

Pré requis : TF, Echantillonnage, Filtrage analogique

Partie I : Analyse temporelle et fréquentielle des signaux numériques

Introduction et rappels divers (1 Séance)

- Rappels sur la TF
- Rappels sur l'échantillonnage
- Exercices d'application

I. Analyse temporelle des SLID (2 Séances)

- Signaux déterministes discrets usuels
- Energie et puissance
- Corrélation et auto-corrélation
- Systèmes linéaires et invariants discrets
- Stabilité, causalité
- Filtres à réponses impulsionnelles finies ou infinies
- Exercices

II. Analyse fréquentielle des SLID (3 Séances)

- Transformée de Fourier à temps discret
- Transformée de Fourier Discrète
- Calcul de la FFT (TFR)
- TFD des signaux de longueur illimitée
- Fenêtres de pondération
- Exercices

Partie II : Filtrage des signaux numériques

III. Analyse des filtres numériques par la transformée en Z (TZ) (3 Séances)

- Transformées en Z
- Propriétés de la TZ
- TZ rationnelles
- Détermination de la réponse en fréquence des FN
- Détermination de la réponse impulsionnelle des FN(TZ inverse)
- Caractéristiques des FN
- Exercices

IV. Synthèse des filtres numériques RIF (2 Séances)

- Synthèse des filtres RIF par la méthode des fenêtres
- Synthèse des filtres RIF par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel
- Constitution et réalisation de filtres RIF
- Exercices

V. Synthèse des filtres numériques RII (3 Séances)

- Synthèse des filtres RII par la méthode des pôles et des zéros
- Synthèse des filtres RII par la méthode de la réponse impulsionnelle
- Synthèse des filtres RII par la méthode de la transformation bilinéaire
- Constitution et réalisation de filtres numériques RII
- Exercices

Travaux Pratiques

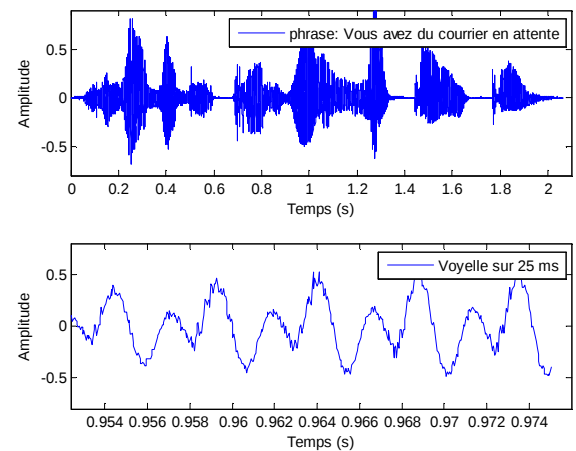
1. Analyse temporelle des filtres numériques (Corrélation, convolution, énergie, puissance)
2. Analyse fréquentielle des filtres numériques (TFD) et Fenêtrage
3. Analyse des filtres numériques par la TZ
4. Conception de filtres numériques RIF
5. Conception de filtres numériques RII

Introduction et rappels divers

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $x(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Sur le plan analytique : Un signal sera une fonction d'une variable réelle, en général le temps.

Exemples :

- ☐ Onde acoustique : délivré par un microphone (parole, musique, ...)
- ☐ Signaux biologiques : EEG, ECG
- ☐ Tension aux bornes composant électronique
- ☐ Signaux géophysiques : vibrations sismiques
- ☐ Finances : cours du pétrole
- ☐ Images, Vidéos



Remarque : Tout signal physique comporte une *composante* aléatoire (perturbation externe, bruit, erreur de mesure, etc ...). Le **bruit** est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différenciation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal utile pour les radioastronomes.

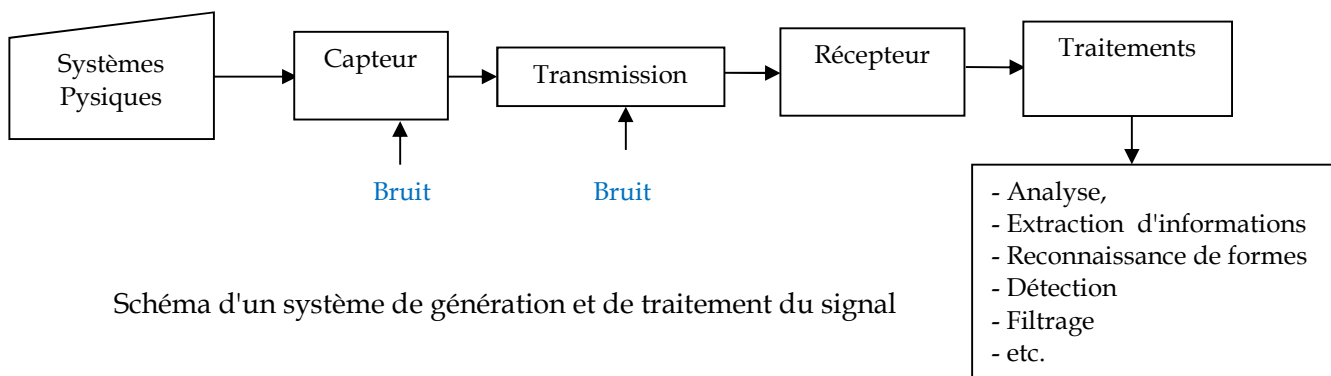


Schéma d'un système de génération et de traitement du signal

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes [1]:

Élaboration des signaux : synthèse, modulation, codage/compression, etc.

Interprétation des signaux : filtrage, détection, identification, analyse, mesure, etc.

1. Rappels sur la Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une technique mathématique permettant de déterminer le spectre de fréquences d'un signal (par exemple un son). La transformation de Fourier correspond à un changement de base dans l'espace des fonctions de carré sommable. La définition mathématique est la suivante :

$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad \text{et} \quad x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi j f t} df$$

$x(t)$ et $X(f)$ sont deux descriptions équivalentes du même signal. Ainsi, tous les signaux à énergie finie possèdent une transformée de Fourier. Cette dernière est une fonction complexe même si $x(t)$ est réel

Si $X(f)$ = fonction réel $\Leftrightarrow x(t)$ est paire

Si $X(f)$ = fonction imaginaire pure $\Leftrightarrow x(t)$ est impaire

Remarques :

$X(f)$ pourra être exprimée sous la forme:

$$\begin{cases} |X(f)| = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)} & \text{et} \quad \varphi = \arg(X(f)) = \arctg \frac{B(f)}{A(f)} \end{cases}$$

Où $|X(f)|$ et φ sont respectivement le module et la phase de $X(f)$.

La TF d'un signal périodique est divergente, mais on peut définir une TF au sens des distributions en utilisant la décomposition en Série de Fourier. Le résultat correspond à un spectre de raies (non continu):

$$\text{sachant que: } C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-2\pi j n f_0 t) dt \quad \text{et} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad \text{alors } X(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} (T \cdot C_n)$$

Pour les signaux à énergie finie, la TF conserve l'énergie (relation de Parseval) : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

On peut donc définir une notion d'énergie par unité de fréquence, la densité spectrale d'énergie (DSE). La DSE est la TF de l'autocorrélation (Théorème de Wiener-Kintchine)

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

Pour les signaux à puissance moyenne finie, on définit alors une densité spectrale de puissance (DSP):

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T}$$

- La propriété de changement d'échelle indique que plus le support temporel d'une fonction est étroit plus le support de sa TF est large.

- La translation d'un signal temporel se traduit par un déphasage en fréquence. Une translation en fréquence équivaut à une modulation temporelle.

- La propriété de dualité permet d'obtenir facilement de nouvelles paires de transformées de FOURIER à partir des paires déjà connues.

Principales propriétés de la TF

o Linéarité : $ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{TF} aX_1(f) + bX_2(f)$

o Décalage temporel : $x(t - t_0) \xrightarrow{TF} X(f)e^{-2\pi j f t_0}$

o Décalage fréquentiel : $x(t)e^{2\pi j f_0 t} \xrightarrow{TF} X(f - f_0)$ (MA)

o Dualité temps-fréq : $x(t) \xrightarrow{TF} X(f) \Rightarrow X(t) \xrightarrow{TF} x(-f)$

o Changement d'échelle : $x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X(f/a)$

o Dérivation : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j f)^n X(f)$

o Inversion et conjugaison : $x(-t) \xrightarrow{TF} X(-f)$
 $x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-f)$

o Convolution : $x(t) * h(t) \xrightarrow{TF} X(f)H(f)$

TF au sens des distributions

Pour les signaux à puissance moyenne finie (Dirac, Echelon, signaux périodiques, etc.), on peut définir une TF au sens des distributions.

o Dirac : $\delta(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-2\pi j f t_0} \Rightarrow \delta(t) \xrightarrow{TF} 1$

o Echelon et signe : $U(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi j f} + \frac{1}{2} \delta(f)$ $\text{Sgn}(f) = \frac{1}{\pi j f}$

o Périodiques : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(2\pi j n f_0 t) \xrightarrow{TF} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - n f_0)$

o Peigne de Dirac : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{TF} X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0)$

o $\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$

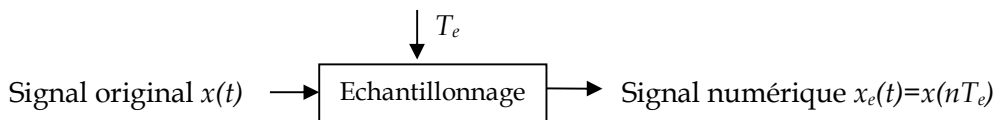
o $\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0)$

Espace temporel	Espace fréquentiel
	 $\text{Re}\{X(f)\}$ est une fonction paire $\text{Im}\{X(f)\}$ est une fonction impaire
$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$	$X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$
$x(t-a)$	$e^{-j2\pi f a} X(f)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$	
$x(t)\cos(2\pi f_0 t)$	$X(f - f_0) + X(f + f_0)$
	$X(f) = T_0 \frac{\sin(\pi T_0 f)}{\pi T_0 f}$
$x(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$	$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0)$

$y(t) = \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} h(u)x(t-u)du$ $= x(t) * h(t)$	$Y(f) = H(f)X(f)$
$y(t) = h(t)x(t)$	$Y(f) = H(f) * X(f)$

2. Quelques rappels sur l'échantillonnage

L'échantillonnage est un élément important en traitement numérique de signaux. Il constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N). Il est conditionné, principalement, par deux contraintes majeures : Ne pas détériorer le signal (conserver l'information utile) tout en limitant l'espace mémoire nécessaire au stockage. On s'attachera dans une chaîne d'acquisition à minimiser cette valeur tout en ne détériorant pas le signal [3]. Ainsi, pour transformer un signal analogique en un signal numérique, on va donc prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret et permettre, ainsi, sa numérisation.



Echantillonnage idéal

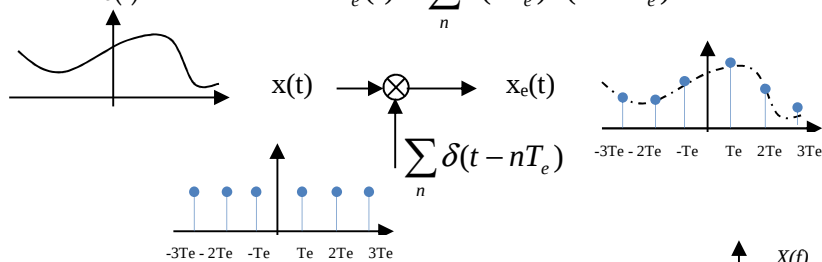
Soit $x(t)$ un signal analogique de transformée de Fourier $X(f)$. Echantillonner le signal $x(t)$ consiste à choisir une fréquence f_e et de construire un nouveau signal avec les $x(nT_e)$ avec n un entier et $T_e = 1/f_e$.

