USTHB - Faculté d'Informatique
Licence 1 2025/2026 Semestre 2
Module OPM
Date : 19/05/2026 <8h30-10h00>

Examen Final

Exercice 1 (6,5 points = 1,5+1,5+1,5+2) (Fonctions Récursives)

1) Montrer par récursion que la fonction $f_1 = \lambda xyz. x + y + z$ d'arité 3 est Primitive Récursive.
2) Montrer par composition que la fonction $f_2 = \lambda xyz. (x + y) * z$ d'arité 3 est Primitive Récursive.
3) Montrer par récursion que la fonction $f_3 = \lambda x. \sum_{k=0}^{x} k$ d'arité 1 est Primitive Récursive.
4) En déduire, par récursion, que la fonction $f_4 = \lambda xy. \sum_{k=0}^{Max(x,y)} k$ d'arité 2 est Primitive Récursive.

Indication : les fonctions suivantes sont PR : ⊕, ⊗, Max, Min, Moins, Fact, Abs, Exp, Sg, $\overline{Sg}$, Pred, mod, div, les fonctions constantes d'arité 0, les fonctions constantes d'arité 1.

Exercice 2 (6,5 points = (4*0,75+0,5) +(1+2)) (Machines de Turing)

1) Soit la Machine de Turing MT=<S,E,I> avec S={0,1}, E={q_0,q_1,q_2,q_3,q_4,q_f} et

I = { (1) **$q_0 1 0 q_1$**, (2) **$q_1 0 D q_2$**, (3) **$q_2 0 1 q_f$**, (4) **$q_2 1 0 q_3$**, (5) **$q_3 0 D q_4$**, (6) **$q_4 1 1 q_f$**, (7) **$q_4 0 1 q_f$**}

   a) Dérouler la machine pour : i) 0 ii) 1 iii) 3 iv) 4.
   b) Que fait la machine ?

2) On veut concevoir une machine de Turing calculant la fonction

   $f = \lambda x . Sg(x)+1 = \lambda x . \begin{cases} 1 \; si \; x = 0, \\ 2 \quad sinon \end{cases}$

   a) Expliquer la démarche à suivre.
   b) Donner l'ensemble I des instructions de la machine.

Exercice 3 (7 points = ((2*1+2*1+1)+2) (Langage CAML)

1) On considère les fonctions CAML suivantes :

```
let rec f x=if x<0 then 0 else x+f (x-1) ;;
let rec g y=if y=[] then [] else f (hd y) :: g (tl y) ;;
```

   a) Donner les types de f et g inférés par CAML.
   b) Dérouler la fonction g pour : i) y = [1 ;2] ii) y = [3 ;-2 ;4]
   c) Que fait la fonction g ?

2) Ecrire une fonction *Clean* en CAML qui permet de supprimer toutes les occurrences de la chaine vide d'une liste de chaines de caractères.

   Exemples :

   Clean ["USTHB" ; "Alger" ; "" ; "Turing"] = ["USTHB" ; "Alger" ; "Turing"]
   Clean ["USTHB" ; "" ; "FI" ; ""] = ["USTHB" ; "FI"]

...Bon courage...

L1-Info
L1-Maths

Corrigé Examen Final OPM

Mai 2026

par Behloul et Isli

Exercice 1

1) $$\begin{cases} f_1(x,y,0) = x+y = \oplus(x,y) & \boxed{PR} \quad 0{,}5 \\ f_1(x,y,z+1) = x+y+z+1 \\ \quad = S(f_1(x,y,z)) = \underbrace{S \circ P_3^4(x,y,f_1(x,y,z),z)}_{\boxed{PR}} & 1 \end{cases}$$

2) $$f_2(x,y,z) = (x+y)*z$$
$$= \otimes(\oplus(x,y),z) \quad 1{,}5$$
$$= \underbrace{\otimes \circ (\oplus \circ (P_1^3, P_2^3), P_3^3)(x,y,z)}_{\boxed{PR}}$$

3) $$\begin{cases} f_3(0) = 0 = Z & \boxed{PR} \quad 0{,}5 \\ f_3(y+1) = \sum_{k=0}^{y+1} k = \left(\sum_{k=0}^{y} k\right) + y+1 \end{cases}$$
$$= f_3(y) + y+1 \quad 1$$
$$= \oplus \circ (P_1^2, S \circ P_2^2)(f_3(y), y) \quad \boxed{PR}$$

(1)

4) $f_4(x, y+1) = \sum_{k=0}^{Max(x,y+1)} k$

$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^{y+1} k & si \quad y+1 > x \\ \sum_{k=0}^{x} k & sinon \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^{y+1} k & si \quad y \geq x \\ \sum_{k=0}^{x} k & sinon \end{cases}$$

(0,5)

$$= f_4(x,y) + \begin{cases} y+1 & si \quad y \geq x \\ 0 & sinon \end{cases}$$

(0,5)

$$= f_4(x,y) + (y+1) * \begin{cases} 1 & si \quad moins(x,y) = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

