

Examen de PRF

Exercice 1 :

1. Soient les fonctions suivantes:

```
# let lg x = string_length x;;  
# let souschaine1 x y = sub_string x 0 (lg y);;  
# let souschaine2 x = sub_string x 1 (lg x-1);;  
# let rec f x y = if lg x > lg y then 0 else if x = souschaine1 y x  
                  then 1+ f x (souschaine2 y) else f x (souschaine2 y);;
```

1.1. Donner le type inféré par la fonction f.

1.2. Calculer f "12" "112012";;

1.3. Que fait la fonction f ?

2. Ecrire la fonction **fusion** qui accepte comme paramètres deux (2) listes triées **L1** et **L2**. Elle retourne une liste **L** triée par fusion de **L1** et **L2**.

Exemple : **fusion** [1; 3; 7] [3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8] = [1 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8]

Exercice 2 :

1. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ est pair}\}$ est primitif récursif.

2. Montrer que la fonction $f_i : x \rightarrow f_i(x) = x^i$ est primitive récursive, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

3. Déduire que la fonction suivante est primitive récursive :

$$g(x) = \lambda xy. \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ est pair} \\ x^3 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut utiliser la fonction primitive récursive « reste de la division de y par x », qu'on note $r(x,y)$.

Exercice 3 :

1. Soit la fonction, $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, que calcule la Machine de Turing $M = \langle S, E, I \rangle$ définie par:

$S = \{0, 1, *\}$ $E = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_f\}$

$I = \{ 1 : q_0 1 D q_0; 2 : q_0 * 1 q_1; 3 : q_1 1 G q_1; 4 : q_1 0 D q_2; 5 : q_2 1 0 q_3;$

$6 : q_3 0 D q_4; 7 : q_4 1 0 q_5; 8 : q_5 0 D q_6; 9 : q_6 1 0 q_7; 10 : q_7 0 D q_f \}$

A/ Calculer $f(1,20)$ et $f(4,3)$.

B/ Déduire la définition de la fonction f.

2. Donner les instructions de la machine de Turing correspondant à la fonction $F : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui associe au couple (x,y) le résultat de $(x-1, sg(y))$.