Programmation Fonctionnelle

Module du tronc commun "Mathématiques-Informatique" 1ère année

Cours du module PRF

Calculabilité des fonctions

Chapitre I

Fonctions récursives

Mes séances (Webex) de la période 22/04-03/06/2020 :

Cours + exercices (TD 1 et TD 2)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

LES FONCTIONS DE BASE : λ-notation

- La Fonction zéro d'arité 0 : $Z = \lambda \bullet 0$
- La Fonction successeur d'arité 1 : $S = \lambda n \bullet n+1$
- Les Fonctions Projection d'arité n : $P_i^n = \lambda x_1 \ldots x_i \ldots x_n \bullet x_i$
  - ❖ $(n \geq 1)$ et $(1 \leq i \leq n)$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

LES FONCTIONS DE BASE : notation usuelle

- $Z : \begin{cases} \varnothing & \longrightarrow IN \\ & \vdash \longrightarrow 0 \end{cases}$

  ❖ Z()=0 ou Z=0

- $S : \begin{cases} IN & \longrightarrow IN \\ n & \vdash \longrightarrow n+1 \end{cases}$

  ❖ S(n)=n+1

- $P_i^n : \begin{cases} IN^n & \longrightarrow IN \\ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) & \vdash \longrightarrow x_i \end{cases}$

  ❖ $P_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Règle de COMPOSITION :

- H fonction d'arité m
- G_1, …, G_m m fonctions d'arité n
- Construire la fonction F d'arité n par composition à partir de H et G_1,…,G_m :

$$\mathbf{F = H°(}G_1\mathbf{,\ldots,}G_m\mathbf{)}$$

- $\mathbf{F(}x_1\mathbf{,\ldots,}x_n\mathbf{) = [H°(}G_1\mathbf{,\ldots,}G_m\mathbf{)](}x_1\mathbf{,\ldots,}x_n\mathbf{)}$

$$\mathbf{= H(}G_1\mathbf{(}x_1\mathbf{,\ldots,}x_n\mathbf{),\ldots,}\ G_m\mathbf{(}x_1\mathbf{,\ldots,}x_n\mathbf{))}$$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Règle de COMPOSITION : cas particulier m=1 et n=0

- H fonction d'arité m=1 et G_1 m fonction d'arité n=0
- Construire la fonction F d'arité n=0 par composition à partir de H et G_1 :

$$\mathbf{F = H \circ G_1}$$

- **F() = [H°G_1]() = H(G_1()) = H(G_1)**
- **F = H(G_1)**
- **F= H°G_1=λ.H(G_1)**
- **Exemple :** H = S et G_1 = Z

$$\rightarrow \begin{cases} F = \mathbf{H} \circ G_1 = S \circ Z \\ F() = (S \circ Z)() = S(Z()) = S(Z) = S(0) = 1 \\ F = S \circ Z = \lambda . 1 \end{cases}$$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Règle de RECURSION :

- G fonction d'arité n
- H fonction d'arité n+2
- Construire la fonction F d'arité (n+1) par récursion à partir de G et H :

  $\forall\ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{N}^n$

  - $\mathbf{F}(x_1,\ldots,x_n,0) = \mathbf{G}(x_1,\ldots,x_n)$
  - $\mathbf{F}(x_1,\ldots,x_n,y+1) = \mathbf{H}\,(x_1,\ldots,x_n, \mathbf{F}(x_1,\ldots,x_n,y),y)$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Règle de RECURSION : cas particuliers n=0 et n=1

- n=0 : G d'arité 0, H d'arité 2 et F d'arité 1
  - **F(0) = G() = G**
  - **F(y+1) = H(F(y),y)**
- n=1 : G d'arité 1, H d'arité 3 et F d'arité 2

  $\forall$ x$\in$ IN
  - **F(x,0) = G(x)**
  - **F(x,y+1) = H(x,F(x,y),y)**

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Règle de MINIMISATION :

