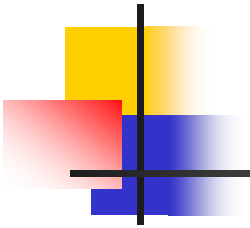


Programmation Fonctionnelle

Module du tronc commun "Mathématiques-Informatique" 1ère année

Cours du module PRF

Calculabilité des fonctions

Chapitre II

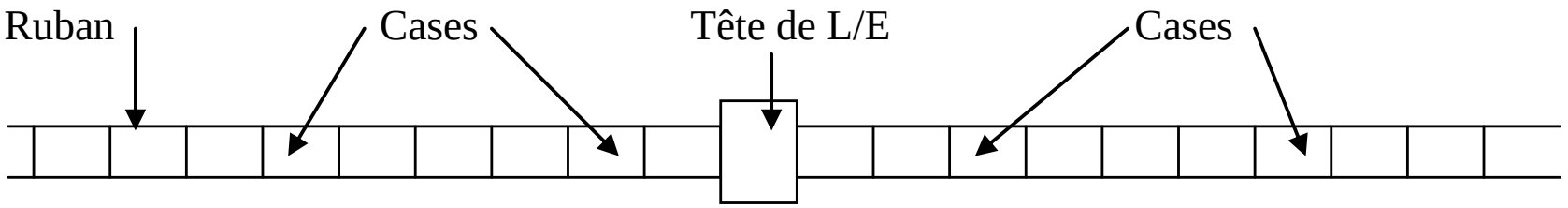
Machines de Turing

Mes séances (Webex) des 10, 17 et 24/06/2020

CHAPITRE II
Machines de Turing

Une Machine de Turing MT consiste en une entité « mécanique » :

- comportant un ruban potentiellement infini dans les deux directions, organisé en cases (ou cellules) de tailles égales où des symboles sont imprimés,
- disposant d'une tête de lecture/écriture (L/E), qui à chaque instant examine une case et peut éventuellement y imprimer un symbole,
- à laquelle est associé à chaque instant un paramètre appelé état interne de la MT.



Initialement toutes les cases du ruban sont à blanc (à 0). De plus, la position de la tête de L/E sur le ruban est indiquée par une flèche verticale descendante.

CHAPITRE II
Machines de Turing

Définition : Une machine de Turing est un triplet MT=<S,E,I> avec :

- $S=\{S_0,S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ ensemble fini de symboles
- $E=\{q_0,q_1,q_2,\ldots,q_f\}$ ensemble fini d'états internes
- I ensemble fini d'instructions dont chaque élément est de l'une des trois formes suivantes : $q_jS_iS_rq_t$, $q_jS_iDq_t$ ou $q_jS_iGq_t$

Notation et Conventions :

Dans toute la suite, nous adopterons les notations et conventions suivantes :

- S_0 représente le symbole Blanc, noté 0
- S_1 représente le symbole Barre, noté 1
- S_2 représente le symbole Etoile, noté *
- q_0 représente l'état interne initial
- q_f représente l'état interne final

CHAPITRE II
Machines de Turing

III- 2) <u>FONCTIONNEMENT D'UNE MACHINE DE TURING</u> :

Soit MT=<S,E,I> une machine de Turing. Le contenu significatif du ruban constitue l'entrée de MT.

La configuration initiale de MT est comme suit :

- la tête de L/E est sur le symbole le plus à gauche de l'entrée
- l'état interne de la machine est q_0

Le fonctionnement de la machine est ensuite entièrement guidé par les instructions de l'ensemble I, dont chacune est de l'une des trois formes suivantes :

$q_jS_iS_rq_t$ $q_jS_iDq_t$ $q_jS_iGq_t$

CHAPITRE II
Machines de Turing

Soient S_i le symbole lu par la tête de L/E et q_j l'état interne dans lequel se trouve la machine :

- **Cas 1 :** l'ensemble I contient une instruction de la forme $q_j S_i S_r q_t$
  - La machine imprime le symbole S_r et transite vers l'état interne q_t
- **Cas 2 :** l'ensemble I contient une instruction de la forme $q_j S_i D q_t$
  - La machine se déplace à droite (avance) d'une case et transite vers l'état interne q_t
- **Cas 3 :** l'ensemble I contient une instruction de la forme $q_j S_i G q_t$
  - La machine se déplace à gauche (recule) d'une case et transite vers l'état interne q_t
- **Cas 4 :** l'ensemble I ne contient aucune instruction commençant par $q_j S_i$
  - Situation finale (aucune action n'est possible : la machine s'arrête)