On peut écrire le signal échantillonné $x_e(t)$ sous la forme : $x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \delta(t - nT_e)$

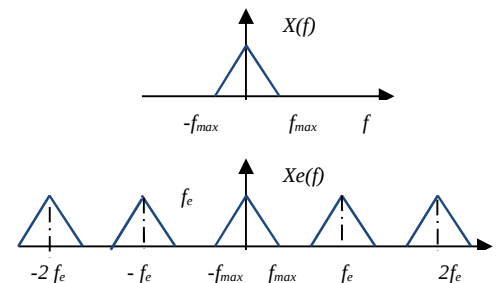
que l'on peut schématiser :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_e),$$

$$\Rightarrow X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$



Cette expression montre que le spectre $X_e(f)$ est périodique de période f_e et qu'il est la somme des répliques (copies) du spectre original $X(f)$ décalées de nf_e . L'échantillonnage dans le domaine temporel se traduit par une "périodisation" de période f_e dans le domaine fréquentiel.



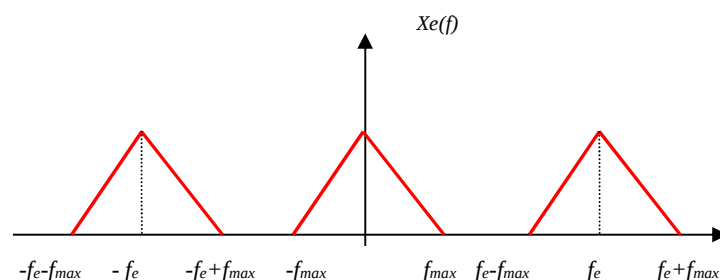
Théorème de Shannon

On considère que $x(t)$ est un signal réel dont le spectre est borné en fréquence, de fréquence maximale $f_{\max}$ soit $\forall |f| > f_{\max} \quad X(f) = 0$

Deux cas de configurations :

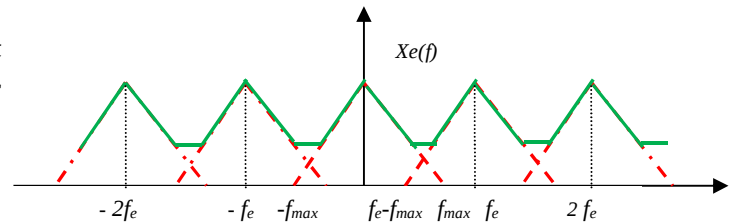
$$- f_e > 2 f_{\max}$$

Les motifs étant disjoints, on peut extraire $X(f)$ grâce à un filtre passe-bas idéal et donc reconstituer parfaitement le signal $x(t)$ à partir des $x_e(t)$.



$$-f_e < 2f_{\max}$$

Les motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ se recouvrent (Repliement de spectres). Il n'est plus possible de récupérer le spectre $X(f)$ par un filtrage approprié.



Remarques : Si le support du spectre $X(f)$ n'est pas borné (s'étale sur l'axe réel) il y a un repliement du spectre des échantillons (aliasing), on ne peut pas isoler le spectre original à partir de celui des échantillons. Dans la pratique, on ne peut pas se contenter de prendre une fréquence d'échantillonnage égale à la fréquence de Nyquist ($2f_{\max}$), mais en prendre une supérieure car on ne peut réaliser un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure très nette. Par exemple, pour numériser la parole dans le réseau téléphonique, on utilise une fréquence d'échantillonnage 8kHz alors que le spectre de la voix est compris entre 300Hz et 3400Hz.

Filtre anti-repliement Les signaux étudiés en réalité sont rarement à support fréquentiel borné, c'est-à-dire que $f_{\max} = \infty$. C'est par exemple le cas d'un signal rectangulaire périodique dont les raies fréquentielles s'étendent à l'infini ou encore un signal bruité. Ceci implique que quelle que soit la fréquence d'échantillonnage il y aura repliement de spectre puisque $f_e > 2f_{\max} = \infty$ est une condition impossible à réaliser. Pour remédier à ce problème, on utilise à l'entrée d'un système numérique un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement ou anti-aliasing. Ce filtre est analogique, idéalisé il doit avoir un gain de 1 sur une bande de fréquence f_e , centrée en zéro. Son rôle va être de limiter le contenu spectral du signal à la partie utile. Il va participer aussi à limiter l'influence du bruit [3].

3. Exercices d'application

1. Soient $x(t) = A \Pi_{\theta}(t)$ et $y(t) = A \Lambda_{\theta/2}(t)$ signal porte et signal triangulaire d'amplitude $A > 0$ et de largeur θ .

- Tracer $x(t)$ et $y(t)$ sur le même graphe
- Utiliser les dérivées pour trouver $X(f)$ et $Y(f)$ qui seront représentés sur le même graphe puis commenter et interpréter les deux graphes pour $A=1$ et $\theta=20$.
- Soit $z(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, tracer $Z(f)$, $Z_1(f)$ la TF de $x(t) \cdot z(t)$ et $Z_2(f)$ la TF de $y(t) \cdot z(t)$ sur le même graphe et comparer $Z(f)$ et $Z_1(f)$ puis $Z(f)$ et $Z_2(f)$.

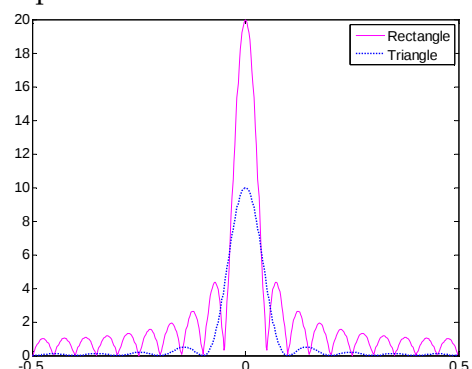
2. Soit le signal $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$, montrer que : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n t/T} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ et déterminer la TF de $x(t)$

3. On échantillonne un signal sinusoïdal de fréquence 200Hz avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 500$ Hz puis avec $f_e = 300$ Hz. Quel signal obtient-on lors d'une reconstruction parfaite dans les deux cas ?

Solutions :

$$1. X(f) = A\theta \operatorname{sinc}(f\theta) \quad Y(f) = A \frac{\theta}{2} \operatorname{sinc}^2(f\theta/2)$$

$$Z(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$



$$Z_1(f) = \frac{A}{2} \theta \sin c(\theta(f - f_0)) + \frac{A}{2} \theta \sin c(\theta(f + f_0)) \quad Z_2(f) = \frac{A}{4} \theta \sin c^2(\theta(f - f_0)) + \frac{A}{4} \theta \sin c^2(\theta(f + f_0))$$

$$3. f_e = 500 \text{ Hz} \Rightarrow x_r(t) = \cos(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0 = 200 \text{ Hz}$$

$$f_e = 300 \text{ Hz} \Rightarrow x_r(t) = \cos(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0 = 100 \text{ Hz}$$

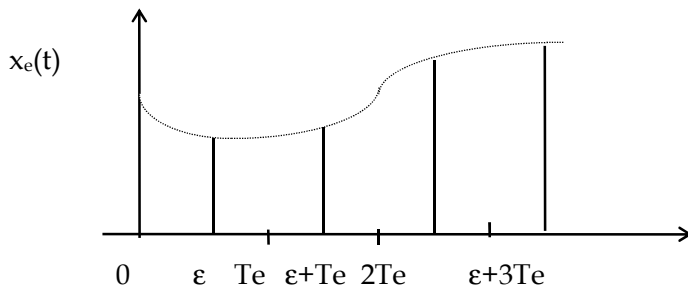
Exercices supplémentaires

$$1. \text{ Soit } h(t) = \begin{cases} 2 + \cos(2\pi t) & |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Déterminer $H(f)$, la transformée de Fourier de $h(t)$
- Esquisser $H(f)$ pour l'intervalle $0 \leq f \leq 3$ et Donner la valeur numérique de $H(f)$ pour $f = 2.5$

Solution $H(f) = 2 \sin c(f) + \frac{1}{2} \sin c(f-1) + \frac{1}{2} \sin c(f+1)$

2. On considère un signal de parole de durée 1mn et ayant une bande passante de 10 kHz échantillonné comme suit :

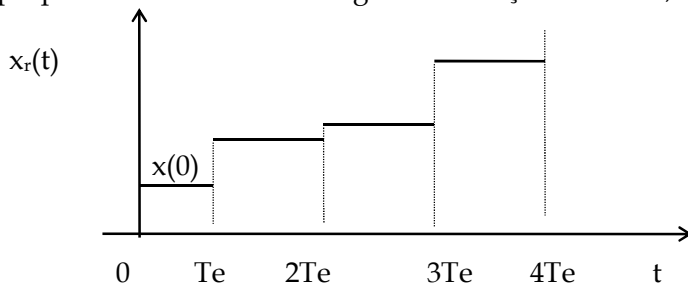


- Calculer le nombre minimal d'échantillons nécessaires pour représenter ce signal.
- Exprimer le signal échantillonné $x_e(t)$ où ε est un retard puis calculer sa TF

On suppose que l'échantillonnage se fait sans retard ($\varepsilon = 0$)

- Exprimer le signal échantillonné et montrer que l'on peut reconstituer théoriquement le signal $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT_e)$.

On se propose de reconstituer le signal de la façon suivante, exprimer $x_r(t)$.



Solution

$$D = 60 \text{ s et } f_{\max} = 5 \text{ kHz} \Rightarrow N_{\min} = D/T_{e\min} = 6.10^5$$

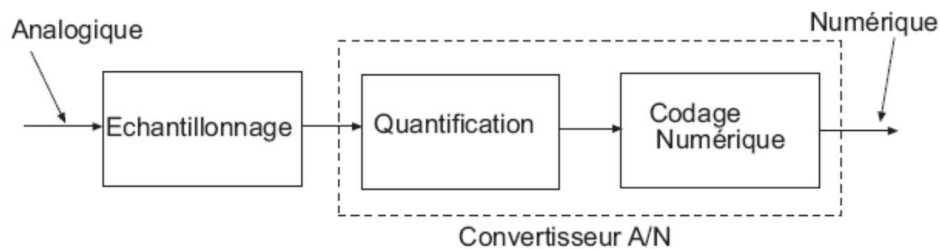
$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e - \xi) \delta(t - nT_e - \xi) \Rightarrow X_e(f) = f_e \sum_n e^{-2\pi j f \xi} X(f - n f_e) \xi=0 \Rightarrow x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

$$\text{Reconstruction théorique} \Rightarrow X_R(f) = X_e(f) \frac{1}{f_e} \pi(f) \Rightarrow x_R(t) = \sum_n x(nT_e) * \text{sinc}(f_e(t - nT_e))$$

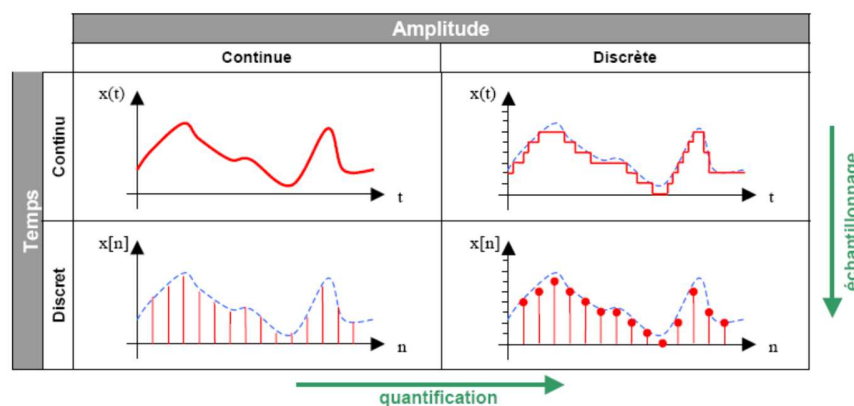
$$\text{Bloqueur d'ordre 0} \Rightarrow x_R(t) = \sum_n x(nT_e) \pi_{T_e}(t - nT_e - T_e/2)$$

I. Analyse temporelle des systèmes linéaires et invariants discrets

La numérisation d'un signal est l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets. Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales : échantillonnage et quantification.



