

Exo 1:

1/ r_2 PR? On le montre avec la règle de récursion
 r_2 d'arité 1; trouver G d'arité 0 et H d'arité 2
telles que :

$$\begin{cases} r_2(0) = G() = G \\ r_2(y+1) = H(r_2(y), y) \\ G \text{ et } H \text{ PR} \end{cases}$$

$$r_2(0) = 0 = \bar{2}$$

$$r_2(y+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_2(y) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \bar{1}g(r_2(y)) = (\bar{1}g \circ P_1^2)(r_2(y), y)$$

Conclusion :

r_2 PR grâce à la définition PR suivante :

$f_1 = \bar{2}$ PR car fonction de base

$f_2 = \bar{1}g$ PR (contré)

$f_3 = P_1^2$ PR car fct de base

$f_4 = f_2 \circ f_3$ PR grâce à la règle de
composition appliquée à f_2 et
 f_3

$f_5 = r_2$ PR grâce à la règle de récursion
appliquée à $G = f_1$ et $H = f_4$

$$27 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ est pair,} \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ pair,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ pair,} \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{si } r_2(x) = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{si } r_2(x) = 0 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= x^2 \times \bar{f}_g(r_2(x)) + (x+1) \times f_g(r_2(x))$$

$$= \oplus^\circ \left(\otimes^\circ \left(\text{Puisse}^\circ(P_1', F_2), \bar{f}_g^\circ r_2 \right), \right. \\ \left. \otimes^\circ(S, f_g^\circ r_2) \right)(x)$$

Conclusion: f PR grâce à la dérivation PR
suivante:

$$g_1 = \oplus, g_2 = \otimes, g_3 = \text{Puisse}, g_4 = f_g, g_5 = \bar{f}_g, g_{s2} = F_2$$

(g_1, g_2, g_3, g_4 et g_5 PR: voir le cours)

($F_2 = 2x - 2$ fonction constante 2 d'arité 1) (g_{s2} PR)

$$g_6 = r_2 \text{ PR (question 1)}$$

$$g_7 = S, g_8 = P_1' \quad (g_7 \text{ et } g_8 \text{ PR: fctrs de base})$$

$$g_9 = g_3^\circ(g_8, g_{s2}), g_{10} = g_5^\circ g_6, g_{11} = g_2^\circ(g_9, g_{10}),$$

$$g_{12} = g_4^\circ g_6, g_{13} = g_2^\circ(g_7, g_{12}), g_{14} = g_1^\circ(g_{11}, g_{13}) = f$$

Les fonctions $g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}$ et g_{14} sont PR
grâce à la règle de composition.

Exo 2:

$$MT = \langle S, E, I \rangle$$

$$S = \{0, 1\}$$

$$E = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_f\}$$

$$I = \{$$

$$(1) q_0 \xrightarrow{0} q_0 - q_0 \xrightarrow{0} q_1 - q_1 \xrightarrow{1} q_f \quad (\text{reste} = 0)$$

$$(4) q_1 \xrightarrow{0} q_2$$

$$(5) q_2 \xrightarrow{0} q_3 - q_3 \xrightarrow{0} q_4 - q_4 \xrightarrow{1} q_1 \quad (\text{reste} = 1)$$

$$(8) q_3 \xrightarrow{0} q_5$$

$$(9) q_5 \xrightarrow{0} q_6 - q_6 \xrightarrow{1} q_7 - q_7 \xrightarrow{1} q_3 \quad (\text{reste} = 2)$$

$$(12) q_6 \xrightarrow{1} q_0$$

$$(x \bmod 3 = (x-3) \bmod 3)$$

$$(CAS \quad x \geq 3)$$

}

Exo 3:

1/ let $sc\ x\ i\ j = \text{substring } x\ i\ j$;
 $sc: \text{string} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{string} = \langle f \rangle$

2/ let $lg\ x = \text{string_length } x$;
 $lg: \text{string} \rightarrow \text{int} = \langle f \rangle$

3/ replace $x =$

$$\begin{cases} \text{""} \wedge x = \text{""}, \\ \text{replace } (sc\ x\ 1\ (lg\ x - 1)) \\ \quad \wedge sc\ x\ 0\ 1 = \text{"a"}, \\ \text{"d"} \wedge \text{replace } (sc\ x\ 1\ (lg\ x - 1)) \\ \quad \wedge sc\ x\ 0\ 1 = \text{"c"}, \\ sc\ x\ 0\ 1 \wedge \text{replace } (sc\ x\ 1\ (lg\ x - 1)) \\ \quad \wedge \text{line} \end{cases}$$

let rec replace $x =$

if $x = \text{""} then \text{""}$

else

if $sc\ x\ 0\ 1 = \text{"a"} then \text{replace } (sc\ x\ 1\ (lg\ x - 1))$

else

if $sc\ x\ 0\ 1 = \text{"c"} then \text{"d"} \wedge \text{replace } (sc\ x\ 1\ (lg\ x - 1))$

else

$sc\ x\ 0\ 1 \wedge \text{replace } (sc\ x\ 1\ (lg\ x - 1))$;;

4)

replace: $\text{string} \rightarrow \text{string} = \langle f \rangle$