CHAPITRE II
Machines de Turing

Ainsi, trois actions (opérations) peuvent être déclenchées, en dehors de la situation d'arrêt :

- Impression d'un symbole S_r (à la place de S_i) et la MT se place dans l'état q_t
- Déplacement d'une case à droite et la MT se place dans l'état q_t
- Déplacement d'une case à gauche et la MT se place dans l'état q_t
- Arrêt : aucune action

Remarque :

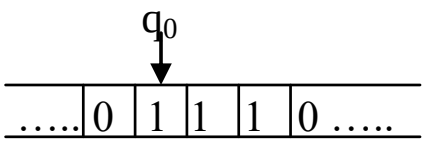
Dans le cadre de ce cours, nous nous restreignons aux machines de Turing déterministes : pour toute paire $(q_j,S_i) \in ExS$, l'ensemble I des instructions contient au plus une instruction avec q_jS_i comme paire de tête.

CHAPITRE II
Machines de Turing

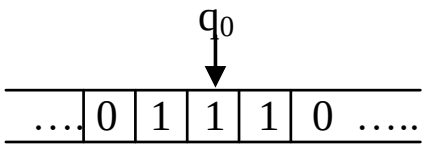
Exemple : MT=<S,E,I> avec :

- S = { 0 , 1 }
- E = { q_0 , q_1 , q_f}
- I = {(1) $q_0 1 D q_0$, (2) $q_0 01 q_1$, (3) $q_1 1 G q_1$, (4) $q_1\, 0\, D\, q_f$}

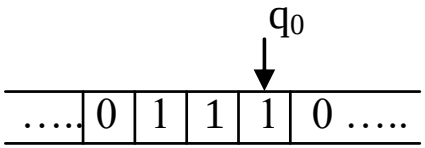
Soit la configuration initiale suivante :



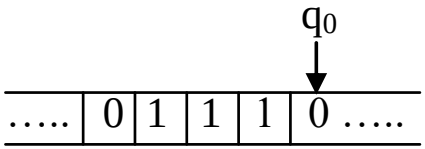
L'instruction (1) s'applique et donne lieu à la nouvelle configuration :



L'instruction (1) s'applique à nouveau :

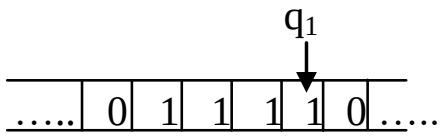


L'instruction (1) s'applique encore :

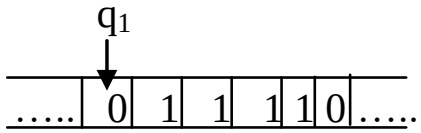


CHAPITRE II
Machines de Turing

L'instruction (2) s'applique :

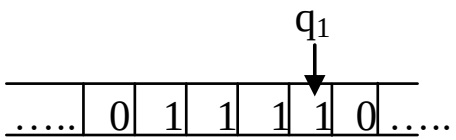


L'instruction (3) s'applique 4 fois :

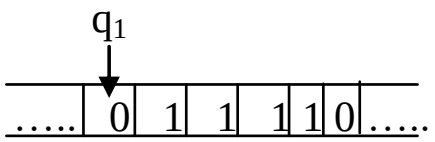


CHAPITRE II
Machines de Turing

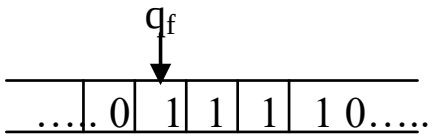
L'instruction (2) s'applique :



L'instruction (3) s'applique 4 fois :



L'instruction (4) s'applique :



Aucune instruction commençant par la paire q_f1. La machine est donc dans sa configuration finale (arrêt).