- G une fonction d'arité n+1 telle que :
  $\forall(x_1,\ldots,x_n)\in IN^n$, $\exists y\in IN$ tel que : $G(x_1,\ldots,x_n,y) = 0$

- Construire la fonction F d'arité n par minimisation à partir de G :
  $F(x_1,\ldots,x_n)=y$, avec y le plus petit entier tel que $G(x_1,\ldots,x_n,y)=0$

❖ **Exemple :** $\oplus = \lambda xy \bullet x+y$ peut être construite par minimisation à partir de

$f=\lambda xyz.(x+y)/(z+1)$, avec / division entière. Pour tout $(x,y)\in IN^2$, $z=x+y$ est le plus petit entier tel que $f(x,y,z)=0$.

CHAPITRE I
Fonctions récursives

FONCTIONS PRIMITIVES RECURSIVES :

Une fonction est dite PRIMITIVE RECURSIVE (PR) si elle est :

- soit une fonction de base,
- soit une fonction construite à partir d'autres fonctions PR par application de la règle de composition ou de la règle de récursion.

FONCTIONS RECURSIVES :

Une fonction est dite RECURSIVE (R) si elle est :

- soit une fonction de base,
- soit une fonction construite à partir d'autres fonctions R par application de la règle de composition, de la règle de récursion ou de la règle de minimisation.

CHAPITRE I
Fonctions récursives

DERIVATION PR (R) :
Une fonction F est PRIMITIVE RECURSIVE (respectivement : RECURSIVE) s'il existe une suite finie de fonctions $F_1,\ldots,F_n$ telles que :

- $F_n = F$
- Et pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$
  - soit F_i est une fonction de base,
  - soit il a été déjà prouvé que F_i est PRIMITIVE RECURSIVE (respectivement : RECURSIVE)
  - soit F_i est définie à partir de certaines des fonctions $F_1,\ldots,F_{i-1}$ au moyen de la règle de composition ou de récursion (respectivement : la règle de composition ou de récursion ou de minimisation).

La suite des fonctions $F_1 , \ldots , F_n$ est appelée une dérivation PRIMITIVE RECURSIVE (respectivement : RECURSIVE) de F

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 1 : utiliser la règle de récursion pour montrer que chacune des trois fonctions est PR

$Z_1=\lambda n.0$ d'arité 1 : trouver G d'arité 0 et H d'arité 2 telles que

- $Z_1(0)=G()=G$
- $Z_1(y+1)=H(Z_1(y),y)$
- G et H PR

Réponse :

- $Z_1(0)=0=Z$
- $Z_1(y+1)=0=Z_1(y)=P_1^2(Z_1(y),y)$

Z_1 PR grâce à la dérivation PR :

- $f_1=Z$ PR car de base
- $f_2=P_1^2$ PR car de base
- $f_3=Z_1$ PR : règle de récursion appliquée à $G=f_1$ et $H=f_2$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 1 :

$\oplus = \lambda xy.x+y$ d'arité 2 : trouver G d'arité 1 et H d'arité 3 telles que

- $\oplus(x,0)=G(x)$
- $\oplus(x,y+1)=H(x,\oplus(x,y),y)$
- G et H PR

Réponse :

- $\oplus(x,0)=x+0=x=P_1^1(x)$
- $\oplus(x,y+1)=x+(y+1)=(x+y)+1=S(\oplus(x,y))=(S\circ P_2^3)(x,\oplus(x,y),y)$

$\oplus$ PR grâce à la dérivation PR :

- $f_1=P_1^1$, $f_2=P_2^3$, $f_3=S$ (f_1, f_2 et f_3 PR car de base)
- $f_4= f_3 \circ f_2$ PR : règle de composition appliquée à f_3 et f_2
- $f_5=\oplus$ PR : règle de récursion appliquée à $G=f_1$ et $H=f_4$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 1 :

⊗=λxy.x*y d'arité 2 : trouver G d'arité 1 et H d'arité 3 telles que

- ⊗(x,0)=G(x)
- ⊗(x,y+1)=H(x,⊗(x,y),y)
- G et H PR

Réponse :

