Série TD n°1
Les fonctions primitives récursives

Dans cette série d'exercices, nous utilisons la notation λ pour exprimer les fonctions.

Exercice 1

Montrer que les fonctions suivantes sont PR :

1/ $Z_1 = \lambda n.0$ est PR // Z_1 désigne la fonction nulle d'arité 1

2/ $plus = \lambda xy.x + y$ //"+" désigne l'opération de l'addition arithmétique

3/ $mult = \lambda xy.x * y$ //" $*$ " désigne l'opération de la multiplication arithmétique

Exercice 2

Montrer que les fonctions suivantes sont PR

1/ $Sg = \lambda x.\begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 & sinon\ (x \geq 1) \end{cases}$ "sg" désigne le signe positif ou nul d'un nombre entier

2/ $pred = \lambda x.\begin{cases} x - 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

//" $-$ " désigne l'opération de la soustraction arithmétique

Exercice 3

1/ Montrer par récurrence que pour toute constante k≥0, la fonction constante d'arité 0, $C_k = \lambda.\ k$ est PR

2/ Montrer que la fonction constante F_c d'arité 1 $F_c = \lambda n.\ c$ est PR

Exercice 4

Sachant que les constantes Ck sont PR, montrer que les fonctions suivantes sont PR

1/ $fact = \lambda x.x!$ //" $x!$ " désigne le factoriel de x

2/ $puis = \lambda xy.x^y$ //" x^y " désigne l'opération "$x\ puissance\ y$"

3/ $\overline{Sg} = \lambda x.\begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$ "$\overline{sg}$" désigne le complément du signe positif ou nul d'un entier

Exercice 5

Soit $D : N^2 \rightarrow N$ une fonction PR.

1/ Montrer que la fonction F suivante est PR

$F : N^2 \rightarrow N$

$(x, y) \rightarrow F(x, y) = \sum_{k=0}^{y} D(x, k)$

2/ En déduire que la fonction $f(x)=0+x+2x+3x+...+x^2$ est PR