CHAPITRE II
Machines de Turing

III- 3) REPRESENTATION DES ENTIERS NATURELS :

La représentation d'un entier X est notée $\underline{X}$. Concrètement l'entier X est représenté par (X+1) barres, de manière à pouvoir représenter le nombre 0. Donc :

$\underline{0} =_{def} 1 = 1^1$
$\underline{1} =_{def} 11 = 1^2$
$\underline{2} =_{def} 111 = 1^3$
.
.
.
$\underline{n} =_{def}$ 11…11 (n+1 fois)= 1^{n+1}

CHAPITRE II
Machines de Turing

Remarque :

Cette représentation permet de présenter l'exemple précédent de la manière suivante :

$0q_0 1^3 0 \longrightarrow 01\, q_0 1^2 0 \longrightarrow 01^2 q_0 10 \longrightarrow 01^3 q_0 0 \longrightarrow 01^3 q_1 10 \longrightarrow$

$01^2 q_1 1^2 \longrightarrow 01 q_1 1^3 \longrightarrow 0 q_1 1^4 0 \longrightarrow 0 q_1 01^4 0 \longrightarrow 0 q_f 1^4 0$ Arrêt.

Configuration OU **initiale :** $0q_0 1^3 0$ $q_0 1^3$ **Configuration finale :** $0q_f 1^4 0$ OU $q_f 1^4$

C'est-à-dire : $q_0 1^3 \longrightarrow q_f 1^4$ $q_0 \underline{2} \longrightarrow q_f \underline{3}$

De façon générale : $\forall\, n \in IN$ $q_0 \underline{n} \longrightarrow q_f\, \underline{n+1}$

CHAPITRE II
Machines de Turing

REPRESENTATION DES N-UPLETS :

Pour représenter un n-uplet, le symbole Etoile (*) est utilisé pour séparer les entiers composant le n-uplet :

$(n, m) =_{def} n * m$

$(n_1, n_2, \ldots, n_p) =_{def} n_1 * n_2 * \ldots * n_p$

Exemple 1 : $(2,3) = 111*1111$ ou 1^3*1^4

Exemple 2 : $(6,11,0,7) = 1^7*1^{12}*1^1*1^8$

CHAPITRE II
Machines de Turing

FONCTION TURING-CALCULABLE :

Définition :

Soient F une fonction de $IN^p \longrightarrow IN^q$ et MT=<S,E,I> une machine de Turing.
La fonction F est dite calculable par la machine de Turing MT si, pour tout p-uplet $(n_1,n_2,\ldots,n_p)$ de IN^p, l'application des instructions de I à la configuration initiale

$$q_0\ \underline{n_1} * \underline{n_2} * \ldots * \underline{n_p}$$

fait arriver à une situation d'arrêt avec la configuration finale

$$q_f\ \underline{F(n_1,n_2,\ldots,n_p)}$$

Autrement dit :

$$q_0\underline{n_1}*\underline{n_2}*\ldots*\underline{n_p} \xrightarrow{\text{Instructions de MT}} q_f\ \underline{F(n_1\ ,\ n_2\ ,\ \ldots\ ,\ n_p)}$$

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 1 :

1) Concevoir une MT calculant la fonction successeur S=λn.n+1.

Solution 1 :

$\forall n \in IN$, $q_0\underline{n} \longrightarrow q_f \underline{n+1}$

$q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1^{n+2}$

$MT_S = (S , E , I)$:

- S ={0,1}
- E ={q0,q1,qf}
- I ={ (1) q01Dq0, (2) q001q1, (3) q11Gq1, (4) q10Dqf}

Aller sur le 1er blanc à droite des barres, imprimer une barre, revenir sur la la barre la plus à gauche et transiter vers l'état interne final :

q01Dq0—q001q1—q11Gq1—q10Dqf

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 1 :

1) Concevoir une MT calculant la fonction successeur S=λn.n+1.

Solution 2 :

$\forall n \in IN$,

$q_0\underline{n} \longrightarrow q_f \underline{n+1}$

$q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1^{n+2}$

$MT_S = (S , E , I)$:

- S ={0,1}
- E ={q0,q1,qf}
- I ={ (1) q01Gq1, (2) q101qf}

Se déplacer d'une case à gauche, imprimer une barre et transiter vers l'état interne final :

q01Gq1—q101qf

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 1 :

2) Concevoir une MT calculant la fonction successeur2 S2=λn.n+2.