- ⊗(x,0)=x*0=0=Z_1(x)
- ⊗(x,y+1)=x*(y+1)=(x*y)+x=⊕(⊗(x,y),x)
  =⊕(P_2^3(x,⊗(x,y),y),P_1^3(x,⊗(x,y),y)) =[⊕°(P_2^3,P_1^3)](x,⊗(x,y),y)

⊗ PR grâce à la dérivation PR :

- f_1= Z_1, f_2=⊕, f_3=P_1^3 , f_4=P_2^3 (PR : montré ou de base)
- f_5= f_2°(f_4,f_3) PR : règle de composition
- f_6=⊗ PR : règle de récursion appliquée à G=f_1 et H=f_5

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 2 :

Sg=λx.$\begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$ d'arité 1 : trouver G d'arité 0 et H d'arité 2 telles que

- Sg(0)=G()=G
- Sg(y+1)=H(Sg(y),y)
- G et H PR

Réponse :

- Sg(0)=0=Z
- Sg(y+1)=1=S(0)=S(Z_1(y))=S(Z_1(P_2^2(Sg(y),y)))= (S°Z_1°P_2^2)(Sg(y),y)

Sg PR grâce à la dérivation PR :

- f_1=Z, f_2=S, f_3= P_2^2 , f_4=Z_1 PR (montré ou de base)
- f_5=f_4°f_3, f_6=f_2°f_5 PR (règle de composition)
- f_7=Sg PR : règle de récursion appliquée à G=f_1 et H=f_6

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 2 :

Pred=λx.$\begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ x - 1 & sinon \end{cases}$ d'arité 1 : trouver G d'arité 0 et H d'arité 2 telles que

- Pred(0)=G()=G
- Pred(y+1)=H(Pred(y),y)
- G et H PR

Réponse :

- Pred(0)=0=Z
- Pred(y+1)=y=P_2^2(Pred(y),y)

Pred PR grâce à la dérivation PR :

- f_1=Z PR car de base
- f_2= P_2^2 PR car de base
- f_3=Pred PR : règle de récursion appliquée à G=f_1 et H=f_2

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 3 :

1) Montrer que $C_k=\lambda.k$ est PR, pour toute constante $k\geq 0$?

Réponse : preuve par récurrence

- Pour k=0 : $C_0=\lambda.0=Z$ → PR car fonction de base
- Pour k=1 : règle de composition appliquée à H=S d'arité m=1 et $G_1=Z$ d'arité n=0
  - $F=S°Z=C_1$ d'arité n=0 : $C_1()=C_1=(S°Z)()=S(Z())=S(Z)=S(0)=1$
  - $C_1=\lambda.1$ PR car S et Z PR
- Hypothèse de récurrence : pour tout $k\leq p$, $C_k=\lambda.k$ PR ($p\geq 1$)
- Montrons que $C_{p+1}=\lambda.p+1$ est PR
- Règle de composition appliquée à H=S d'arité m=1 et $G_1=C_p$ d'arité n=0
  - $F=S°C_p=C_{p+1}$ d'arité n=0 :

    $C_{p+1}()=C_{p+1}=(S°\ C_p)()=S(C_p())=S(C_p)=S(p)=p+1$
  - $C_{p+1}=\lambda.p+1$ PR car S et C_p PR
- La propriété restant vraie pour k=p+1, elle est vraie pour tout $k\geq 0$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 3 :

2) Montrer que $F_c=\lambda n.c$ est PR, pour toute constante c ?

