USTHB - Faculté d'Informatique
Licence 1 2023/2024 Semestre 2
Module OPM
Date: 08/06/2024 <8h30-10h00>

Epreuve de Rattrapage

Exercice 1 (6 points = 2+2+2) (Fonctions Récursives)

1) Montrer que les deux fonctions suivantes sont primitives récursives :

$$f(x,y,z) = ((x\ div\ 3) + Fact(y))^z$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x & si\ \ y\ est\ pair \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2) Montrer que la fonction h est primitive récursive :

$$h : N^3 \dashrightarrow N^2$$

$$(x,y,z) \dashrightarrow (f(x,y,z), [g(x,y)]^2)$$

3) Montrer que les fonctions F_n d'arité n $n \geq 1$ sont primitives récursives :

$$F_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)$$

indication : les fonctions suivantes sont PR : $\oplus$, $\otimes$, Moins, Fact, Abs, Exp, Sg, $\overline{Sg}$, Pred, mod, div, les fonctions constantes d'arité 0, les fonctions constantes d'arité 1.

Exercice 2 (7 points = (3*1+1) +(1+2)) (Machines de Turing)

1) Soit la Machine de Turing MT=<S,E,I> avec :

I = { 1/ $q_0 10 q_1$, 2/ $q_1 0 D q_2$, 3/ $q_2 1 D q_2$, 4/ $q_2 {*} D q_3$, 5/ $q_3 1 D q_4$, 6/ $q_4 0 G q_{10}$, 7/ $q_4 1 D q_5$, 8/ $q_5 1 D q_5$, 9/ $q_5 0 G q_6$, 10/ $q_6 10 q_7$, 11/ $q_7 0 G q_6$, 12/ $q_6 {*} D q_8$, 13/ $q_8 01 q_8$, 14/ $q_8 1 D q_9$, 15/ $q_9 01 q_{10}$, 16/ $q_{10} 1 G q_{10}$, 17/ $q_{10} {*} G q_{10}$, 18/ $q_{10} 0 D q_{11}$, 19/ $q_{11} 11 q_f$, 20/ $q_{11} {*} G q_{11}$, 21/ $q_{11} 01 q_f$ }

   a) Dérouler la machine sur (0,0), (2,1) et (2,2).
   b) Que fait la machine ?

2) Ecrire les instructions d'une machine de Turing calculant la fonction :

   f = λ x y z. (Pred x, Sg y)

   Expliquer d'abord la démarche à suivre.

Exercice 3 (7 points = (0,5+2*1+0,5)+(0,5+3*0,5+0,5)+1,5) (Langage CAML)

1) On considère la fonction CAML suivante :
   let rec f x y z = let w=string_length z in if w=0 then (-1) else if y=z.[0] then x else f (x+1) y (sub_string z 1 (w-1));;
   a) Donner le type de f inféré par CAML.
   b) Déroulez la fonction f sur x=1, y=`a` et z = "*pascal*".
   c) Déroulez la fonction f sur x=1, y=`a` et z = "*nombre*".
   d) Que fait la fonction f quand x=1?
2) let rec F(x,y)=if y=0 then 0 else if x mod y=0 then y*y+F(x,y-1) else F(x,y-1);;
   a) Donner le type de F inféré par CAML.
   b) Dérouler la fonction F pour (4,4), (6,4) et (4,7). Que fait F ?
3) Ecrire une fonction CAML qui compte le nombre d'occurrences d'un caractère C dans une chaine de caractères S.

...Bon courage...

Corrigé Rattrapage OPM 08/06/2024

Behloul et Isli (1)

Exercice 1

1) i) $f(x,y,z) = \left((x \text{ div } 3) + Fact(y)\right)^{z}$

$D_3(x) = x \text{ div } 3 = \left[div \circ (P_1^2, C_3^{(1)} \circ P_1^2)\right](x,y)$ PR

où $C_3^{(1)} = \lambda x.\ 3$ PR

Les fonctions $\oplus$, Exp, Fact sont PR

Comme $(x \text{ di } 3) + Fact(y) \neq 0$, $\forall x, \forall y$

1

alors

$f(x,y,z) = \left[Expo\left(\oplus \circ (D_3 \circ P_1^3, Fact \circ P_2^3), P_3^3\right)\right](x,y,z)$ PR

ii) $g(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$g(x,y) = x * \overline{Sg}(y \bmod 2)$