Solution 1 :

$\forall n \in IN$, $q_0 \underline{n} \longrightarrow q_f \underline{n+2}$

$q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1^{n+3}$

$MT_{S2} = (S , E , I)$:

- S ={0,1}
- E ={q0,q1,q2,qf}
- I ={(1) q01Dq0, (2) q001q1, (3) q11Dq1, (4) q101q2, (5) q21Gq2, (6) q20Dqf}

Aller sur le 1er blanc à droite des barres, imprimer deux barres, aller sur la barre la plus à gauche et transiter vers l'état interne final :

q01Dq0—q001q1—q11Dq1—q101q2—q21Gq2--q20Dqf

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 1 :

2) Concevoir une MT calculant la fonction successeur2 S2=λn.n+2.

Solution 2 :

$\forall n \in IN$, $q_0\underline{n} \longrightarrow q_f \underline{n+2}$

$q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1^{n+3}$

$MT_{S2} = (S , E , I)$:

- S ={0,1}
- E ={q0,q1,q2,q3,qf}
- I ={(1) q01Gq1, (2) q101q2, (3) q21Gq3, (4) q301qf}

Aller sur le 1er blanc à gauche de la toute 1ère barre, imprimer deux barres, rester sur la barre la plus à gauche et transiter vers l'état interne final :

q01Gq1—q101q2—q21Gq3—q301qf

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 2 :

Concevoir une MT calculant la fonction $Z1=\lambda n.0$.

Solution :

$\forall n \in IN$, $q_0\underline{n} \longrightarrow q_f\underline{0}$

$q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1^1$

$MT_{Z1} = <S,E,I>$:

- S ={0,1}
- E ={q0,q1,qf}
- I ={(1) q010q1, (2) q10Dq0, (3) q001qf}

Supprimer toutes les barres, imprimer une barre et transiter vers l'état interne final :

q010q1--q10Dq0--q001qf

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 3 :
MT=<S,E,I>, with :

- S={0,1}
- E={q0,q1,q2,q3,q4,q5,qf}
- I={
  (1) q01Dq1, (2) q10Gqf, (3) q11Gq2,
  (4) q210q3, (5) q30Dq2, (6) q201q4,
  (7) q41Gq5, (8) q501qf
  }

Déroulement 1 : x=0
q0<u>0</u> = q01 -(1)-> 1q10 –(2)-> qf1

q0<u>0</u> –instructions de MT→ qf<u>0</u>

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 3 :
MT=<S,E,I>, avec :

- S={0,1}
- E={q0,q1,q2,q3,q4,q5,qf}
- I={
  (1) q01Dq1, (2) q10Gqf, (3) q11Gq2,
  (4) q210q3, (5) q30Dq2, (6) q201q4,
  (7) q41Gq5, (8) q501qf
  }

Déroulement 2 : x=1

q01 = q011 –(1)-> 1q11 –(3)-> q211 –(4)-> q301 -(5)-> q21 –(4)-> q30 –(5)-> q20 –(6)-> q41 –(7)-> q501 –(8)-> qf11

q01 –Instructions de MT→ qf1

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 3 :

I={

(1) q01Dq1, (2) q10Gqf, (3) q11Gq2,
(4) q210q3, (5) q30Dq2, (6) q201q4,
(7) q41Gq5, (8) q501qf
}

Déroulement 3 : x=3

q01111 –(1)-> 1q1111 –(3)-> q21111 –(4)-> q30111 –(5)-> q2111 –(4)-> q3011 –(5)-> q211 –(4)-> q301 –(5)-> q21 –(4)-> q30 --(5)-> q20 –(6)-> q41 –(7)-> q501 –(8)-> qf11

q03 ─Instructions de MT→ qf1

La fonction calculée par la MT est la fonction Sg : les instructions (1) et (2) détectent si l'entrée est la représentation de 0, auquel cas la sortie est la repésentation de 0. Si l'entrée consiste en plus d'une barre (repésentation d'un entier non nul), la MT fait ce qui suit :

- Les instructions (3), (4) et (5) suppriment toutes les barres
- Une fois toutes les barres supprimées, les instructions (6), (7) et (8) permettent d'imprimer deux barres, de se placer sur la barre la plus à gauche, et de transiter vers l'état interne final.