La restitution (ou l'interpolation) constitue le processus inverse qui intervient lors du passage du signal numérique au signal analogique : commande d'un actionneur. Ces trois étapes sont indissociables. En effet, le signal, étant le support physique d'une information, doit conserver au cours de ces modifications tout le contenu informatif initial. Cette condition, ajoutée à la notion de coût limite d'un système, va être à la base de la numérisation des signaux et de l'étude du traitement numérique [1].



Les traitements numériques sont aisément réalisés grâce à des additionneurs, des multiplieurs numériques, et des mémoires. En outre, les systèmes numériques possèdent de nombreux avantages comparés à ceux analogiques, entre autres [2]:

- Simplicité: Les systèmes numériques sont intrinsèquement plus simples à analyser (et donc à synthétiser) que les systèmes analogiques
- Possibilités de traitement accrues: Il est possible de réaliser, en numérique, des opérations beaucoup plus complexes qu'en analogique, notamment des opérations non-linéaires.
- Robustesse aux bruits. Les systèmes numériques sont par essence insensibles aux bruits parasites électromagnétiques. Le transcodage de l'information sous forme numérique joue un peu le rôle de « firewall ».

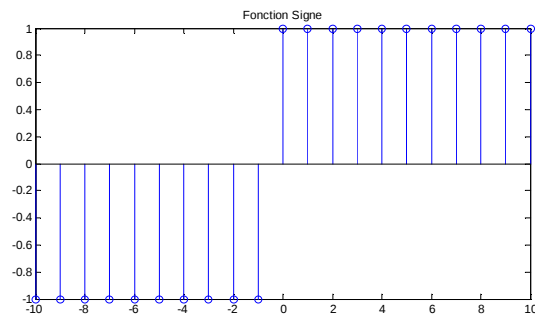
- Précision et stabilité. Puisque les seuls « bruits » sont liés à la précision des calculs, cette dernière dépend uniquement du calculateur utilisé ; elle est insensible à la température et ne varie pas avec l'âge du système.
- Flexibilité. Dans un grand nombre de systèmes numériques, le traitement est défini par un logiciel chargé en mémoire. Il est dès lors très facile de modifier ce traitement, sans devoir modifier la machine qui le réalise.

1. Signaux déterministes à temps discret usuels

Rappelons que les signaux déterministes renferment une information dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique (au contraire des signaux aléatoires/stochastiques). Nous présentons dans cette section quelques fonctions mathématiques supports de signaux élémentaires et utilisées tout au long du cours de traitement du signal numérique. Rappelons qu'un signal à temps discret provient souvent de l'échantillonnage à la cadence $f_e = 1/T_e$, d'un signal $x(t)$ déterministe à temps continu qui est supposé à bande limitée $(-f_e/2, f_e/2)$. Nous noterons $x(n) = x(nT_e)$.

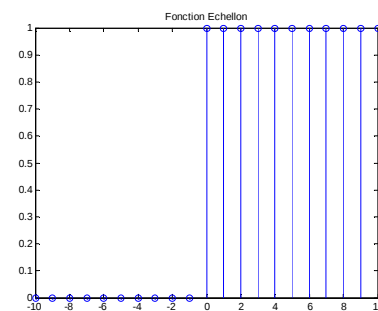
- Fonction signe

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$



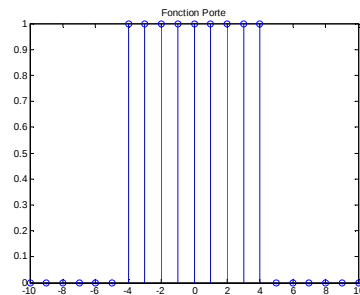
- Fonction échelon (unité)

$$U(n) = \Gamma(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



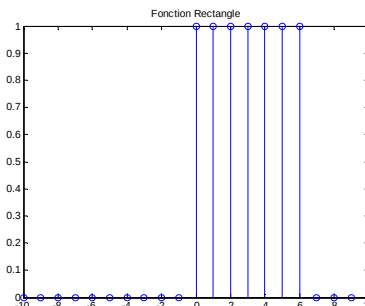
- Fonction porte

$$\Pi_{N+1}(n) = \begin{cases} 1 & -N/2 \leq n \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



- Fonction rectangle causal

$$\text{rect}(n/N) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



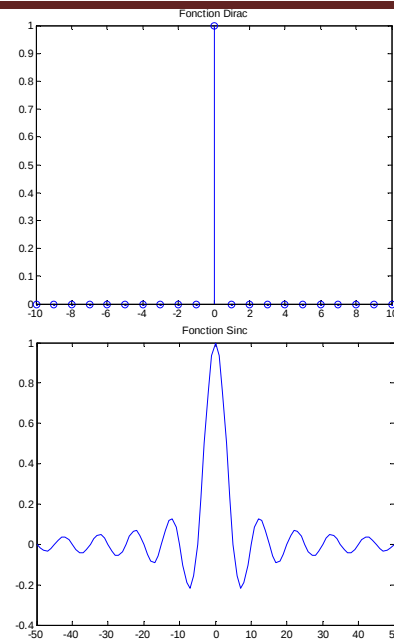
- Fonction Dirac (impulsion unité)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = U(n) - U(n-1)$$

$$\bullet \quad x(n) \cdot \delta(n-n_0) = x(n_0) \quad \bullet \quad x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$$

- Fonction sinus cardinal

$$\text{sinc}(\theta n) = \frac{\sin(\pi \theta n)}{\pi \theta n}$$



2. Energie et puissance

Toute transmission d'information s'accompagne de transferts d'énergie. En effet, les signaux continus ou discrets sont essentiellement caractérisés par l'énergie ou la puissance qu'ils véhiculent. Ce sont les seules grandeurs physiques auxquelles sont sensibles les détecteurs. Beaucoup de capteurs physiques mesurent une énergie ou une quantité quadratique. Par exemple, les capteurs optiques mesurent une intensité, les compteurs d'électricité mesurent une énergie, etc. Compte tenu de la définition fondamentale, l'énergie du signal entre les instants t et $t+dt$ est : $|x(t)|^2 dt$ (puissance instantanée multipliée par le temps).

Soit un signal $x(n)$ à temps discret, tel que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$ existe et converge. Alors le signal est dit à énergie finie et la valeur de cette somme est appelée énergie du signal :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Exemples: $x(n) = \text{Rect}(n/N)$ énergie finie. $x(n) = a$ (constante) et $x(n) = A \sin(2\pi f_0 n)$ ne sont pas à énergie finie

Pour un signal périodique, cette somme ne converge pas. On peut néanmoins définir la puissance d'un signal $x(n)$ périodique de période N par :

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |x(n)|^2$$

Dans le cas général, on parle de signaux à puissance moyenne finie définie par:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |x(n)|^2$$

Exemples: signal continu $x(t)=a$, $A \sin(2\pi f_0 t)$, signaux périodiques, échelon unité, peigne de Dirac.

Il existe des signaux ni périodiques, ni d'énergie finie, pour lesquels la puissance ne peut être définie, comme par

exemple la rampe $x(n)=n$. Il s'agit là de définitions mathématiques, en pratique, un signal mesuré ne l'est jamais sur un intervalle de temps infini. On peut commencer à visualiser un signal à un instant qu'on prendra comme origine des temps, et dans ce cas on arrêtera son examen au bout d'un temps T_{obs} : $E_x = \sum_{n=0}^{N_{obs}} |x(n)|^2$

Remarques Signal à énergie finie $\Rightarrow$ puissance nulle

Signal à puissance finie $\Rightarrow$ énergie infinie

Le calcul de l'énergie ou la puissance permet d'obtenir une première caractérisation du signal. Par ailleurs, la théorie du signal a largement développé des méthodes d'étude basées sur la corrélation pour caractériser le comportement temporel du signal.

Exercice d'application : Calculer l'énergie et la puissance des signaux : $\Pi_7(n)$, $A \cos(2\pi f_0 n)$.

3. Corrélation et auto-corrélation

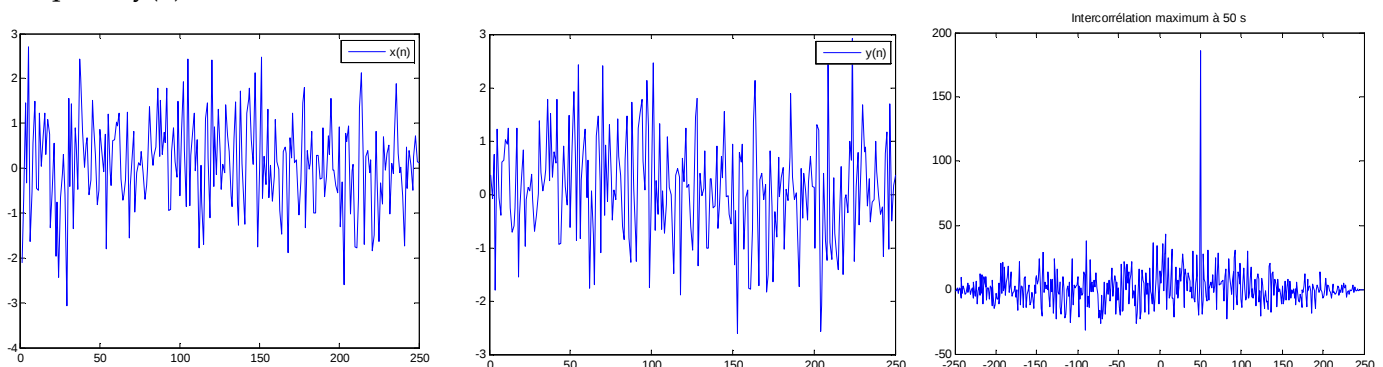
La fonction de corrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage. Considérons $x(n)$ et $y(n)$ deux signaux d'énergie finie, la fonction d'intercorrélation $R_{x,y}(k)$ est définie

$$\text{par: } R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-k)$$

L'inter-corrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ atteint un maximum pour un retard k si $x(n)=y(n-k)$

Pour des signaux à puissance moyenne finie, elle vaut : $R_{xy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=k}^N x(n) y^*(n-k)$

Exemples : Soient un signal aléatoire et sa version décalée de 50s. On remarque que les signaux se ressemblent le plus quand $y(n)$ est décalé de 50 secondes.



