Examen de Programmation Fonctionnelle

Exercice 1 (6 points= $2+2+2$) :

- 1) Montrer que la fonction $F = \lambda x. 0+1+\dots+x$ est primitive récursive.
- 2) En supposant que la fonction $\text{div} = \lambda xy. x/y$ (division entière) est primitive récursive, montrer que la fonction $G = \lambda xyz. (0+1+\dots+z) / (x+y)$ est primitive récursive.
- 3) Montrer que la fonction $P = \lambda xy. 1+xy+2x^2y^3$ est primitive récursive.

Indication : Les fonctions vues en cours peuvent être considérées primitives récursives (exp, Sg, $\overline{Sg}$, moins, Abs, min, max, fact, Pred, $\oplus$, $\otimes$, div, mod).

Exercice 2 (6 points= $(1+1+1)+0,5+1+1,5$) :

- 1) Soit la machine de Turing $MT = \langle S, E, I \rangle$ définie par :
 - $S = \{0, 1\}$
 - $E = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_f\}$
 - $I = \{(1) q_0 10q_1, (2) q_1 0Dq_2, (3) q_2 01q_6, (4) q_2 10q_3, (5) q_3 0Dq_4, (6) q_4 01q_5, (7) q_5 1Gq_2, (8) q_4 10q_6, (9) q_6 0Dq_7, (10) q_7 01q_8, (11) q_8 1Gq_4, (12) q_7 11q_0\}$
 - a) Calculer $MT \underline{2}$, $MT \underline{3}$ et $MT \underline{4}$. En d'autres termes, dérouler la machine de Turing sur les exemples $\underline{2}$, $\underline{3}$ et $\underline{4}$. Pour rappel, pour un entier x , la notation $\underline{x}$ désigne la représentation de x .
 - b) Que fait la machine de Turing ?
- 2) Pour chacune des deux fonctions suivantes, concevoir une machine de Turing la calculant :
 - a) $Z = \lambda x. 0$
 - b) $P_1^2 = \lambda xy. x$

Exercice 3 (8 points= $1+(1+1+1)+0,5+1,5+2$) :

- 1) On considère les trois fonctions CAML suivantes :

```
let lg x = string_length x ;;
let sc x y z = sub_string x y z ;;
let rec mystere x = if x="" then ""
                    else if sc x 0 1 = "t" then "b" ^ mystere (sc x 1 (lg x-1))
                    else if sc x 0 1 = "r" then "1" ^ mystere (sc x 1 (lg x-1))
                    else sc x 0 1 ^ mystere (sc x 1 (lg x-1));;
```

- a) Donner le type inféré de la fonction *mystere*
 - b) Faire les déroulements suivants :
 - i) *mystere* "terre"
 - ii) *mystere* "tasse"
 - iii) *mystere* "mi"
 - c) Que fait la fonction *mystere* ?
- 2) Ecrire une fonction *inverse* inversant une liste :

Exemples : $\text{inverse } [] = []$
 $\text{inverse } [1; 2; 3] = [3; 2; 1]$

- 3) Ecrire une fonction *somme* calculant la somme de deux listes non vides d'entiers, de même taille :

Exemple : $\text{somme } [1; 3; 6] [5; 2; 3] = [6; 5; 9]$