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 4 :

Machine de Turing calculant la fonction $\overline{Sg}$.

Solution :

$MT_{\overline{Sg}}$ =<S , E , I> :

- S ={0,1}
- E ={q0,q1,q2,q3,q4,qf}

  I ={(1) q01Dq1, (2) q101q2,(3) q21Gqf, (4) q11Gq3,
  (5) q310q4, (6) q40Dq3, (7) q301qf }

q01Dq1--q101q2--q21Gqf [x=0 : résultat=1]

|

q11Gq3—q310q4— q40Dq3-- q301qf [x≠0 : résultat=0]

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 5 :

Machine de Turing calculant la fonction Pred.

Solution :

MT_{Pred} =<S , E , I> :

- S ={0,1}
- E ={q0,q1,q2,qf}
  I ={(1) q01Dq1, (2) q10Gqf, (3) q11Gq2, (4) q210q2, (5) q20Dqf }

q01Dq1--q10Gqf [x=0 : résultat=0]

|

q11Gq2—q210q2—q20Dqf [x≠0 : résultat=x-1]

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 6 :
Machine de Turing calculant la fonction Plus.

Idée :

1) Remplacer l'étoile par une barre
2) Supprimer les deux barres les plus à gauche
3) Aller sur la barre la plus à gauche
4) Transiter vers l'état interne final qf

(x+1) barres + 1 étoile + (y+1) barres ➔ (x+y+1) barres

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 3 Exo 6 :
Machine de Turing calculant la fonction Plus.

Solution :

MT_{Plus} =<S , E , I> :

- S ={0,1,*}
- E ={q0,q1,q2,q3,qf}

  I ={ (1) q01Dq0, (2) q0*1q1, (3) q11Gq1, (4) q10Dq2,
  (5) q210q2, (6) q20Dq3, (7) q310q3, (8) q30Dqf
  }

q01Dq0—q0*1q1—q11Gq1—q10Dq2—q210q2
|
q30Dqf—q310q3—q20Dq3

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 1 :
Machine de Turing calculant la fonction mod2=λx.x mod 2.

Idée :

x mod y=$\begin{cases} x & si\ x < y, \\ (x-y)\ mod\ y\ sinon \end{cases}$

1) S'il y a moins de (y+1) barres, résultat=x (fin)
2) Supprimer y barres et aller à 1)

x mod 2=$\begin{cases} x & si\ x < 2, \\ (x-2)\ mod\ 2\ sinon \end{cases}$

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 1 :
Machine de Turing calculant la fonction mod2=λx.x mod 2.

Solution :

$MT_{mod\,2}$ =<S , E , I> :

- S ={0,1}
- E ={q0,q1,q2,q3,q4,q5,qf}
- I ={ (1) q010q1, (2) q10Dq2, (3) q201qf, (4) q210q3, (5) q30Dq4,
  (6) q401q5, (7) q51Gq2, (8) q411q0
  }

q010q1--q10Dq2—q201qf [x=0]

|

q210q3—q30Dq4—q401q5—q51Gq2 [x=1]

|

q411q0 [x≥2 : r2(x)=r2(x-2)]

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 2 :
Machine de Turing calculant la fonction div2=λx.x div 2.

Idée :

x div y=$\begin{cases} 0 & si\ x < y, \\ 1 + [(x - y)\ div\ y]\ sinon \end{cases}$

1) Initialiser le quotient à 0 en mettant #1 après les barres
2) S'il y a moins de (y+1) barres à gauche de #, aller à 6)
3) Supprimer y barres à gauche de #
4) ajouter une barre à droite de # pour comptabiliser le y retranché à x par l'étape 3)
5) aller à 2)
6) Résultat donné par les barres à droite de #

x div 2=$\begin{cases} 0 & si\ x < 2, \\ 1 + [(x - 2)\ div\ 2]\ sinon \end{cases}$

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 2 :
Machine de Turing calculant la fonction div2=λx.x div 2.