Réponse :

- $F_c(0)=c=C_c=\lambda.c$
- $F_c(y+1)=c=F_c(y)=P_1^2(F_c(y),y)$

F_c PR grâce à la dérivation PR :

- $f_1=C_c$ PR (montré)
- $f_2= P_1^2$ PR car de base
- $f_3=F_c$ PR : règle de récursion appliquée à $G=f_1$ et $H=f_2$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 4 :

1) fact=λx.x ! d'arité 1 : trouver G d'arité 0 et H d'arité 2 telles que

- fact(0)=G()=G
- fact(y+1)=H(fact(y),y)
- G et H PR

Réponse :

- fact(0)=1=C_1=λ.1
- fact(y+1)=fact(y)*S(y)=[$\otimes \circ (P_1^2, S \circ P_2^2)$](fact(y),y)

fact PR grâce à la dérivation PR :

- $f_1=C_1$, $f_2=\otimes$, $f_3=P_1^2$, $f_4=P_2^2$,f_5=S PR (montré ou de base)
- $f_6=f_5 \circ f_4$, $f_7=f_2 \circ (f_3,f_6)$ PR (règle de composition)
- f_8=fact PR : règle de récursion appliquée à $G=f_1$ et $H=f_7$

TD 1 Exercice 4 :

2) Puis = $\lambda xy.x^y$ PR ? Je reviendrai sur cette fonction après l'exercice 4 du TD 2.

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 4 :

3) $\overline{Sg}$=λx.$\begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$ d'arité 1 : trouver G d'arité 0 et H d'arité 2 telles que

- $\overline{Sg}$(0)=G()=G
- $\overline{Sg}$(y+1)=H($\overline{Sg}$(y),y)
- G et H PR

Réponse :

- $\overline{Sg}$(0)=1=C_1=λ.1
- $\overline{Sg}$(y+1)=0= Z_1(y)=($Z_1 \circ P_2^2$)($\overline{Sg}$(y),y)

$\overline{Sg}$ PR grâce à la dérivation PR :

- $f_1=C_1$, $f_2=Z_1$, $f_3=P_2^2$ PR (montré ou de base)
- $f_4=f_2 \circ f_3$ PR (règle de composition)
- $f_5=\overline{Sg}$ PR : règle de récursion appliquée à $G=f_1$ et $H=f_4$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 5 :

1) F=λxy.$\sum_{k=0}^{y} D(x,k)$ d'arité 2 : trouver G d'arité 1 et H d'arité 3 telles que

- F(x,0)=G(x)
- F(x,y+1)=H(x,F(x,y),y)
- G et H PR

Réponse :

- F(x,0)= $\sum_{k=0}^{0} D(x,k)$=D(x,0)=[D°(P_1^1,Z_1)](x)
- F(x,y+1)= $\sum_{k=0}^{y+1} D(x,k)$= D(x,y+1)+ $\sum_{k=0}^{y} D(x,k)$
  =D(x,y+1)+F(x,y)
  =(⊕°[D°(P_1^3,S°P_3^3), P_2^3])(x, F(x, y), y)

F PR grâce à la dérivation PR :

- $f_1=P_1^1$, $f_2=P_1^3$, $f_3=P_2^3$, $f_4=P_3^3$, f_5=S, $f_6=Z_1$, f_7=⊕, f_8=D
- $f_9=f_8°(f_1,f_6)$, $f_{10}=f_5°f_4$,$f_{11}=f_8°(f_2,f_{10})$,$f_{12}=f_7°(f_{11},f_3)$
- f_{13}=F PR : règle de récursion appliquée à G=f_9 et H=f_{12}

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 5 :

2) f(x)=0+x+2x+3x+…+x^2 PR ?

Réponse :

f(x)=$\sum_{k=0}^{x} \otimes(x,k)$=F(x,x)=[F°($P_1^1$, P_1^1)](x)

f PR grâce à la dérivation PR :

- f_1=F PR (montré)
- f_2=P_1^1 PR PR car de base
- f_3=f PR : règle de composition appliquée à H=f_1, G_1=f_2 et G_2=f_2

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 1 :

1) moins=λxy.$\begin{cases} x-y \; si \; x \geq y, \\ 0 \qquad sinon \end{cases}$ d'arité 2 → **règle de récursion :** trouver G d'arité 1 et H d'arité 3 telles que

