

Série TD n°2

Les fonctions primitives récursives

Exercice 1

Montrer que les fonctions suivantes, sont PR :

1/ La soustraction positive ou nulle "*Moins*" définie par :

$$\text{moins} = \lambda xy. \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2/ Le minimum défini par :

$$\text{min} = \lambda xy. \text{minimum}(x, y)$$

Exercice 2

1/ En utilisant la règle de composition, Montrer que les deux fonctions suivantes sont PR :

a/ $\text{Abs} = \lambda xy. |x - y|$

b/ $\text{max} = \lambda xy. \text{maximum}(x, y)$

2/ Montrer, en utilisant le raisonnement par récurrence, que la fonction « maximum » appliquée à n arguments est primitive récursive.

Exercice 3

Montrer que les deux fonctions suivantes sont PR :

a/ Le reste de la division entière d'un nombre par 2, notée " r_2 ". $r_2 = \lambda x. x \bmod 2$

b/ Le quotient de la division entière d'un nombre par 2 notée " q_2 ". $q_2 = \lambda x. x \div 2$

Exercice 4

En supposant que la fonction "*quot*", qui désigne le quotient de la division entière de *deux* entiers est PR, montrer que la fonction "*rest*", qui désigne le reste de la division entière de deux nombres entiers est PR : $\text{rest} = \lambda xy. x \bmod y$

Exercice 5 Calculabilité des ensembles

1/ Montrer la calculabilité des deux ensembles

a/ E1: ensemble des entiers pairs

b/ E2: ensemble des entiers impairs

2/ Un ensemble A est dit décidable s'il est Récursif. Un ensemble est récursif s'il est PR.

Soient R et S deux sous ensembles décidables de N. Montrer que les ensembles suivants sont décidables.

a/ $R \cap S$

b/ $R \cup S$

Exercice 6 Calculabilité des relations

1/ Montrer que les relations suivantes sont PR

a/ L'égalité binaire

b/ L'inégalité binaire $R_{\leq}$

2/ Soient R1 et R2 deux relations binaires primitives récursives. Montrer que les relations suivantes sont PR

a/ $R1 \wedge R2$ (Avec $\wedge$ est le ET logique)

b/ $\neg R1$ (Avec $\neg$ est la négation logique)