Pour l'auto-corrélation, on remplace $y(n)$ par $x(n)$ on obtient l'expression de l'auto-corrélation pour les signaux à énergie finie: $R_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n-k)$

L'auto-corrélation permet de détecter des régularités, des profils répétés dans un signal comme un signal périodique perturbé par beaucoup de bruit (Voir TP n°1)

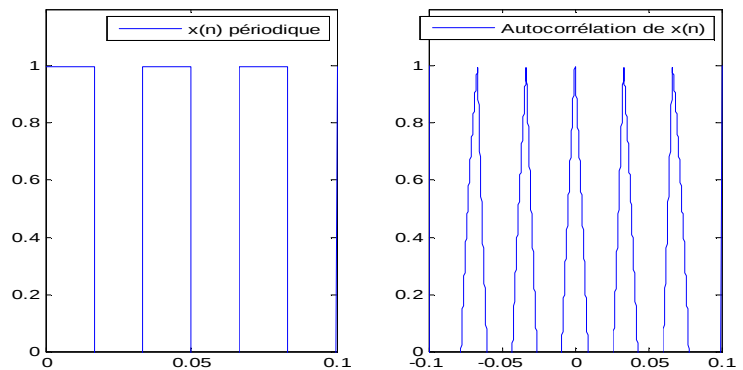
Propriétés :

- Pour $k=0$, on retrouve l'énergie du signal $R_{xx}(0) = E_x$ et $R_{xx}(k)$ est maximale en $k=0$
- Si $x(n)$ est réel, l'auto-corrélation est réelle et paire.
- L'auto-corrélation d'un signal de durée N aura une taille $2*N-1$

Auto-corrélation des signaux périodiques : Le calcul sur une seule période suffit. L'auto-corrélation d'un signal périodique est-elle même périodique. Par définition, le signal périodique ressemble parfaitement à lui-même, décalé d'une ou plusieurs périodes.

- signaux périodiques

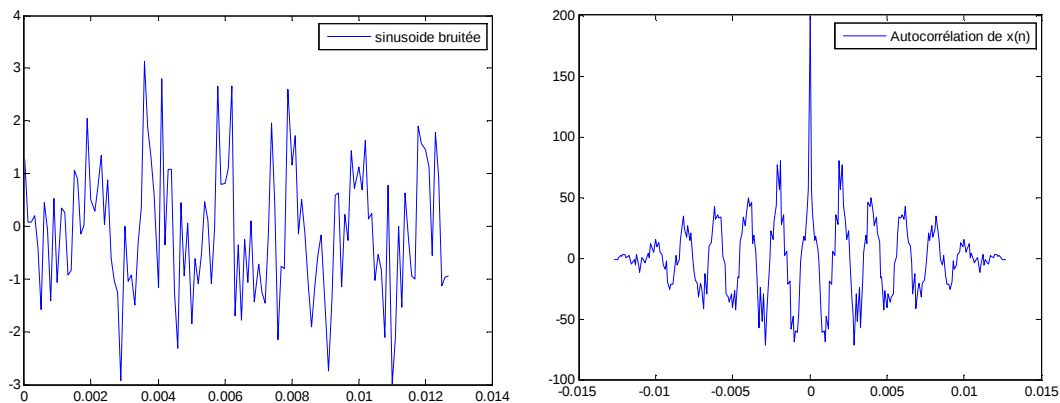
$$R_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-n} x(n) x^*(n-k)$$



Exercice d'application Soit le signal $x(n)=(n+1)$ pour $n=0$ à 3

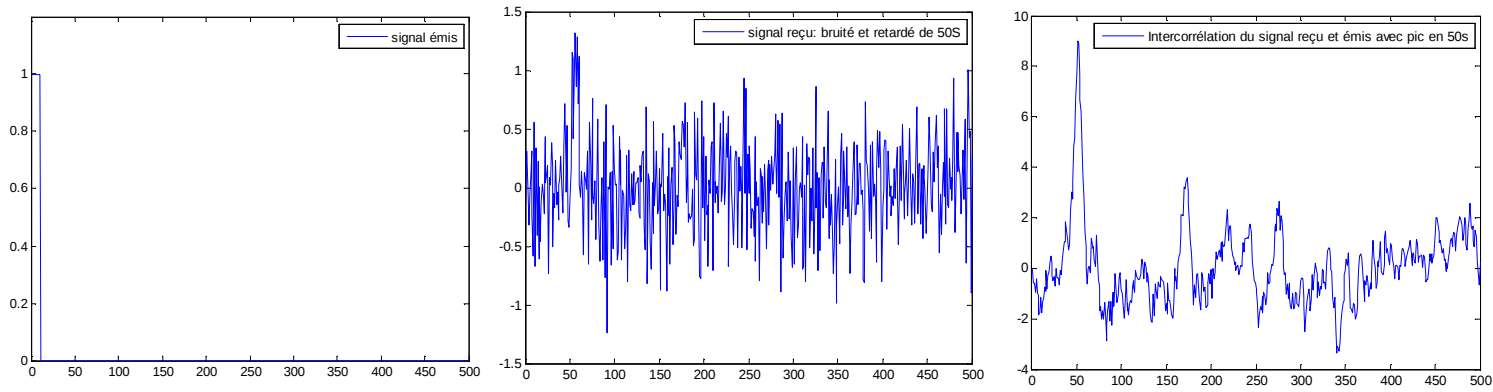
Calculer l'auto-corrélation de x et déduire son énergie

Exemples d'application : Extraction d'un signal noyé dans du bruit, mesure d'un temps ou retard, détection d'un signal périodique (Voir TP n° 1). L'exemple ci-dessous illustre l'auto-corrélation d'un signal sinusoïdal d'amplitude 1 noyé dans du bruit Gaussien de variance 1.



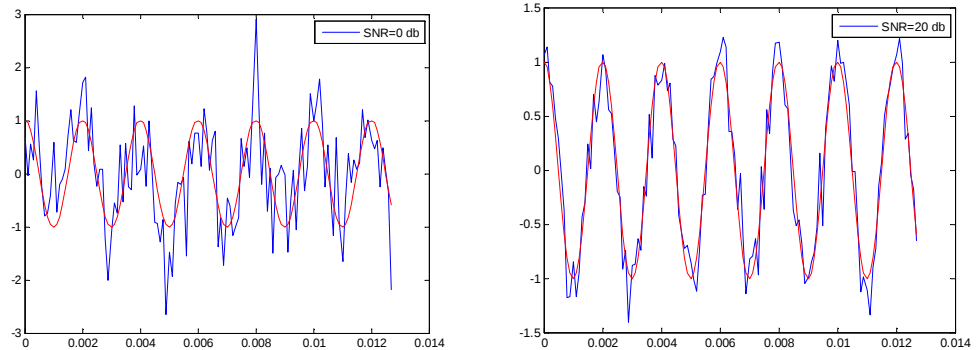
La corrélation est largement utilisée dans les systèmes radar. Ainsi, pour détecter un avion, on envoie une impulsion, puis on reçoit une version retardée, atténuée et bruitée de cette impulsion. L'intercorrélation du signal reçu et émis présentera un pic à l'instant correspondant au retard.





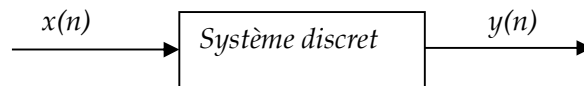
Remarques : La notion de bruit est relative, elle dépend du contexte. Le rapport signal/bruit désigne la qualité de la transmission d'une information par rapport aux parasites. Il est défini par:

$$\text{SNR}_{\text{db}} = 20 \log(P_S/P_B)$$

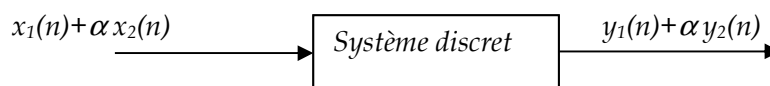


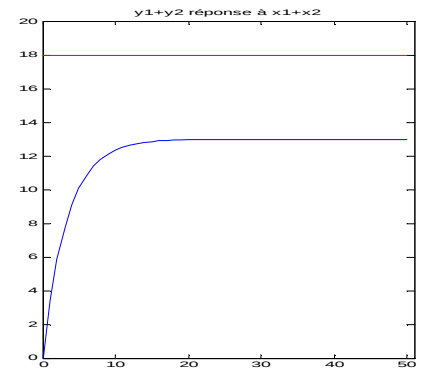
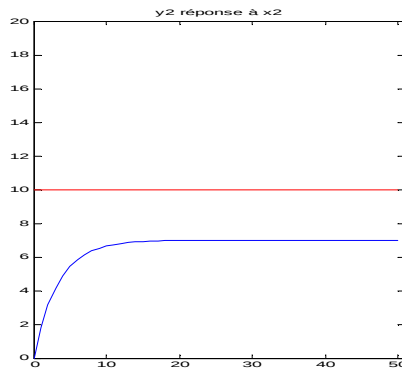
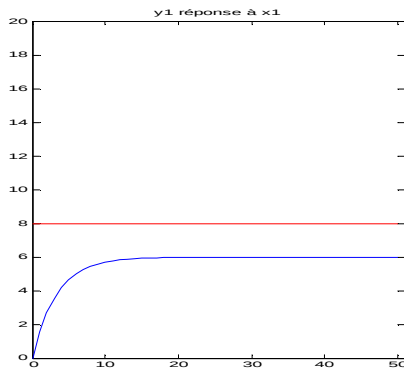
4. Théorie des systèmes linéaires et invariants discrets (SLID)

Un système linéaire est un modèle de système qui applique un opérateur linéaire à un signal d'entrée. C'est une abstraction mathématique très utile en automatique, traitement du signal, mécanique et télécommunications. Les systèmes linéaires sont ainsi fréquemment utilisés pour décrire un système non linéaire en ignorant les petites non-linéarités. Un système est *discret*, si à la suite d'entrée discrète $x(n)$ correspond une suite de sortie discrète $y(n)$.

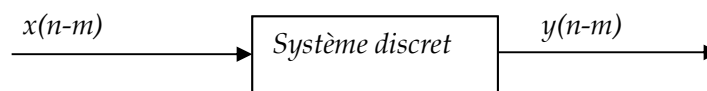


- Si l'entrée $x(n)$ produit une sortie $y(n)$, quand on applique une entrée $k \cdot x(n)$, la sortie sera $k \cdot y(n)$. Si deux entrées $x_1(n)$ et $x_2(n)$ engendrent deux sorties $y_1(n)$ et $y_2(n)$ alors $x_1(n) + x_2(n)$ engendrera $y_1(n) + y_2(n)$



Exemple

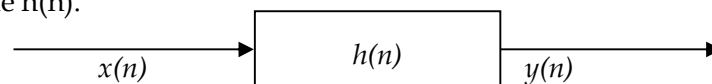
- S'il y a invariance dans le temps, une translation de l'entrée ($x(n) \Rightarrow x(n-m)$) se traduira par une même translation dans le temps de la sortie ($y(n) \Rightarrow y(n-m)$).