- moins(x,0)=G(x)
- moins(x,y+1)=H(x,moins(x,y),y)
- G et H PR

Réponse :

- moins(x,0) = x-0 = x = P_1^1(x)
- moins(x,y+1) = $\begin{cases} x-(y+1) \; si \; x \geq y+1, \\ 0 \qquad\qquad si \; x < y+1 \end{cases}$ = $\begin{cases} (x-y)-1 \; si \; x-y \geq 1, \\ 0 \qquad\qquad si \; x-y < 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} (x-y)-1 \; si \; x-y > 0, \\ 0 \qquad\qquad si \; x-y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} moins(x,y)-1 \; si \; moins(x,y) > 0, \\ 0 \qquad\qquad si \; moins(x,y) = 0 \end{cases}$

= Pred(moins(x,y))=[Pred°P_2^3](x, moins(x, y), y)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 1 :

2) min=λxy.$\begin{cases} x & si\ x < y, \\ y\ si\ x \geq y \end{cases}$ d'arité 2 → **règle de composition :** trouver H d'arité 2 et G_1, G_2 d'arité 2 telles que

- min(x,y) = [H°(G_1,G_2)](x,y)
- H, G_1 et G_2 PR

Réponse :

- min(x,y) = $\begin{cases} x & si\ x < y, \\ y\ si\ x \geq y \end{cases} = \begin{cases} x - 0 & si\ x < y, \\ y + x - x\ si\ x \geq y \end{cases} = \begin{cases} x - 0 & si\ x < y, \\ x - (x - y)\ si\ x \geq y \end{cases}$

$= x - \begin{cases} 0 & si\ x < y, \\ x - y\ si\ x \geq y \end{cases}$ = x-moins(x,y) = moins(x,moins(x,y))

= [moins°(P_1^2, $moins$)](x,y)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 2 :

1a) Abs=λxy.|x-y| d'arité 2 → règle de composition : trouver H d'arité 2 et G_1, G_2 d'arité 2 telles que

- Abs(x,y) = [H°(G_1,G_2)](x,y)
- H, G_1 et G_2 PR

Réponse :

- Abs(x,y) = $\begin{cases} x-y & si\ x \geq y, \\ y-x & si\ y \geq x \end{cases} = \begin{cases} x-y & si\ x \geq y, \\ 0 & si\ y \geq x \end{cases} + \begin{cases} 0 & si\ x \geq y, \\ y-x & si\ y \geq x \end{cases}$

= moins(x,y)+moins(y,x)

= [⊕°(moins,moins°(P_2^2, P_1^2))](x,y)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 2 :

1b) max=λxy.maximum(x,y) d'arité 2 → règle de composition : trouver H d'arité 2 et G_1, G_2 d'arité 2 telles que

- max(x,y) = [H°(G_1,G_2)](x,y)
- H, G_1 et G_2 PR

Réponse :

- $\max(x,y) = \begin{cases} x & si\ x > y, \\ y & si\ x \leq y \end{cases} = x^* \begin{cases} 1 & si\ x > y, \\ 0 & si\ x \leq y \end{cases} + y^* \begin{cases} 0 & si\ x > y, \\ 1 & si\ x \leq y \end{cases}$

$$= x^* \begin{cases} 1 & si\ moins(x,y) > 0, \\ 0 & si\ moins(x,y) = 0 \end{cases} + y^* \begin{cases} 0 & si\ moins(x,y) > 0, \\ 1 & si\ moins(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$= x^*Sg(moins(x,y)) + y^*\overline{Sg}(moins(x,y))$$

$$=[\oplus°[\otimes°(P_1^2, Sg°moins), \otimes°(P_2^2, \overline{Sg} \circ moins)]](x,y)$$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 2 :

2) $max_n = \lambda x_1 \ldots x_n.maximum(x_1,\ldots,x_n)$ d'arité $n \geq 2$ PR ? **Par récurrence :**

Réponse :

