1 D q_2, (3) q_2 1 D q_1, (4) q_1 0 G q_3, (5) q_2 0 1 q_3, (6) q_3 1 G q_3, (7) q_3 0 D q_f \}$$

- a) Dérouler la machine pour  $x = 0$ , pour  $x = 1$ , pour  $x = 2$  et pour  $x = 3$ , c'est-à-dire sur chacune des configurations initiales  $q_0 0$ ,  $q_0 1$ ,  $q_0 2$  et  $q_0 3$ .  
 b) Que fait la machine ?

- 2) On veut concevoir une machine de Turing calculant la fonction  $f = \lambda x . 2x + 1$  :

- a) Expliquer la démarche à suivre.  
 b) Donner l'ensemble I des instructions de la machine.

### Exercice 3 (7 points = (1+2\*1,5+1)+2) (Langage CAML)

- 1) On considère la fonction CAML suivante :

**let rec f x y z = if y = 1 then x :: z else hd z :: f x (y-1) (tl z) ;;**

- a) Donner le type de f inféré par CAML.  
 b) Dérouler la fonction f pour  $x = 5$ ,  $y = 3$  et  $z = [3 ; 3 ; 8 ; 9 ; 1]$ .  
 c) Dérouler la fonction f pour  $x = 9$ ,  $y = 4$  et  $z = [7 ; 8 ; 2]$ .  
 d) Que fait f ?

- 2) Ecrire une fonction CAML *coefficient\_binomial* calculant le coefficient binomial  $C_i^j$ , pour tous entiers naturels i et j (un coefficient binomial  $C_i^j$  non nul représente l'entrée [i,j] du triangle de Pascal, avec les lignes et les colonnes numérotées à partir de 0) :

$$C_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ 1 & \text{si } j = 0, \\ C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^j & \text{sinon} \end{cases}$$

(Illustration :

|   |   |    |    |   |   |
|---|---|----|----|---|---|
| 1 | 0 | 0  | 0  | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0  | 0  | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1  | 0  | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 3  | 1  | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 6  | 4  | 1 | 0 |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

...Bon courage...

## Exercice 1

1) Règle de récursion

$$F1(x, 0) = x = P_1^1(x)$$

$$F1(x, y+1) = F1(x, y) + |x - y - 1|$$

(2, 5)

$$= \oplus(F1(x, y), Abs(x, S(y)))$$

$$= [\oplus \circ (P_2^3, Abs \circ (P_1^3, S \circ P_3^3))] (x, F1(x, y), y)$$

2) Règle de composition:

(2, 5)

$$F2(x, y, z) = \sum_{k=0}^y |x - k + z| = F1(\oplus(x, z), y) \quad PR$$

$$= [F1 \circ (\oplus \circ (P_1^3, P_3^3), P_2^3)] (x, y, z)$$

3) Montrons d'abord que la fonction  $\Sigma_n = \lambda x_1. x_n. x_1 + \dots + x_n$  est PR par récurrence sur  $n \geq 1$

$$n=1, \Sigma_1 = \lambda x_1. x_1 \text{ donc } \Sigma_1 = P_1^1 \quad PR$$

Supposons que  $\Sigma_n$  est PR

(1)

$$\begin{aligned} \text{On a } \Sigma_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \Sigma_n(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1} \\ &= \oplus \circ (\Sigma_n \circ (P_1^{n+1}, \dots, P_n^{n+1}), P_{n+1}^{n+1}) (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \quad PR$$

Conclusion  $\Sigma_n$  est PR pour tout  $n \geq 1$ .