Solution :
MT_{div2} =<S , E , I> : S ={0,1,#}, E ={q0,…,q10,qf}, I =…

q01Dq0—q00#q1—q1#Dq1—q101q2
[mettre un # à la fin et initialiser le quotient à 0]
q21Gq2—q2#Gq2—q20Dq3
[revenir sur la barre la plus à gauche et transiter vers l'état interne interne q3]
q310q4—q40Dq5—q5#0q6—q60Dqf [x=0]
|
q510q7—q70Dq8—q8##q5 [x=1]
|
q81Dq9—q91Dq9—q9#Dq9—q901q10—q101Gq10—q10#Gq10—q100Dq3
[x≥2 : div2(x)=1+div2(x-2)]

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 3 :
Machine de Turing calculant la fonction Abs=λxy.|x-y|.

Idée :

$$|x-y|=\begin{cases} y & si\ x=0, \\ x & si\ y=0, \\ |(x-1)-(y-1)| & sinon \end{cases}$$

1) Supprimer une barre à gauche de *
2) S'il ne reste plus de barres à gauche de *, résultat=y (fin)
3) Supprimer une barre à droite de *
4) S'il ne reste plus de barres à droite de *, résultat=x (fin)
5) Aller à 1)

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 3 :
Machine de Turing calculant la fonction Abs=λxy.|x-y|.

Solution :
MT_{Abs} =<S , E , I> : S ={0,1,#}, E ={q0,…,q7,qx,qy,qf}, I =…

$$|x-y|=\begin{cases} y & si\ x=0, \\ x & si\ y=0, \\ |(x-1)-(y-1)| & sinon \end{cases}$$

q010q1—q10Dq2—q2*0qx—qx0Dqf [x=0 : résultat=y]

|

q21Dq3—q31Dq3—q3*Dq3—q30Gq4—q410q5—q50Gq6—q6*1qy—qy1Gqy

| |

[xy>0 : réitérer] q70Dq0--q7*Gq7--q71Gq7--q61Gq7 qy0Dqf

[y=0 : résultat=x]

CHAPITRE II
Machines de Turing

COMPOSITION DE MACHINES DE TURING : théorème

Soient deux machine de Turing :

- MT1 <S1 , E1 , I1> qui calcule la fonction F1 de $IN^p \longrightarrow IN^q$
- MT2 <S2 , E2 , I2> qui calcule la fonction F1 de $IN^q \longrightarrow IN^r$

telles que S1 = S2 et $E1 \cap E2 = \emptyset$:

- renommer éventuellement les états internes de MT1 ou ceux de MT2.

La machine de Turing MT=<S , E , I > définie par :

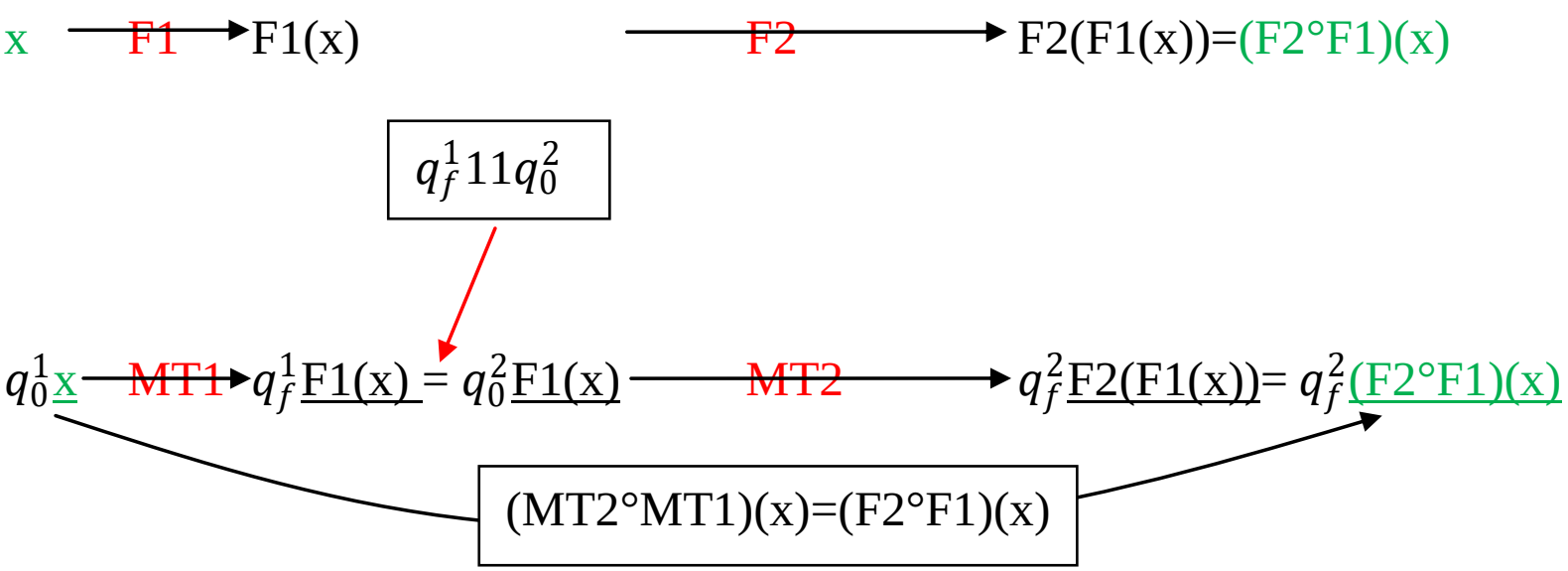
- S = S1 = S2
- E = E1∪E2, état interne initial : q_0^1, état interne final : q_f^2
- I = I1∪I2∪{$q_f^1 11 q_0^2$}