$r2(x) = x \bmod 2$ PR

$g(x,y) = \left[\otimes \circ (P_1^2, \overline{Sg} \circ r2 \circ P_2^2)\right](x,y)$ PR

1

2) $h : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}^2$

$(x,y,z) \longmapsto \left(f(x,y,z), [g(x,y)]^2 \right)$

il suffit de montrer que les 2 fonctions composantes sont PR. (0,5)

On a $f : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$ est PR (0,5)

$g^2 : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$

$(x,y,z) \longmapsto g^2(x,y)$

$g^2(x,y) = \left[\otimes \circ \left(g \circ (P_1^3, P_2^3), g(P_1^3, P_2^3) \right) \right](x,y,z)$ (1) PR

3) $F_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{k} x_j \right)$

preuve par récurrence sur n.

Pour $n=1$, $F_1(x_1) = x_1 = P_1^1(x_1)$ PR

Supposons que F_n est PR (2)

On a $F_{n+1}(x_1 \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\prod_{j=1}^{k} x_j \right)$

$F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_n(x_1, \dots, x_n) + \prod_{j=1}^{n+1} x_j$

$F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left[\oplus \circ \left(F_n \circ (P_1^{n+1}, \dots, P_n^{n+1}), \prod_{n+1} \right) \right](x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ PR

Donc F_n est PR pour tout $n \geq 1$

Exo 2 : (3)

1)

a)

$$q_0\,\underline{(0,0)} = q_0\,1{*}1 \xrightarrow{(1)} q_1\,0{*}1 \xrightarrow{(2)} q_2{*}1 \xrightarrow{(4)} {*}\,q_3\,1$$
$$\xrightarrow{(5)} {*}1\,q_4\,0 \xrightarrow{(6)} {*}\,q_{10}\,1 \xrightarrow{(16)} q_{10}{*}1 \xrightarrow{(17)} q_{10}\,0{*}1 \quad 1$$
$$\xrightarrow{(18)} q_{11}{*}1 \xrightarrow{(20)} q_{11}\,0{*}1 \xrightarrow{(21)} q_f\,1{*}1 = q_f\,\underline{(0,0)}$$

$$q_0\,\underline{(2,1)} = q_0\,111{*}11 \xrightarrow{(1)} q_1\,011 \xrightarrow{(2)} q_2\,11{*}11 \xrightarrow{2\times(3)} 11\,q_2{*}11$$
$$\xrightarrow{(4)} 11{*}\,q_3\,11 \xrightarrow{(5)} 11{*}1\,q_4\,1 \xrightarrow{(7)} 11{*}11\,q_5\,0 \xrightarrow{(9)} 11{*}1\,q_6\,1$$
$$\xrightarrow{(10)} 11{*}1\,q_7\,0 \xrightarrow{(11)} 11{*}\,q_6\,1 \xrightarrow{(10)} 11{*}\,q_7\,0 \xrightarrow{(11)} 11\,q_6{*}$$
$$\xrightarrow{(12)} 11{*}\,q_8\,0 \xrightarrow{(13)} 11{*}\,q_8\,1 \xrightarrow{(14)} 11{*}1\,q_9\,0 \xrightarrow{(15)} 11{*}1\,q_{10}\,1$$
$$\xrightarrow{2\times(16)} 11\,q_{10}{*}11 \xrightarrow{(17)} 1\,q_{10}\,1{*}11 \xrightarrow{2\times(16)} q_{10}\,011{*}11 \quad 1$$
$$\xrightarrow{(18)} q_{11}\,11{*}11 \xrightarrow{(19)} q_f\,11{*}11 = q_f\,\underline{(1,1)}$$