Si le système est invariant, cela implique que le système réagit de la même façon quel que soit l'instant auquel nous appliquons ses excitations. Cette propriété exprime que la caractéristique du système ne dépend pas de l'origine du temps, on parle encore de stationnarité.

Convolution

Si les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionnelle $h(n)$.



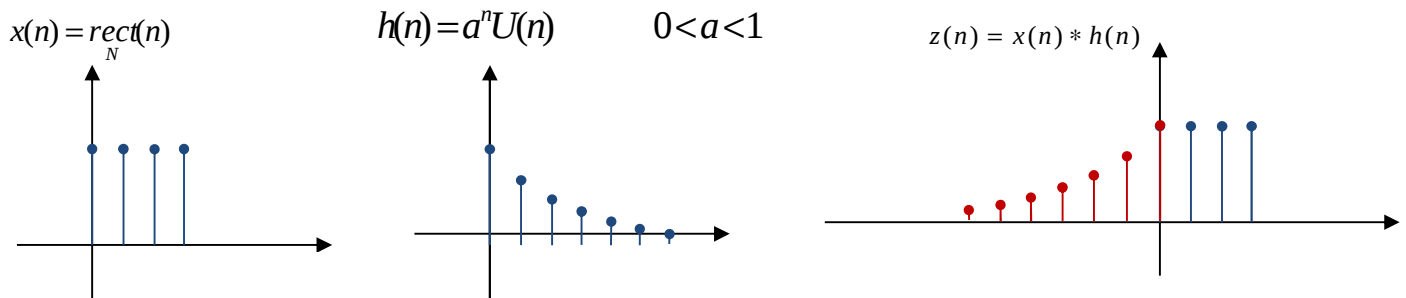
On peut en déduire l'effet d'une entrée quelconque sous la forme d'une convolution. Cette dernière est l'opération de traitement de signal la plus fondamentale. Elle indique que la valeur du signal de sortie à l'instant n est obtenue par la sommation (intégrale) pondérée des valeurs passées du signal d'excitation $x(n)$. La fonction de pondération est précisément la réponse impulsionnelle $h(n)$:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

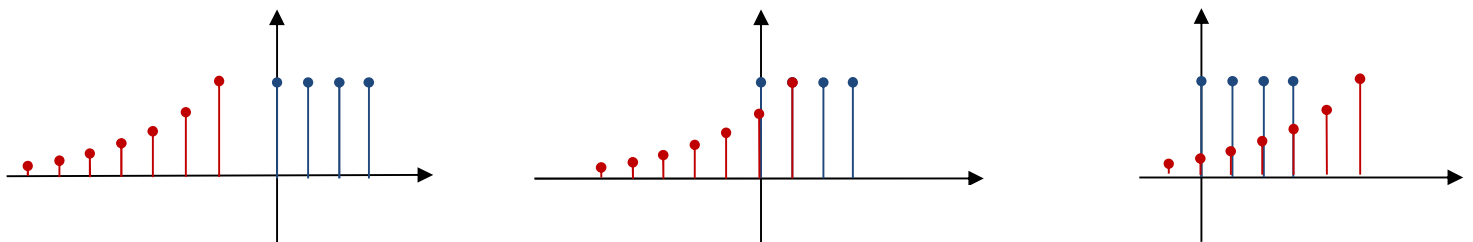
La réponse impulsionnelle $h(n)$ est le signal qu'on obtient en sortie $y(n)=h(n)$ si on applique en entrée une impulsion "de Dirac" $x(n)=\delta(n)$. Le Dirac est l'élément neutre de l'opération de convolution:

$$\delta(n) * x(n) = x(n)$$

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la somme du produit $x(m)h(n-m)$. Le signal $h(n-m)$ est simplement le signal initial $h(m)$, retourné dans le temps pour donner $h(-m)$ puis translaté de n . En calculant alors l'ensemble des produits obtenus en faisant « glisser » h , c'est-à-dire pour tous les décalages de n , on obtient le produit de convolution pour tout n .

Exemple 1:

On distingue 3 cas :



$$n < 0 \Rightarrow z(n) = 0$$

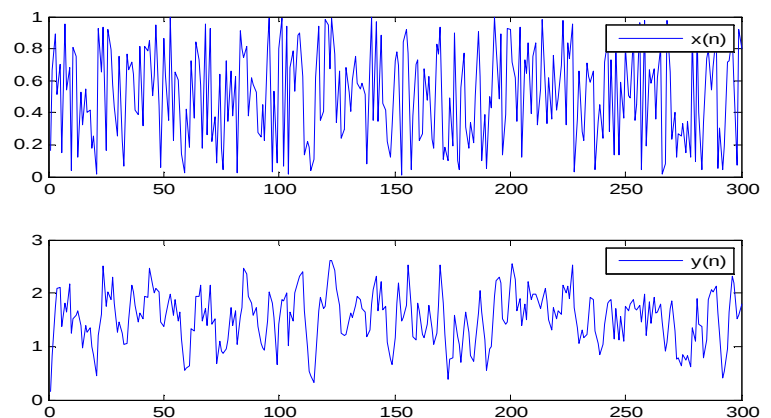
$$0 \leq n \leq N-1 \Rightarrow z(n) = (a^{n+1} - 1) / (a - 1)$$

$$n > N-1 \Rightarrow z(n) = a^{n-N+1} (1 - a^N) / (1 - a)$$

Exemple 2 :

$$h(n) = \frac{1}{N+1} \Pi_{N+1}(n) \Rightarrow y(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=-N/2}^{N/2} x(n+m)$$

(Voir TP n°1)



Exemple 3: Soit le signal $x(n) = \{2, -1, 3\}$ et $h(n) = \{1, 2, 2, 3\}$

Calculer $y(n) = x(n) * h(n)$

Pour des séquences finies, on peut utiliser la méthode des colonnes

$$Y(n) = \{2, 3, 5, 10, 3, 9\}$$

$h[n]$	=	1	2	2	3
$x[n]$	=	2	-1	3	
		2	4	4	6
			-1	-2	-2
				3	6
					6
		2	3	5	10
					3

Remarques:

- Les opérations de corrélation et convolution sont liées. Mathématiquement, on peut écrire une relation qui permet d'exprimer la fonction de corrélation comme un produit de convolution (et réciproquement).

En effet: $R_{xy}(k) = x(n) * y^*(-n)$

On peut donc considérer l'opération d'un SLI comme une mesure de la corrélation entre deux signaux ($x^*(-n)$ et $h(n)$). En fait, le signal de sortie est "construit" à partir des composantes fréquentielles communes au signal d'entrée et à la réponse impulsionnelle.

- Si on applique à un SLIT une entrée sinusoïdale réelle ou complexe de fréquence f_0 , alors, la sortie sera une sinusoïde dont l'amplitude et la phase pourront être modifiées mais qui conservera la même forme (une sinusoïde) et la même fréquence f_0 . On dit que les sinusoïdes sont les fonctions propres des SLIT.

- Un système linéaire invariant est un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par une

équation aux différences :
$$\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i),$$

5. Stabilité et causalité d'un SLID

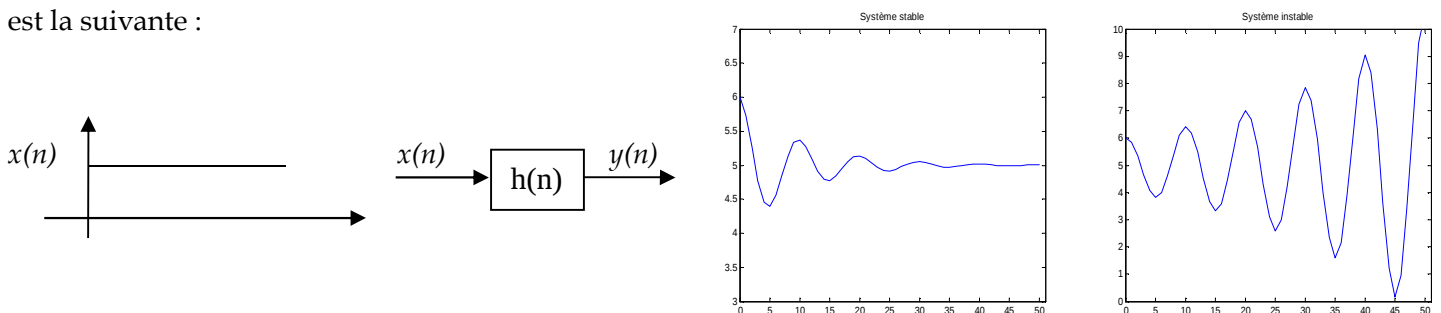
Une contrainte importante pour la formalisation de nombreux problèmes est de respecter la notion de *causalité* (les effets ne peuvent pas précéder la cause). Dans le cas des SLIT, cette causalité se traduit par le fait que pour: $h(n) = 0$ pour $n < 0$.

$$x(n) = 0, n < n_0 \text{ alors } y(n) = 0, n < n_0 \quad \Rightarrow \quad h(n) = 0, n < 0, y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{+\infty} x(n-m)h(m),$$

- si h et x sont causaux $y(n) = \sum_{m=0}^n h(n-m)x(m)$

Remarque : Nous pouvons envisager mémoriser les signaux d'entrée et faire un traitement de ceux-ci en temps différé, les systèmes utilisés ne sont plus alors nécessairement causaux car pour élaborer la sortie à l'instant n_i , nous disposons en mémoire des entrées aux instants suivants. C'est souvent le cas en traitement d'image, en traitement de parole effectué après mémorisation du signal à traiter.

Une autre notion fondamentale est la *stabilité* des systèmes. La propriété de stabilité des systèmes bouclés est non seulement une performance mais une exigence pour le bon fonctionnement d'une boucle d'asservissement ou de régulation. Une boucle instable est une boucle inutilisable. La définition la plus courante de cette stabilité est la suivante :



On dit qu'un système est stable si, en lui appliquant une entrée bornée quelconque, la sortie reste bornée, ce qui implique dans le cas des SLIT:
$$\sum_n |h(n)| < \infty$$

6. Filtres à réponses impulsionnelles finies ou infinies (RIF et RII)

- Si les a_i sont $\neq 0$, le système est dit récursif (RII), il est non récursif s'il ne dépend que des $x(n-i)$ (RIF)

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée finie (RIF), alors : $y(n) = \sum_{m=0}^K h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, le système numérique est une fenêtre centrée sur les K plus récents échantillons.

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII) : $y(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, il est nécessaire de connaître tous les échantillons présents et passés, le système a une mémoire de longueur infinie.

Exemple 1 $y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+\dots+a_kx(n-k)$ est l'équation aux différences finies d'un filtre RIF

avec comme réponse impulsionnelle $h(n)=\delta(n)+a_1\delta(n-1)+a_2\delta(n-2)+\dots+a_k\delta(n-k)$ qui, on peut le constater, est bien finie.

Exemple 2 $y(n)=x(n)+a_1y(n-1)$ est l'équation aux différences finies d'un filtre RII

avec $y(n-1)=x(n-1)+a_1y(n-2) \Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2y(n-2)$

de même $y(n-2)=x(n-2)+a_1y(n-3) \Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2x(n-2)+a_1^3y(n-3)$

$\Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2x(n-2)+a_1^3x(n-3)+\dots+a_1^m y(n-m)$

En poursuivant le procédé à l'infini $y(n)$ dépend d'une infinité de $x(n-k)$ ce qui en fait un filtre RII.