- $n=2$: max_2 = max PR
- **HR :** propriété vraie jusqu'à $k \geq 2$ → $\forall n \leq k$, max_n PR
- Montrons que la propriéte reste vraie pour $n=k+1$: **règle de composition**
- $max_{k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1}) = max(max_k(x_1,\ldots,x_k),x_{k+1})$

$$= (max^{\circ}[max_k^{\circ}(P_1^{k+1},\ldots,P_k^{k+1}),P_{k+1}^{k+1}])(x_1,\ldots,x_{k+1})$$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 3 :

1) $r2$=λx.x mod 2 d'arité 1 : trouver G d'arité 0 et H d'arité 2 telles que

- r2(0)=G()=G
- r2(y+1)=H(r2 (y),y)
- G et H PR

Réponse :

- r2(0)=0 mod 2=0=Z
- r2(y+1)=(y+1) mod 2 = $\begin{cases} 1 & si\ r2(y) = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

= $\overline{Sg}$(r2(y))

=($\overline{Sg} \circ P_1^2$)(r2(y),y)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 3 :

2) q2 = λx.x div 2 d'arité 1 : trouver G d'arité 0 et H d'arité 2 telles que

- q2(0)=G()=G
- q2(y+1)=H(q2 (y),y)
- G et H PR

Réponse :

- q2(0)=0 div 2=0=Z
- q2(y+1)=(y+1) div 2 = $\begin{cases} q2(y) \; si \; r2(y) = 0 \\ q2(y) + 1 \quad sinon \end{cases}$ = q2(y) + $\begin{cases} 0 \; si \; r2(y) = 0 \\ 1 \quad\quad\quad sinon \end{cases}$

= q2(y)+Sg(r2(y))

= $[\oplus \circ (P_1^2, Sg \circ r2 \circ P_2^2)]$(q2(y),y)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 4 :

div_t = λxy.$\begin{cases} 0 & si\ x = 0, \\ y\ div\ x & sinon \end{cases}$ PR ? **Règle de récursion**

div_t(x,0)=0=Z_1(x)

div_t(x,y+1)=$\begin{cases} 0 & si\ x = 0, \\ div_t(x,y) + 1\ si\ y + 1 = (div_t(x,y) + 1) * x, \\ div_t(x,y) & sinon \end{cases}$

= Sg(x)*[div_t(x,y)+$\overline{Sg}$(moins(⊗(S(div_t(x,y)),x),S(y)))]

= [⊗°(Sg°P_1^3,
⊕°(P_2^3,
$\overline{Sg}$ °moins°(⊗°(S°P_2^3, P_1^3), S°P_3^3)))](x,div_t(x,y),y)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 4 :

reste_t = λxy.$\begin{cases} y & si\ x = 0, \\ y\ mod\ x & sinon \end{cases}$ PR ? **Règle de composition**

reste_t(x,y)=$\begin{cases} y & si\ x = 0, \\ y\ mod\ x\ sinon \end{cases}$

$= \begin{cases} y & si\ x = 0, \\ moins\big(y, \otimes(x, div_t(x,y))\big)\ sinon \end{cases}$

= moins(y,⊗(x,div_t(x,y)))

= [moins°(P_2^2, ⊗°(P_1^2,div_t))](x,y)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 1 Exercice 4 : La fonction Puis_t est le prolongement à IN^2 de la fonction Puis=λxy.x^y

2) Puis_t = λxy.$\begin{cases} 1 & si\ (x,y) = (0,0), \\ x^y & sinon \end{cases}$ PR ?