calcule la composition (F2°F1) des fonctions F1 et F2.

La machine MT est la composition des machines MT1 et MT2 et est notée MT2°MT1 : MT=MT2°MT1

CHAPITRE II
Machines de Turing

COMPOSITION DE MACHINES DE TURING :



CHAPITRE II
Machines de Turing

COMPOSITION DE MACHINES DE TURING : $MT_{(div2°Plus)}=MT_{div2}°MT_{Plus}$

MT_{Plus}

q01Dq0—q0*1q1—q11Gq1—q10Dq2—q210q2

|

q30Dqf—q310q3—q20Dq3

MT_{div2}

q01Dq0—q00#q1—q1#Dq1—q101q2

[mettre un # à la fin et initialiser le quotient à 0]

q21Gq2—q2#Gq2—q20Dq3

[revenir sur la barre la plus à gauche et transiter vers l'état interne interne q3]

q310q4—q40Dq5—q5#0q6—q60Dqf [x=0]

|

q510q7—q70Dq8—q8##q5 [x=1]

|

q81Dq9—q91Dq9—q9#Dq9—q901q10—q101Gq10—q10#Gq10—q100Dq3

[x≥2 : div2(x)=1+div2(x-2)]

CHAPITRE II
Machines de Turing

COMPOSITION DE MACHINES DE TURING : $MT_{(div2°Plus)}=MT_{div2}°MT_{Plus}$

Renommage des états internes de MT_{Plus} :

p01Dp0—p0*1p1—p11Gp1—p10Dp2—p210p2

|

p30Dpf—p310p3—p20Dp3

Etat interne intial de $MT_{(div2°Plus)}$: p0

Etat interne final de $MT_{(div2°Plus)}$: qf

Instruction faisant passer le relais à MT_{div2} : pf11q0

$MT_{(div2°Plus)}$=<S,E,I> :

- S=S1=S2={0,1,*,#}
- E={ p0,p1,p2,p3,pf,

  q0,q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10,qf

  }
- I = I1 ∪ I2 ∪ {pf11q0}

CHAPITRE II
Machines de Turing

COMPOSITION DE MACHINES DE TURING : $MT_{(div2°Plus)}=MT_{div2}°MT_{Plus}$

Instructions de $MT_{(div2°Plus)}$:

p01Dp0—p0*1p1—p11Gp1—p10Dp2—p210p2
|
p30Dpf—p310p3—p20Dp3

q01Dq0—q00#q1—q1#Dq1—q101q2
[mettre un # à la fin et initialiser le quotient à 0]

q21Gq2—q2#Gq2—q20Dq3
[revenir sur la barre la plus à gauche et transiter vers l'état interne interne q3]

q310q4—q40Dq5—q5#0q6—q60Dqf [x=0]
|
q510q7—q70Dq8—q8##q5 [x=1]
|
q81Dq9—q91Dq9—q9#Dq9—q901q10—q101Gq10—q10#Gq10—q100Dq3
[x≥2 : div2(x)=1+div2(x-2)]

➔ pf11q0 (relais)