Exemple d'application

Les séquences $x(n)$ (réel) et $y(n)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie d'un système discret. Pour chaque cas, identifiez celles représentant

a) des systèmes linéaires, b) des systèmes causals, c) des systèmes invariants aux translations de n , d) des systèmes assurément ou possiblement stables (en fonctions des constantes)

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|---|
| 1. $y(n) = x(n) + bx(n-1)$ | 2. $y(n) = x(n) + bx(n+1)$ | 6. $y(n) = b^{x(n)}$ b : constante réelle |
| 3. $y(n) = nx(n)$ | 5. $y(n) = x(n)e^n$ | 7. $y(n) = x(n) $ |
| 4. $y(n) = x(n) \sin(2\pi f_0 n)$ | N : constante entière | |

a) Tous sauf 6 et 7

b) Tous sauf 2

c) Les systèmes 1, 2, 6 et 7

d) 1 (b finie), 2 (b finie), 4, 6 (b finie) et 7.

Série 1

1. Représenter les signaux suivants:

$$\prod_N(n-1), n.U(n), (n-2).U(n-3), (-n+3)U(n-2)U(-n+3), e^{-an}.U(n-1)$$

2. Donner l'expression du signal échelon $U(n)$ en fonction du signal signe $\text{Sgn}(n)$.

3. Donner l'expression du signal $x(n) = \text{Arect}[(n-n_0)/N+1] = A \prod_{N+1}(n-n_0)$ à l'aide du signal signe seulement.

Justifier graphiquement la solution trouvée (N supposé pair).

4. Les signaux suivants sont-ils à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un, ni l'autre ? Calculer, dans chaque cas, l'énergie totale et la puissance moyenne totale ($a > 0$).

• $\text{Arect}(n/N+1)$	$\text{Asin}(2\pi f_0 n)$	$\text{Asin}(2\pi f_0 n).U(n)$	$U(n)$
• $n.U(n)$	$Ae^{-an}u(n)$	Ae^{-an}	

5. Calculer l'autocorrélation des signaux suivants

• $\text{Arect}(n/N)$	$\text{Asin}(2\pi f_0 n)$	$5 \delta_N(n)$	$B \cos(2\pi f_0 n)$
-----------------------	---------------------------	-----------------	----------------------

6. Calculer la sortie $y(n)$ lorsque : $x(n) = \delta(n-n_0) + \delta(n-n_1)$ et $h(n) = e^{-an}$

7. Soit le signal échelon $f(n) = E_0 U(n)$, d'amplitude E_0 . Représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de $f(n)$ par lui-même (auto-convolution).

8. La fonction triangulaire est définie de la manière suivante:

$$E^2 N \Lambda_N(n) = \begin{cases} E^2(n+1+N) & -N \leq n \leq 0 \\ -E^2(n-1-N) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Vérifier analytiquement et graphiquement la relation $E^2 N \Lambda_N(n) = E \Pi_{N+1}(n) * E \Pi_{N+1}(n)$, en déduire l'autocorrélation du signal et son énergie (devoir à rendre)

Solutions

2. $U(n) = 1/2(\text{sgn}(n)+1)$

3. $x(n) = A/2 [\text{sgn}(n-(n_0-N/2)) - \text{sgn}(n-(n_0+N/2+1))]$

4. $E = A^2(N+1)$ $P_m = 0$, $E = \infty$ $P_m = A^2/2$, $E = \infty$ $P_m = A^2/4$, $E = \infty$ $P_m = 1/2$

$E = \infty$ $P_m = \infty$, $E = A^2/(1-e^{-2a})$ $P_m = 0$, $E = \infty$ $P_m = \infty$, $E = 2A^2N(1+N)$ $P_m = 0$

5. $A^2 N \Lambda_N(k)$ $A^2/2 \cos(2\pi f_0 k)$ $25 \delta_N(k)$ $B^2/2 \cos(2\pi f_0 k)$

6. $x(n) = e^{-a(n-n_0)} + e^{-a(n-n_1)}$

7. $f(n)*f(n) = E_0^2(n+1)$ pour $n \geq 0$ et 0 ailleurs

Exercices supplémentaires

1. Représenter les signaux suivants:

$$\prod_N(n-1), n.U(n), (n-2).U(n-3), (-n+3)U(n-2)U(-n+3), e^{-an}.U(n-1)$$

2. Etudier la linéarité, la causalité, l'invariance et la stabilité des systèmes définis par les équations aux différences suivantes :

	Linéarité	Invariance	Causalité	Stabilité
$y(n) = 2 \cdot x(n-1)$				
$y(n) + y(n+1) = 2 x(n+1)^2$				
$y(n) = x(n-1) - 0.5x(n+1) $				
$y(n) = 1/e^n \cdot x(n)$				

3. Soient $x_1(n) = e^{-a \cdot n} \cdot U(n)$ et $x_2(n) = e^{-b \cdot n} \cdot U(n)$

Calculer $x_1(n) * x_2(n)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^+$ et $a > b$

Solution:

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ e^{-bn} \frac{1 - e^{(b-a)n+1}}{1 - e^{(b-a)}} & n > 0 \end{cases}$$

4. Calculer et esquisser graphiquement pour les cas $n_0 < n_1$ et $n_0 > n_1$ le produit de convolution $z(n) = x(n) * y(n)$ pour les cas suivants :

• $X(n) = A[\delta(n+n_0) + \delta(n-n_0)]$ et $Y(n) = B \delta(n) + 1/2B[\delta(n+n_1) + \delta(n-n_1)]$

Solution : $X(n) * Y_1(n) = AB[\delta(n+n_0) + \delta(n-n_0)] + AB/2[\delta(n+n_0+n_1) + \delta(n-n_0-n_1) + \delta(n-n_0+n_1) + \delta(n-n_0-n_1)]$

5. Soient $x(n)$ et $h(n)$ deux signaux numériques provenant respectivement de l'échantillonnage d'un signal x et de la réponse impulsionnelle h d'un système :

$x(n) = \{0, 0, 0, 0.5, 1.5, 0.5, 1.5, 0, 0\}$ et $h(n) = \{0.5, 0.5\}$

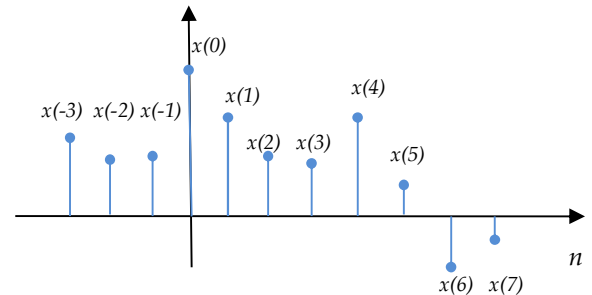
- Calculer l'énergie de chaque signal
- Calculer et tracer l'autocorrélation de $h(n)$
- Calculer la séquence y résultant de la convolution numérique $x(n) * h(n)$.
- Interpréter ces résultats du point de vue des plages de fréquences éliminées et conservées.
- Quel est le signal d'entrée qui permettrait de connaître le signal $h(n)$?
- Proposer un signal $h(n)$ permettant de réaliser un filtrage passe haut du signal $x(n)$

TP n°1 : Analyse temporelle des SLID

Convolution, Energie, Puissance et Corrélation

I. Rappels

Un signal discret $s(n)$ est une suite de N échantillons régulièrement espacés de T_e secondes: $x(0), x(T_e), x(2T_e), \dots, x((N-1)T_e)$ où $F_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage. Le tracé graphique d'un signal discrétisé en temps peut s'effectuer simplement à l'aide de la fonction `stem` sous matlab.



- L'énergie d'un signal $x(n)$ est fournie sous matlab par `sum(x.^2)`. Concernant la puissance moyenne, il faut diviser l'énergie par le nombre d'éléments de $x(n)$.
- Pour la corrélation et la convolution, on utilisera, respectivement, les fonctions `xcorr` et `conv`. A noter que la convolution ou la corrélation de x et h de durée respective N et M est un signal $y(n)$ de durée $(N+M-1)$
- La fonction `b=m+s*randn(N,1)` permet de générer un vecteur bruit b de distribution pseudo normale (Gaussienne) de taille N de moyenne m et de variance s^2 dont la puissance est $P_s = m^2 + s^2$.

II. Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : $\delta(n) = 1$ pour $n=0$ et vaut 0 ailleurs

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-10:10;
x=[zeros(1,10),1,zeros(1,10)];
stem(t,x);
axis([-10 10 -0.5 1.5]);
title('Dirac');
xlabel('n'); ylabel('Amplitude');
```

2. Le programme suivant permet de générer un échelon $U(n)=1$ pour $n \geq 0$ et 0 pour $n < 0$

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-20:20;
x=[zeros(1,20),ones(1,21)];
stem(t,x);
title('Echelon unite');
xlabel('n'); ylabel('Amplitude');
```

3. Pour générer $N=128$ échantillons d'une sinusoïde de fréquence $f_0=1000$, on peut procéder de la façon suivante, choisir une fréquence d'échantillonnage : $F_e = 8000$ (le pas de temps $T_e=1/F_e$) Créer le vecteur des temps : $t = (0:N-1)T_e$. Calculer les échantillons: $x = \cos(2\pi f_0 t)$; Puis, regarder le résultat : `plot(x)` ou `plot(t,x)`.

Ce qui nous donne :

```
clc ; clear all ; close all ;
N=128; fo=1000; Fe=8000; Te=1/Fe;
t=(0:N-1)*Te; x=cos(2*pi*fo*t);
plot(t,x);
figure; plot(x);
figure; stem(t,x)
```

III. Programmes à réaliser

1. Le programme suivant permet de créer une porte de largeur 2s, centrée en 3 s, d'amplitude 4, échantillonnée avec $T_e=0.1s$ avec $N=40$ et de calculer son auto-corrélation et son énergie.

```
clc; clear all; close all;
Te=0.1; N=50; A=4;
t=(0:1:N-1)*Te;
porte=A*[zeros(1,15),ones(1,20),zeros(1,15)];
subplot(2,2,1); plot(t,porte);
subplot(2,2,2); stem(t,porte);
y1= xcorr(porte); tt=(-N+1:1:N-1)*Te;
subplot(2,2,3); plot(tt,y1);
y2=Te* xcorr(porte);
subplot(2,2,4); plot(tt,y2);
Energie1=sum(porte.^2)
Energie2=sum(porte.^2)*Te
```

- Quelle est la différence entre plot(x) et plot(t,x)?
- Quelle est la différence entre plot et stem?
- Utiliser le workspace pour visualiser la taille et le contenu des vecteurs t, tt, porte et y. Commenter
- Calculer l'auto-corrélation théorique. Comparer y1 et y2.
- Retrouve-t-on les propriétés de l'auto-corrélation?
- Calculer l'énergie théorique et comparer avec Energie 1 et Energie2.

2. Commenter le programme suivant :

```
clear all; close all; clc;
N=500; x=zeros(N,1); x(1:10)=1;
figure; plot(x); axis([0 N 0 1.2]); legend('signal émis');
y=circshift(x,50);
y=y+0.4*randn(N,1);
figure; plot(y); legend('signal reçu: bruité et retardé de 50s')
z=xcorr(y,x); z=z(N:end);
figure; plot(z);
```

- Induire un autre retard et observer.
- Changer la puissance du bruit et commenter.
- Donner un exemple d'application de ce programme.