Puis_t(x,y) = $\begin{cases} 1 & si\ y = 0, \\ x * x^{y-1} & sinon \end{cases}$

Règle de récursion :

- Puis_t(x,0) = 1 = ($S \circ Z_1$)(x)

- Puis_t(x,y+1) = x*Puis_t(x,y) = [$\otimes \circ (P_1^3, P_2^3)$](x,Puis_t(x,y),y)

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Récursivité des ensembles

Fonction caractéristique :

Soit A un sous-ensemble de IN^p. La fonction caractéristique de A, par rapport à IN^p, permet de distinguer les éléments de A des autres éléments de IN^p. Elle est définie comme suit :

$$\mathrm{Car_A} = \lambda x_1 \ldots x_p . \begin{cases} 1 \; si \; (x_1, \ldots, x_p) \in A, \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Récursivité des ensembles

Définition :

Soit A un sous-ensemble de IN^p. A est primitif récursif (respectivement récursif) si sa fonction caractéristique Car_A est primitive récursive (respectivement récursive).

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Récursivité des ensembles

Décidabilité d'un ensemble –définition :

Soit A un sous-ensemble de IN^p. A est décidable s'il existe un algorithme (une procédure effective) permettant de décider, pour tout élément $(x_1,\ldots,x_p)$ de IN^p, si $(x_1,\ldots,x_p)$ appartient à A.

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Récursivité des ensembles

Décidabilité d'un ensemble –proposition :

Soit A un sous-ensemble de IN^p. A est décidable s'il est récursif (en particulier, s'il est primitif récursif).

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Récursivité des ensembles

Semi-décidabilité :

Soit A un sous-ensemble de IN. A est récursivement énumérable (ou semi-décidable) s'il existe une fonction récursive

$$f = \lambda x_1 \ldots x_p . f(x_1,\ldots,x_p)$$

telle que

$$A=\{y \in IN : \exists (x_1,\ldots,x_p) \in IN^p \text{ t.q. } f(x_1,\ldots,x_p)=y\}.$$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Récursivité des ensembles

Semi-décidabilité (généralisation) :

Soit A un sous-ensemble de IN^q. A est récursivement énumérable (ou semi-décidable) s'il existe une fonction récursive

$$f = \lambda x_1 \ldots x_p . f(x_1, \ldots, x_p)$$

telle que

$$A = \{(y_1, \ldots, y_q) \in IN^q : \exists (x_1, \ldots, x_p) \in IN^p \text{ t.q. } f(x_1, \ldots, x_p) = (y_1, \ldots, y_q)\}.$$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Récursivité des relations

Fonction caractéristique :

Soit R une relation définie sur IN^p (on dit aussi fonction p-aire définie sur IN). La fonction caractéristique de R, par rapport à IN^p, permet de distinguer les éléments vérifiant R des autres éléments de IN^p. Elle est définie comme suit :

$$\mathrm{Car_R} = \lambda x_1 \ldots x_p . \begin{cases} 1 \; si \; (x_1, \ldots, x_p) vérifie \; R, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

CHAPITRE I
Fonctions récursives

Récursivité des relations

Définition :

Soit R une relation définie sur IN^p. R est primitive récursive (respectivement récursive) si sa fonction caractéristique Car_R est primitive récursive (respectivement récursive).

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 5 :

1a) Calculabilité (R ou PR) de E1={x∈IN : x pair}

Solution :

- $Car_{E1}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in E1, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = \begin{cases} 1 \; si \; x \; pair, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = \begin{cases} 1 \; si \; r2(x) = 0, \\ 0 \quad sinon \end{cases}$

  $= \overline{Sg}(r2(x))$

  $= (\overline{Sg} \circ r2)(x)$
- Car_{E1} PR (règle de composition)
- donc E1 calculable (PR)
- donc E1 décidable

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 5 :

1b) Calculabilité (R ou PR) de E2={x∈IN : x impair}

Solution :

- $Car_{E2}(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in E2, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = \begin{cases} 1 \ si \ x \ impair, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = \begin{cases} 1 \ si \ r2(x) = 1, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = r2(x)$
- Car_{E2} PR
- donc E2 calculable (PR)
- donc E2 décidable

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 5 :

2a) R et S récursifs. Montrer que R∩S est décidable.

