

Corrigé exo 1:

1/ $n=1$:

$$P_1 = \lambda x. x = P_1'$$

PR car fonction de base.

$n=2$:

$$P_2 = \lambda x_1. x_2. x_1 * x_2 = (\lambda)$$

PR (vue en cours)

Hypothèse de récurrence (HR):

propriété vraie jusqu'à l'ordre $k \geq 2$:

$$\forall n \leq k, P_n = \lambda x_1. \dots x_n. (x_1 * \dots * x_n) \text{ PR.}$$

Pour $n=k+1$:

$$P_{k+1}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = x_1 * \dots * x_k * x_{k+1}$$

$$= P_k(x_1, \dots, x_k) * x_{k+1}$$

$$= (\lambda) \circ \left[P_k^{k+1} \left(P_1^{k+1}, \dots, P_k^{k+1} \right), P_{k+1}^{k+1} \right] (x_1, \dots, x_{k+1})$$

Conclusion: Dérivation PR de P_{k+1} :

$$f_1 = (\lambda) \text{ PR (cours)}$$

$$f_2 = P_k \text{ PR (HR)}$$

$$f_3 = P_1^{k+1}$$

$$f_4 = P_2^{k+1}$$

$$\vdots$$

$$f_{k+2} = P_k^{k+1}$$

$$f_{k+3} = P_{k+1}^{k+1}$$

PR car fctrs de base

$$f_{k+4} = f_2^0(f_3, \dots, f_{k+2}) \text{ PR}$$

(règle de composition)

$$f_{k+5} = f_1^0(f_{k+4}, f_{k+3}) \text{ PR}$$

(règle de composition)

$$= P_{k+1}$$

La propriété restant vraie pour $n=k+1$ (P_{k+1} PR), elle est vraie pour tout $n \geq 1$: $\forall n \geq 1, P_n \text{ PR.}$

Corrigé exo 1 (suite):

$$2) f(x, y) = \begin{cases} \text{Fact}(x+y) & \text{si } x \leq y, \\ \text{Abs}(x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{Fact}(x+y) & \text{si } \text{Moins}(x, y) = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \begin{cases} \text{Abs}(x, y) & \text{si } \text{Moins}(x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \text{Sg}(\text{Moins}(x, y)) * \text{Fact}(x+y) + \text{Sg}(\text{Moins}(x, y)) * \text{Abs}(x, y)$$

$$= \left(\oplus \circ \left(\otimes \circ \left(\text{Sg} \circ \text{Moins}, \text{Fact} \circ \oplus \right), \otimes \circ \left(\text{Sg} \circ \text{Moins}, \text{Abs} \right) \right) \right)(x, y)$$

Gchur: Dérivation PR de f:

$$\begin{aligned} f_1 &= \oplus \\ f_2 &= \otimes \\ f_3 &= \text{Sg} \\ f_4 &= \text{Sg} \\ f_5 &= \text{Moins} \\ f_6 &= \text{Fact} \\ f_7 &= \text{Abs} \end{aligned}$$

PR (ours)

$$\begin{aligned} f_8 &= f_4 \circ f_5 \\ f_9 &= f_6 \circ f_1 \\ f_{10} &= f_2 \circ (f_8, f_9) \\ f_{11} &= f_3 \circ f_5 \\ f_{12} &= f_2 \circ (f_{11}, f_7) \\ f_{13} &= f_1 \circ (f_{10}, f_{12}) = f \end{aligned}$$

PR
⇓
règle de composition

Corrigé exo 2:

$$1) x = (2, 3): q_0(2, 3) = q_0 1^3 * 1^4 \xrightarrow{3 \times (1)} 1^3 q_0 1^4 \xrightarrow{(2)} 1^3 q_1 1^5$$

$$\xrightarrow{5 \times (3)} 1^8 q_1 0 \xrightarrow{(4)} 1^8 q_2 1^1 \xrightarrow{9 \times (5)} q_2 0 1^9 \xrightarrow{(6)} q_3 1^9$$

De façon générale:

$$q_0(x, y) \xrightarrow{\text{Instructions de } \Pi_T} q_f 1^{x+y+4}$$

Π_T calcule la fonction $f_1 = 2xy \cdot (x+y+3)$

Corrigé exo 2 (suite):

2) a) $x=0$: $r_0 \underline{0} = r_0 \underline{1} \xrightarrow{(1)} r_1 \underline{0} \xrightarrow{(2)} r_2 \underline{0} \xrightarrow{(3)} r_f \underline{1} = r_f \underline{0}$

b) $x=1$: $r_0 \underline{1} = r_0 \underline{1^2} \xrightarrow{(1)} r_1 \underline{0} \xrightarrow{(2)} r_2 \underline{1} \xrightarrow{(4)} r_3 \underline{0} \xrightarrow{(5)} r_4 \underline{0} \xrightarrow{(6)} r_5 \underline{1} \xrightarrow{(7)} r_5 \underline{0} \xrightarrow{(8)} r_f \underline{1^2} = r_f \underline{1}$

c) $x=2$: $r_0 \underline{2} = r_0 \underline{1^3} \xrightarrow{(1)} r_1 \underline{0 \underline{1^2}} \xrightarrow{(2)} r_2 \underline{1^2} \xrightarrow{(4)} r_3 \underline{0} \xrightarrow{(5)} r_4 \underline{1} \xrightarrow{(9)} r_0 \underline{1} \xrightarrow{(4)} r_1 \underline{0} \xrightarrow{(2)} r_2 \underline{0} \xrightarrow{(3)} r_f \underline{1} = r_f \underline{0}$

La machine de Turing NT_2 calcule la fonction $f_2 = \lambda x. x \bmod 2$

3) L'ensemble I des instructions de la composition

$$NT = NT_2 \circ NT_1 \quad \text{et} \quad I = I_1 \cup I_2 \cup \{q_f \rightarrow r_0\}$$

$$I = \left\{ \begin{array}{ll} (1) q_0 \rightarrow r_0, & (7) r_0 \rightarrow r_1, (13) r_5 \rightarrow r_f, \\ (2) q_0 \rightarrow r_1, & (8) r_1 \rightarrow r_2, (14) r_5 \rightarrow r_f, \\ (3) q_1 \rightarrow r_1, & (9) r_2 \rightarrow r_f, (15) r_4 \rightarrow r_0, \\ (4) q_1 \rightarrow r_2, & (10) r_2 \rightarrow r_3, (16) q_f \rightarrow r_0, \\ (5) q_2 \rightarrow r_2, & (11) r_3 \rightarrow r_4, \\ (6) q_2 \rightarrow r_f, & (12) r_4 \rightarrow r_5, \end{array} \right.$$

q_0 et r_f états initiaux
initial et final,
respectivement, de NT .

4) La machine $NT = NT_2 \circ NT_1$ calcule la composition $f_2 \circ f_1 = \lambda xy. (x+y+3) \bmod 2$.

Remarque: La machine NT_2 peut être simplifiée, en ramenant son nombre d'instructions à 8, par suppression de l'instruction (8) et remplacement de l'instruction (7) par $r_5 \rightarrow r_2$.