3. Soit le programme ci-dessous

```
clear all; close all; clc;
N=300; T=3;Te=1;
X=rand(N,1); t_x=(0:N-1)*Te;
h=(1/T)*ones(T,1);t_h=(0:T-1)*Te;
subplot(3,1,1); plot(t_x,X); subplot(3,1,2); stem(t_h,h,'r');
Y=conv(X,h); t_y=(1-T:N-1)*Te;
subplot(3,1,3); plot(t_y,Y); axis([0 N min(Y) max(Y)]);
```

- Commenter le programme. Changer la valeur de T et observer.
- Comment nomme-t-on le signal h? Quel est son rôle?

4. Générer et visualiser le signal x composé de 50 échantillons d'une sinusoïde de fréquence $f_0=0.1$ avec $f_e=10.f_0$

- Calculer et afficher son auto-corrélation et comparer avec l'auto-corrélation théorique.
- Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence) à partir de l'auto-corrélation.
- Générer le signal $z=x+b$ ou b est un bruit avec ($m=0$, $s=0.5$).
- Calculer et visualiser l'auto-corrélation de z pour $s=0.5$, $s=1$ puis $s=2$ en commentant.
- Retrouver dans chacun des cas précédents la fréquence du signal à partir de l'auto-corrélation de z .

II. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Dans la réalité, les signaux n'ont pas toujours une forme simple en raison de la nature de l'information qu'ils portent. Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile. Pour cela, on fait appel à la transformée de Fourier. Elle a pour but de mettre en évidence des caractéristiques du signal non évidentes dans la représentation temporelle : les propriétés fréquentielles (spectrales). L'utilisation de cette description fréquentielle permet en outre de caractériser simplement les filtres linéaires, et faciliter leur étude.

Dans le but de calculer la transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$ à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille finie, on est amené à discrétiser le signal (échantillonnage), à tronquer temporellement ce signal et à discrétiser sa transformée de Fourier[1].

1. Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Lorsque le signal à traiter n'est plus analogique mais numérique, la relation de la TF devient :

$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$\Rightarrow X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) e^{-2\pi j f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f nT_e}$$

L'échantillonnage périodise le spectre du signal avec une période de répétition f_e ainsi $X_e(f) = X_e(f + f_e)$, par ailleurs, l'amplitude est multipliée par un facteur f_e . Sachant que tout signal périodique peut être décomposé en séries de Fourier, on a :

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-2\pi j n T_e f} \quad \text{Avec} \quad x(nT_e) = C_n = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X_e(f) e^{2\pi j n T_e f} df$$

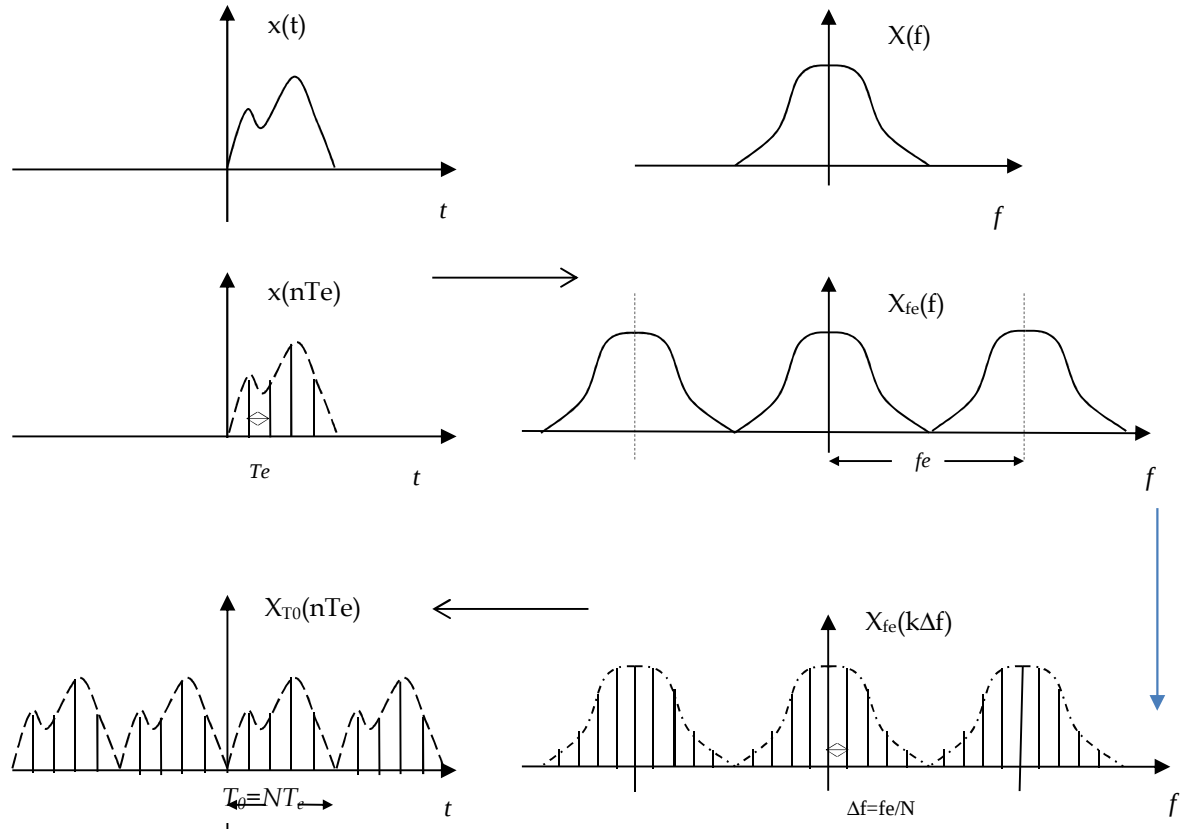
Cette transformée de Fourier appliquée aux signaux discrets est donc une fonction **à fréquence continue**, périodique de période f_e . Il est d'usage de la représenter sur un intervalle de longueur f_e , de $-f_e/2$ à $+f_e/2$.

Cependant, si on veut calculer la TF d'un signal discret à l'aide d'un calculateur, on se retrouve confronté aux problèmes suivants : Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures $x(n)$ (pas toujours possible dans la pratique : contraintes temps réel, etc.). En outre, le calculateur ne peut calculer une TFTD car sa réponse fréquentielle est forcément discrète = un nombre fini de points fréquentiel alors que f varie continûment [5]. La solution est de limiter la durée de $x(n)$ i.e. considérer un nombre fini N de points temporels et de discrétiser la fréquence (considérer un nombre fini L de points fréquentiels) d'où la TFD.

2. Transformée de Fourier discrète (TFD)

Cette transformée, popularisée par son calcul rapide (TFR ou FFT : Fast Fourier Transform), fait correspondre une suite de N valeurs à une autre de suite de N valeurs numériques également.

On considère un signal numérique $s(n)$ défini par N échantillons temporels, obtenus par échantillonnage avec la période T_e . La numérisation du signal $X(f)$ passe par l'échantillonnage de $X(f)$. On divise l'intervalle f_e par N, ainsi $X(f)$ est échantillonné à la cadence $\Delta f = f_e/N = 1/NT_e$. Ce dernier résultat entraîne une périodicité du signal temporel de $T_0 = 1/\Delta f = NT_e$.



Sachant que $f_e = N \cdot \Delta f$, f devient $k\Delta f$, les formules précédentes donnent:

$$X_e(kf_e / N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n T_e k f_e / N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n k / N} = X_e(k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi j n k / N} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_k e^{2\pi j n k / N} \end{cases}$$

Et $x(n) = \frac{1}{f_e} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_e(k) e^{2\pi j n k / N} \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_e(k) e^{2\pi j n k / N}$

Ce qui nous permet d'obtenir la TFD et la TFD inverse :

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n k / N} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{2\pi j n k / N} \end{cases}$$

On remarquer aisément que l'on perd toute notion de temps relatif aux échantillons. Nous obtenons au final une relation entre une suite indexée par une variable entière n et une suite indexée par k . Les N termes $X(k)$ correspondent à une approximation (à un facteur multiplicatif T_e près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $k \Delta f$, avec k entre 0 et $N-1$, c'est-à-dire f entre 0 et f_e .

Exemple

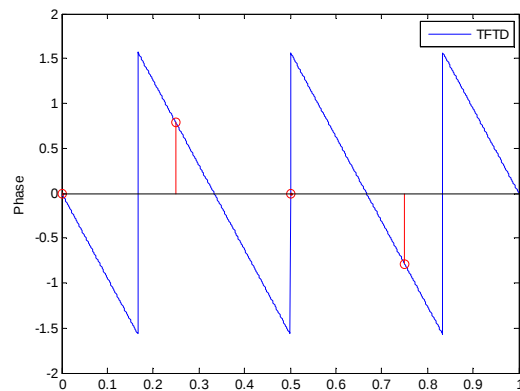
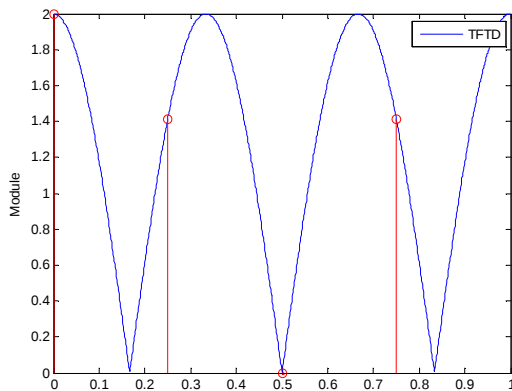
Soit le signal $x(n) = 1$ pour $n = 0$ et $n = 3$ et 0 ailleurs.

- Calculons d'abord la TFTD, ce qui nous donne $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f n T_e} = 1 + e^{-6\pi j f T_e} = 2 \cos(3\pi f T_e) e^{-3\pi j f T_e}$

- Calcul maintenant la TFD sur $N=4$ échantillons (4 échantillons de la TFD à partir de 4 échantillons du signal)

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-2\pi j n k / 4} = \begin{cases} \sum_{n=0}^3 x(n) e^0 = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 2 \\ \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-\pi j k / 2} = x(0) + x(1) e^{-\pi j / 2} + x(2) e^{-\pi j} + x(3) e^{-3\pi j k / 2} = 2 \cos(3\pi / 4) e^{-3\pi j / 4} \\ \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-\pi j n k} = 2 \cos(3\pi / 2) e^{-3\pi j / 2} \\ \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-3\pi j n k / 2} = 2 \cos(9\pi / 4) e^{-9\pi j / 4} \end{cases}$$

Modules des 4 échantillons de $X(k)$: $2, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