Solution :

- $Car_{R\cap S}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in R \cap S, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = \begin{cases} 1 \; si \; Car_R(x) = 1 \; et \; Car_S(x) = 1, \\ 0 \quad sinon \end{cases}$

  $= \begin{cases} 1 \; si \; Car_R(x) * Car_S(x) = 1, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = Car_R(x) * Car_S(x)$

  $= [\otimes°(Car_R, Car_S)](x)$
- $Car_{R\cap S}$ récursive (règle de composition)
- donc R∩S calculable (récursif)
- donc R∩S décidable

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 5 :

2b) R et S récursifs. Montrer que R∪S est décidable.

Solution :

- $Car_{R\cup S}(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in R \cup S, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = \begin{cases} 0 \; si \; x \notin R \cup S, \\ 1 \quad sinon \end{cases} = \begin{cases} 0 \; si \; Car_R(x) = 0 \; et \; Car_S(x) = 0, \\ 1 \quad sinon \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 \; si \; Car_R(x) + Car_S(x) = 0, \\ 1 \quad sinon \end{cases} = Sg(Car_R(x)+Car_S(x))$$

$$= [Sg°(\oplus°(Car_R,Car_S))](x)$$

- $Car_{R\cup S}$ récursive (règle de composition)
- donc R∪S calculable (récursif)
- donc R∪S décidable

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 6 :

1a) Montrer que la relation binaire Equal est PR.

Solution :

- $Car_{Equal}(x,y) = \begin{cases} 1 \; si \; (x,y) vérifie \; Equal, \\ 0 \qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 \; si \; x = y, \\ 0 \quad sinon \end{cases} = \begin{cases} 1 \; si \; x - y = 0, \\ 0 \quad\quad sinon \end{cases}$$

$$= \overline{Sg}(Abs(x,y)) = [\overline{Sg} \circ Abs](x,y)$$

- Car_{Equal} PR (règle de composition)
- donc Equal PR

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 6 :

1b) Montrer que la relation binaire d'inégalité linéaire ≤ est PR.

Solution :

- $Car_{\leq}(x,y) = \begin{cases} 1 \; si \; (x,y) vérifie \; \leq, \\ 0 \qquad\qquad\quad sinon \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 \; si \; x \leq y, \\ 0 \quad sinon \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 \; si \; moins(x,y) = 0, \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$

$= \overline{Sg}(\text{moins}(x,y)) = [\overline{Sg} \circ \text{moins}](x,y)$

- $Car_{\leq}$ PR (règle de composition)
- donc ≤ PR

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 6 :

2a) R1 et R2 relations binaires PR. Monter que R1∧R2 est PR.

Solution :

- $\mathrm{Car}_{R1\wedge R2}(x,y) = \begin{cases} 1 \; si \; (x,y) vérifie \; R1\wedge R2, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 \; si \; (x,y) vérifie \; \mathrm{R1 \; et \; (x,y) vérifie \; R2}, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \; si \; Car_{R1}(x,y) = 1 \; \mathrm{et} \; \mathrm{Car}_{R2}(x,y) = 1, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \; si \; Car_{R1}(x,y) * \mathrm{Car}_{R2}(x,y) = 1, \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

$$= Car_{R1}(x,y) * \mathrm{Car}_{R2}(x,y) = [\otimes^{\circ}(Car_{R1}, Car_{R2})](x,y)$$

- $\mathrm{Car}_{R1\wedge R2}$ PR (règle de composition)
- donc R1∧R2 PR

CHAPITRE I
Fonctions récursives

TD 2 Exercice 6 :

2b) R relation binaire PR. Monter que ¬R est PR.

Solution :

- $Car_{\neg R}(x,y) = \begin{cases} 1 \; si \; (x,y) \; vérifie \; \neg R, \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 \; si \; (x,y) ne \; vérifie \; pas \; R, \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 \; si \; Car_R(x,y) = 0, \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$

$= \overline{Sg}(Car_R(x,y)) = [\overline{Sg} \circ Car_R](x,y)$

- $Car_{\neg R}$ PR (règle de composition)
- Donc ¬R PR