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 4 :

Solution :

Déroulement 1 : x=3

$q_0\underline{3}$ = $q_0$1111 -4x(1)→1111$q_0$0 -(9)→111$q_1$1 -4x(10)→$q_1$01111 -(11)→$q_7$1111

(q_7 : état interne final)

Donc $q_0\underline{3}$—(Inst de MT)→$q_7\underline{3}$

Déroulement 2 : x=(2,1)

$q_0\underline{(2,1)}$ = $q_0$111*11 -3x(1)→111q_0*11 -(2)→111$q_2$111 -4x(3)→$q_2$0111111 -(4)→$q_3$111111 -(5)→$q_4$011111 -(6)→$q_5$11111 -(7)→$q_6$01111 -(8)→$q_0$1111 -(Inst de MT)→ $q_7$1111

Donc $q_0\underline{(2,1)}$ -(Inst de MT)→$q_7\underline{3}$

La machine de Turing calcule toutes les fonctions f_n, avec n≥1 :

$$f_n : \begin{cases} IN^n & \rightarrow & IN \\ (x_1, \dots, x_n) & \vdash> & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$$

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 5 :

Déroulement 1 : x=3

q03 = q01111 -4x(1)->1111q00 -(2)-> 111q11 -4x(3)-> q101111 -(4)-> q51111

(q5 état interne final)

q03 –Instructions de MT-> q53

Déroulement 2 : x=(3,2)

q0(3,2)=q01111*111 -4x(1)-> 1111q0*111 -(5)-> 1111q20111 -(6)-> 11110q3111
-(7)-> 11110q2011 -(6)-> 111100q311 -(7)-> 111100q201 -(6)-> 1111000q31
-(7)-> 1111000q20 -(6)-> 11110000q30 -(9)-> 1111000q40 -4x(10)-> 111q41
-(11)-> 111q11 -4x(3)-> q101111 -(4)-> q51111

q0 (3,2) -Inst de MT-> q53

Les fonctions calculables par la machine de Turing sont toutes les fonctions P_1^n, avec n≥1.

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 6 :

1) MT1=MT_S=<S,E1,I1>

S={0,1}, E1={q0,qf}, I1={(1) q01Gq0, (2) q001qf}

MT2=MT_S=<S,E2,I2>

S={0,1}, E2={p0,pf}, I2={(1) p01Gp0, (2) p001pf}

MT_S2 machine de Turing calculant la fonction S2=λx.x+2 : S2=S°S

MT_S2=MT2°MT1=<S,E,I>

E=E1 union E2={q0,qf,p0,pf}

q0 état interne initial de MT_S2, pf état interne final de MT_S2

I=I1 union I2 union {qf11p0}

={(1) q01Gq0, (2) q001qf, (3) p01Gp0, (4) p001pf, (5) qf11p0}

Dérouler MT_S2 sur l'entrée 2 :

q02=q0111 -(1)-> q00111 -(2)-> qf1111 -(5)-> p01111 -(3)-> p001111 -(4)-> pf11111=pf4

CHAPITRE II
Machines de Turing

TD 4 Exo 6 :

2) MT_plus machine de Turing calculant la fonction plus=λxy.x+y :

MT3=MT_plus=<S',E3,I3>

S'={0,1,*}

E3={q0,qf,q1,q2,q3}

I3={(1) q01Dq0, (2) q0*1q1, (3) q11Gq1, (4) q10Dq2,
(5) q210q2, (6) q20Dq3, (7) q310q3, (8) q30Dqf}

MT4=MT_S=<S',E4,I4>

S'={0,1,*}, E4={p0,pf}, I4={(1) p01Gp0, (2) p001pf}

MT_S_plus machine de Turing calculant la fonction S_plus=λxy.x+y+1=S°Plus :

MT_S_plus=MT4°MT3=<S',E,I>

E=E3 union E4

q0 état interne initial de MT_S_plus, pf état interne final de MT_S_plus

I=I3 union I4 union {qf11p0}
={(1) q01Dq0, (2) q0*1q1, (3) q11Gq1, (4) q10Dq2, (5) q210q2,
(6) q20Dq3, (7) q310q3, (8) q30Dqf, (9) p01Gp0, (10) p001pf,
(11) qf11p0}