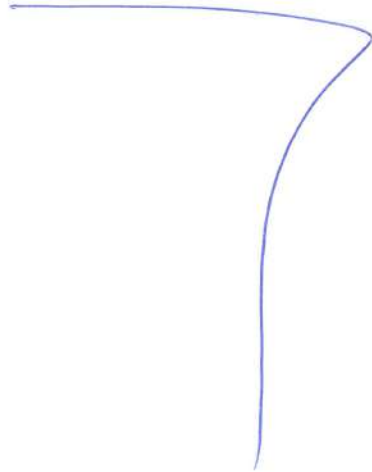
(2)

La règle de Composition:

Notons  $r_2 = 1 \pmod 2$  PR

(0,5)

alors  $S_n(x_1, \dots, x_n) = [r_2 \circ \Sigma_n](x_1, \dots, x_n)$  PR



Exercice 2:

1)

a) Déroulements :

$$q_0 \underline{0} = q_0 | \xrightarrow{(1)} 1q_1 | \xrightarrow{(4)} q_3 | \xrightarrow{(6)} q_3 0 | \xrightarrow{(7)} q_f | = q_0 \underline{0} \quad (0,5)$$

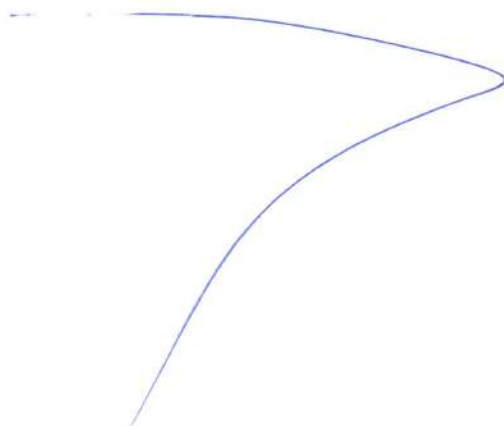
$$q_0 \underline{1} = q_0 || \xrightarrow{(1)} 1q_1 | \xrightarrow{(2)} 11q_2 0 \xrightarrow{(5)} 11q_3 | \xrightarrow{3 \times (6)} q_3 0 || | \xrightarrow{(7)} q_f || | = q_f \underline{2} \quad (0,5)$$

$$q_0 \underline{2} = q_0 || | \xrightarrow{(1)} 1q_1 || \xrightarrow{(2)} 11q_2 | \xrightarrow{(3)} 111q_1 0 \xrightarrow{(4)} 11q_3 | \xrightarrow{3 \times (6)} q_3 0 || | \xrightarrow{(7)} q_f || | = q_f \underline{2} \quad (0,5)$$

$$q_0 \underline{3} = q_0 || | | \xrightarrow{(1)} 1q_1 || | \xrightarrow{(2)} 11q_2 || \xrightarrow{(3)} 111q_1 | \xrightarrow{(2)} 1111q_2 0 \xrightarrow{(5)} 1111q_3 | \xrightarrow{5 \times (6)} q_3 0 || | | \xrightarrow{(7)} q_f || | | = q_f \underline{4} \quad (0,5)$$

b) La machine calcule la fonction

$$f = \lambda x. \begin{cases} x & \text{si } x \text{ pair,} \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$