$$q_0\,\underline{(2,2)} = q_0\,111{*}111 \xrightarrow{(1)} q_1\,011{*}111 \xrightarrow{(2)} q_2\,11{*}111 \xrightarrow{2\times(3)} 11\,q_2{*}111$$
$$\xrightarrow{(4)} 11{*}\,q_3\,111 \xrightarrow{(5)} 11{*}1\,q_4\,11 \xrightarrow{(7)} 11{*}11\,q_5\,1 \xrightarrow{(8)} 11{*}111\,q_5\,0$$
$$\xrightarrow{(9)} 11{*}11\,q_6\,1 \xrightarrow{(10)} 11{*}11\,q_7\,0 \xrightarrow{(11)} 11{*}1\,q_6\,1 \xrightarrow{(10)} 11{*}1\,q_7\,0$$
$$\xrightarrow{(11)} 11{*}\,q_6\,1 \xrightarrow{(10)} 11{*}\,q_7\,0 \xrightarrow{(11)} 11\,q_6{*} \xrightarrow{(12)} 11{*}\,q_8\,0$$
$$\xrightarrow{(13)} 11{*}\,q_8\,1 \xrightarrow{(14)} 11{*}1\,q_9\,0 \xrightarrow{(15)} 11{*}1\,q_{10}\,1 \xrightarrow{[(16)-(17)]^+} q_{10}\,01^2{*}1^2 \quad 1$$
$$\xrightarrow{(18)} q_{11}\,11{*}11 \xrightarrow{(19)} q_f\,11{*}11 = q_f\,\underline{(1,1)}$$

b) La machine calcule la fonction 1

$$\lambda xy.(\underline{P}red\ x,\ Sg\ y)$$

2/ La machine M procèdera en deux étapes : (4)

→ d'abord calculer la fonction $g_1 = \lambda xyz . xy$, par effacement de l'étoile et des barres correspondant à la représentation de z (machine M_1)

→ ensuite composer M_1 avec la machine M_2 de la question précédente, qui calculera la fonction $g_2 = \lambda xy . (\mathrm{Pred}\ x, \mathrm{fg}\ y)$.

(1)

La machine M sera donc la composition $M_2 \circ M_1$, qui calculera la fonction
$$f = \lambda xyz . (\mathrm{Pred}\ x, \mathrm{fg}\ y) = g_2 \circ g_1 .$$
Les instructions de M_2 sont données par l'ensemble I de 1a/.
Les instructions de M_1 sont données par $I_2 = \{$

(22) $p_0 | D p_0$ → (23) $p_0 * D p_1$ → (24) $p_1 | D p_1$ → (25) $p_1 * 0 p_2$
→ (26) $p_2 0 D p_3$ → (27) $p_3 | 0 p_2$
(26) $p_2 0 D p_3$ → (28) $p_3 0 G p_4$ → (29) $p_4 | G p_4$ → (30) $p_4 * G p_4$ → (31) $p_4 0 D p_f$ $\}$

Les instructions de M sont données par (32) (5)

$I_f = I_2 \cup I \cup \{ p_f \| q_0 \}$.

2

Exo 3 : (6)

1)

a) Type de f inféré par CAML :

f : int → char → string → int = <fun> 0,5

b) f 1 'a' "pascal" =

f 2 'a' "ascal" = 2 1

c) f 1 'a' "nombre" =

f 2 'a' "ombre" =

f 3 'a' "mbre" =

f 4 'a' "bre" = 1

f 5 'a' "re" =

f 6 'a' "e" =

f 7 'a' "" = −1

d) Quand $x = 1$, f retourne −1 si le caractère y n'occurre pas dans la chaîne de caractères z, et la position de la 1ère occurrence de y, sinon. 0,5

2) a) F : int * int → int = <fun> 0,5

b) $F(4,4) = 4*4 + F(4,3)$ 0,5

$= 16 + F(4,2)$

$= 16 + 2*2 + F(4,1)$

$= 20 + 1*1 + F(4,0)$

$= 21 + 0 = 21$

(7)

$F(6,4) = F(6,3) = 3*3 + F(6,2)$

$= 9 + 2*2 + F(6,1)$ 0,5

$= 13 + 1*1 + F(6,0) = 14 + 0 = 14$

0,5

$F(4,7) = F(4,6) = F(4,5) = F(4,4) = 21$

F calcule la somme des carrés des diviseurs de x inférieurs ou égaux à y, si y n'est pas nul ; elle calcule 0, sinon.

0,5

3) let rec nbOcc c s =

```
if s="" then 0
else if c= s.[0] then
        1+nbOcc c (substring
                   s 1 (string_length s-1))
    else
        nbOcc c (substring s 1
                 (string_length s -1));;
```

1,5

nbOcc : char -> string -> int = <fun>