(0,5)

$$= \oplus \circ \left(P^3_2, \otimes \circ \left(S \circ P^3_3, \overline{Sg} \circ moins \circ (P^3_1, P^3_3)\right)\right)(x, f_4(x,y), y)$$

$\boxed{PR}$

$$f_4(x,0) = \sum_{k=0}^{x} k = f_3(x) \quad \boxed{PR}$$

(0,5)

(2)

Exo 2 :

1/ a/ Déroulements

i/ $q_0\underline{0} = q_0 1 \xrightarrow{(1)} q_1 0 \xrightarrow{(2)} q_2 0 \xrightarrow{(3)} q_f 1 = q_f \underline{0}$

0,75

ii/ $q_0\underline{1} = q_0 11 \xrightarrow{(1)} q_1 01 \xrightarrow{(2)} q_2 1 \xrightarrow{(4)} q_3 0$
$\xrightarrow{(5)} q_4 0 \xrightarrow{(7)} q_f 1 = q_f \underline{0}$

0,75

iii/ $q_0\underline{3} = q_0 1111 \xrightarrow{(1)} q_1 0111 \xrightarrow{(2)} q_2 111 \xrightarrow{(4)} q_3 011$
$\xrightarrow{(5)} q_4 11 \xrightarrow{(6)} q_f 11 = q_f \underline{1}$

0,75

iv/ $q_0\underline{4} = q_0 11111 \xrightarrow{(1)} q_1 01111 \xrightarrow{(2)} q_2 1111$
$\xrightarrow{(4)} q_3 0111 \xrightarrow{(5)} q_4 111 \xrightarrow{(6)} q_f 111 = q_f \underline{2}$

0,75

b/ La machine calcule la fonction

$$Pred_2 = \lambda x . \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ x-2 & \text{sinon} \end{cases}$$

0,5

(3)

2/ a/ Démarche :

On supprime une barre. Ensuite :

- s'il ne reste plus de barres (entrée $= 0$), on imprime deux barres (sortie $= 1$) et on passe dans l'état interne final ;

(1)

- s'il reste des barres (entrée ≥ 1), on les supprime toutes puis on imprime trois barres (sortie $= 2$) et on passe dans l'état final.

b/ L'ensemble I des instructions :

(2)

$$I = \{ \overset{(1)}{q_0 1 0 q_1} - \overset{(2)}{q_1 0 D q_2} - \overset{(3)}{q_2 0 1 q_3} - \overset{(4)}{q_3 1 G q_3}$$

$$\overset{(6)}{q_2 1 0 q_4} \qquad \overset{(5)}{q_3 0 1 q_f}$$

$$\overset{(7)}{q_4 0 D q_5} - \overset{(8)}{q_5 0 1 q_6} - \overset{(9)}{q_6 1 G q_2}$$

$$\overset{(10)}{q_5 1 0 q_4} \}$$

Exo 3 :

1/ a/ Types inférés par CAML

f : int $\longrightarrow$ int = <fun> (1)

g : int list $\longrightarrow$ int list = <fun> (1)

b/ Déroulements

i/ $y = [1;2]$

$$g\,[1;2] = (f\,1) :: g\,[2]$$
$$= (f\,1) :: (f\,2) :: g\,[\,]$$
(1)
$$= (f\,1) :: (f\,2) :: [\,]$$
$$= [f\,1 ; f\,2] = [1;3]$$

ii/ $y = [3;-2;4]$

$$g\,[3;-2;4] = (f\,3) :: g\,[-2;4]$$
$$= (f\,3) :: (f\,(-2)) :: g\,[4]$$
$$= (f\,3) :: f\,(-2) :: (f\,4) :: g\,[\,]$$
(1)
$$= (f\,3) :: (f\,(-2)) :: (f\,4) :: [\,]$$
$$= [f\,3 ; f\,(-2) ; f\,4]$$
$$= [6;0;10]$$

$$f\,1 = 1 + (f\,0) = 1 + 0 + (f\,(-1)) = 1+0+0 = 1$$
$$f\,2 = 2 + (f\,1) = 2 + 1 = 3$$
$$f\,3 = 3 + (f\,2) = 3 + 3 = 6$$
$$f\,4 = 4 + (f\,3) = 4 + 6 = 10$$
$$f\,(-2) = 0$$

(5)

c/ La fonction g distribue la fonction f sur les éléments d'une liste d'entiers:

$$g\ l = \begin{cases} [\,] & \text{si } l = [\,], \\ f\,(hd\ l) :: g\ (tl\ l) & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f

1

$$f\ x = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \sum_{k=0}^{x} k & \text{sinon} \end{cases}$$

Autre réponse pour f :

$$f\ x = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x + f\,(x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

2/

2

```
let rec Clean l =
    if l=[] then []
    else if hd l = "" then Clean (tl l)
         else hd l :: Clean (tl l);;
```

```
Clean: string list -> string list = <fun>
```