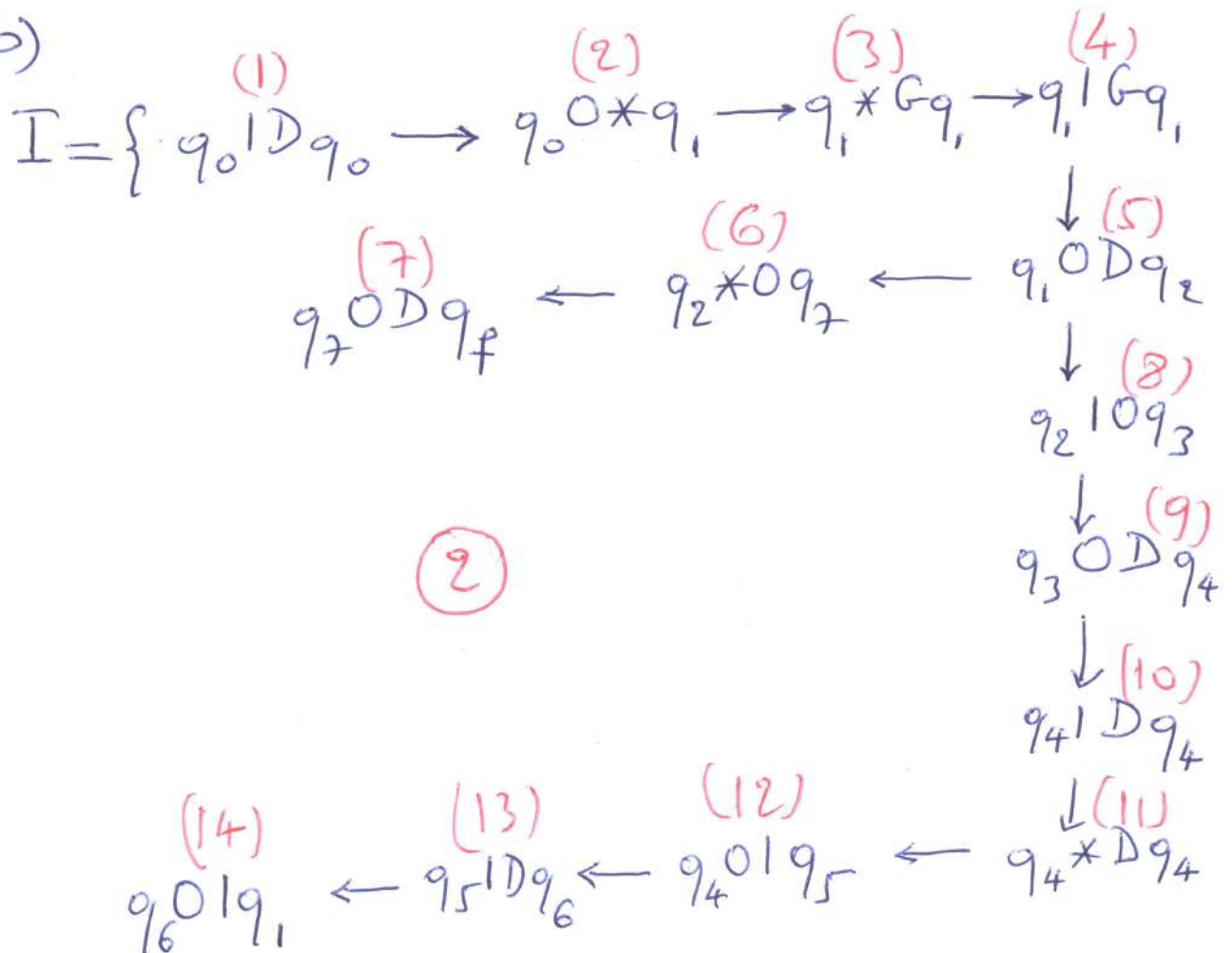
2)

a) Démarche à suivre :

(1,5)

On commence par ajouter une étoile à la fin de la représentation de  $x$ . Ensuite on réitère le processus consistant à supprimer une barre à gauche de l'étoile et à ajouter deux barres à droite de l'étoile, jusqu'à épuisement des barres à gauche de l'étoile. A la fin, on supprime l'étoile et on se positionne sur la barre la plus à gauche.

b)



## Exercice 3:

1)

a) Type inféré par CAML:

 $f: a' \rightarrow \text{int} \rightarrow 'a \text{ list} \rightarrow 'a \text{ list} = \langle \text{fun} \rangle$  (1)

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f \ 5 \ 3 \ [3;3;8;9;1] &= 3::f \ 5 \ 2 \ [3;8;9;1] \\
 &= 3::3::f \ 5 \ 1 \ [8;9;1] \quad (1,5) \\
 &= 3::3::5::[8;9;1] = [3;3;5;8;9;1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f \ 9 \ 4 \ [7;8;2] &= 7::f \ 9 \ 3 \ [8;2] \\
 &= 7::8::f \ 9 \ 2 \ [2] \quad (1,5) \\
 &= 7::8::2::f \ 9 \ 1 \ [] \\
 &= 7::8::2::9::[] = [7;8;2;9]
 \end{aligned}$$

d)  $f$  insere  $x$  dans  $z$  à la position  $y$ . (1)

2) let rec Coefficient\_binomial  $i \ j =$ if  $j > i$  then 0 (2)else if  $j = 0$  then 1
 else Coefficient\_binomial  $(i-1) \ (j-1)$   
 + Coefficient\_binomial  $(i-1) \ j$ 

 Coefficient\_binomial:  $\text{int} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} = \langle \text{fun} \rangle$