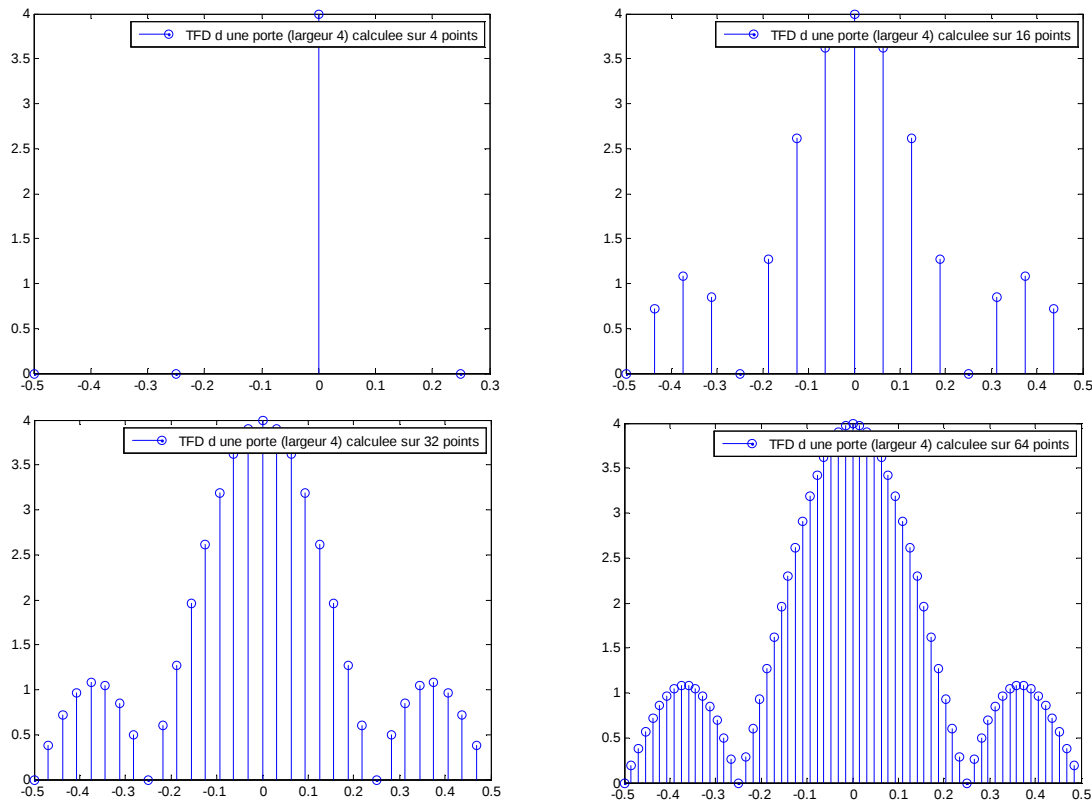


On peut observer que les quatre échantillons de la TFD (en rouge) se superposent à la courbe de la TFD (en bleu). On confirme que la TFD n'est que l'échantillonnage de la TFD limitée à N . On note en outre, que la précision fréquentielle est de $\Delta f = f_e / N$. Pour améliorer cette précision, il faudrait diminuer le pas en fréquence.

Remarque $x(n)$ est périodique de période N et $X(k)$ est aussi périodique de période N :

$$x(n+N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi(n+N)k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi n k}{N}} e^{j \frac{2\pi N k}{N}} = s_n$$

Sachant que $x(n)$ et $X(k)$ sont calculés sur le même nombre de points N , on peut augmenter la précision, par la technique du zéro-padding : on calcule la TFD sur un nombre NF pouvant être bien plus grand que le nombre de points N disponible du signal ($NF \gg N$). La figure suivante en donne un exemple (Voir TP n°2).



Autres propriétés : Toutes les propriétés se déduisent des propriétés de la transformée continue en se rappelant que chaque signal manipulé, de durée finie, doit être considéré comme une période d'un signal périodique, et cela en temps et en fréquence. La conséquence en est que la translation d'un signal (lors d'une convolution ou de corrélation) se traduit par un décalage circulaire [6]

o Linéarité : $ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{TFD} aX_1(k) + bX_2(k)$

o Décalage temporel : $x(n-m) \xrightarrow{TFD} X(k)e^{-\frac{2\pi j k m}{N}}$

o Décalage fréquentiel : $x(n)e^{\frac{2\pi j k_0 n}{N}} \xrightarrow{TFD} X(k-k_0)$

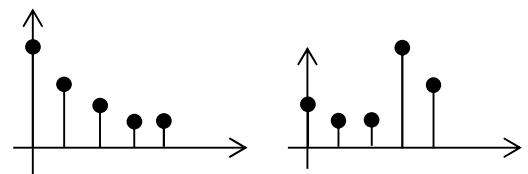
o Dualité temps-fréquence : $x(n) \xrightarrow{TFD} X(k) \Rightarrow X(n) \xrightarrow{TF} N.x(-k)$

o Changement d'échelle : $x(an) \xrightarrow{TFD} \frac{1}{|a|} X(k/a)$

o Convolution périodique : $x(n) * h(n) \xrightarrow{TFD} X(k).H(k)$

o $\delta(n) \xrightarrow{TFD} 1$ $\delta(n-m) \xrightarrow{TFD} e^{-2\pi j k m / N}$

o Par ailleurs, l'énergie se conserve: $\sum_0^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |X(k)|^2$



3. Calcul de la FFT ou TFR

La TFD est restée un outil peu utilisé jusqu'à l'apparition d'algorithmes « rapides » permettant son calcul. Le plus connu est dû à Cooley et Tuckey et date de 1965. Le calcul direct de la TFD sur N points nécessite N^2 opérations complexes. L'algorithme proposé réduit à $N \log_2(N)$ le nombre d'opérations. Ainsi, pour $N = 1024$, le temps de calcul de l'algorithme rapide peut être 100 fois plus court que le calcul utilisant la formule de définition de la TFD. Pour en donner un exemple, prenons le cas de $N=8$, il faut calculer :

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j \frac{2\pi n k}{N}} = \sum_{n=0}^7 s_n e^{-j \frac{2\pi n k}{8}}$$

Soit : $W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$ alors $S_k = \sum_{n=0}^7 s_n W_N^{nk}$

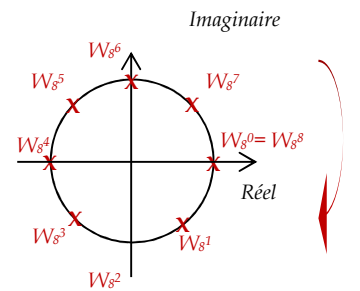
Pour $N=8$, explicitons la relation précédente :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix}$$

Les facteurs W_n présentent un certain nombre de propriétés dont certaines sont mises à profit dans l'algorithme :

$$W_N^{nN} = 1, W_N^{N/2} = -1, W_N^{n+N} = W_N^n$$

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix}$$



L'algorithme suppose que N est pair : posons $N=2P$. Introduisons les 2 sous-suites de s_n en fonction de la parité de n.

$$u_n = \{s_{2n}\}_{n=0, \dots, P-1}$$

$$v_n = \{s_{2n+1}\}_{n=0, \dots, P-1}$$

On obtient ainsi :

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n W_N^{nk} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_{2P}^{2ik} + \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_{2P}^{(2i+1)k}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_P^{ik} + W_N^k \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_P^{ik}$$

$$S_k = U_k + W_N^k V_k$$

Par ailleurs,

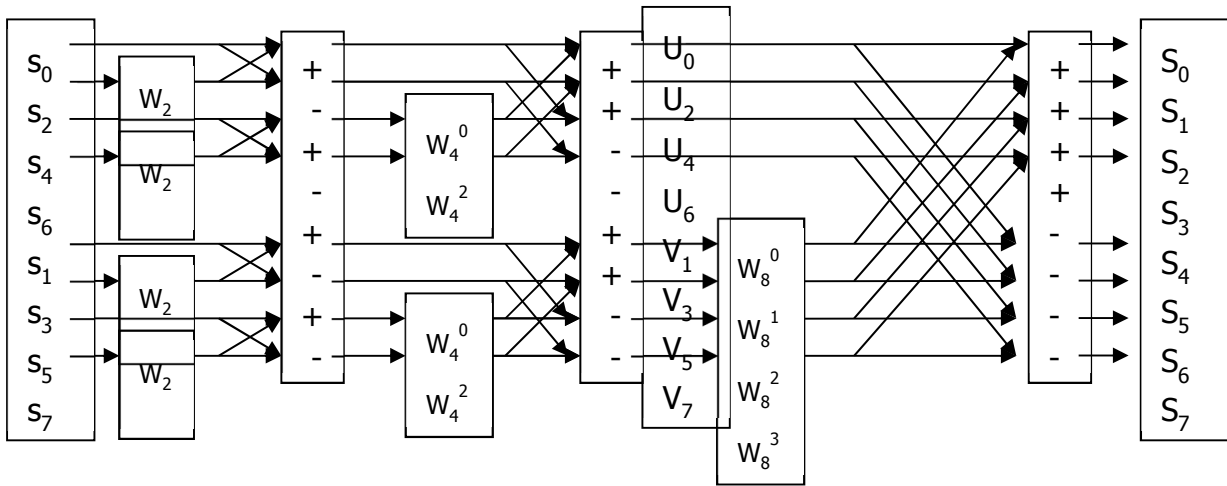
$$S_{(k+P)} = \sum_{n=0}^{N-1} s_n W_N^{(k+P)n} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_{2P}^{2i(k+P)} + \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_{2P}^{(2i+1)(k+P)}$$

$$S_{(k+P)} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_P^{ik} W_P^{iP} + W_N^k W_N^P \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_P^{ik} W_P^{iP}$$

$$S_{(k+P)} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_P^{ik} \cdot 1 + W_N^k (-1) \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_P^{ik} \cdot 1$$

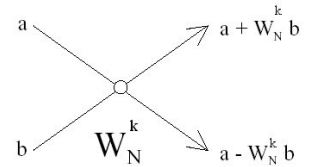
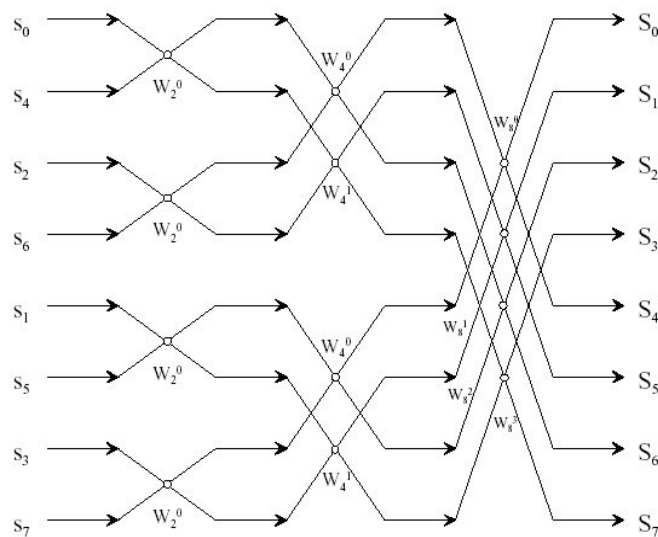
$$S_{(k+P)} = U_k - W_N^k V_k$$

Le calcul de la FFT revient donc à calculer U_k et V_k qui sont les TFD sur P points des suites de termes de rang pair et impair. On s'aperçoit qu'il ne reste qu'à exprimer les U_k et V_k .



Or, ce sont des TFD sur P points, qui peuvent subir le même schéma que précédemment à condition que P soit pair. On peut réitérer le processus à chaque sous-niveau si N est une puissance de 2 (Dans le cas contraire, on rajoute autant de 0 que nécessaire pour obtenir une puissance de 2).

Avec cette représentation, l'algorithme FFT se représente par :



L'algorithme papillon de FFT dit aussi à entrelacement temporel peut s'écrire sous forme matricielle. On obtient :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W_8^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W_4^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -W_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}$$

En opérant de la même façon sur la TFD⁻¹, on arrive à réduire considérablement le coût.

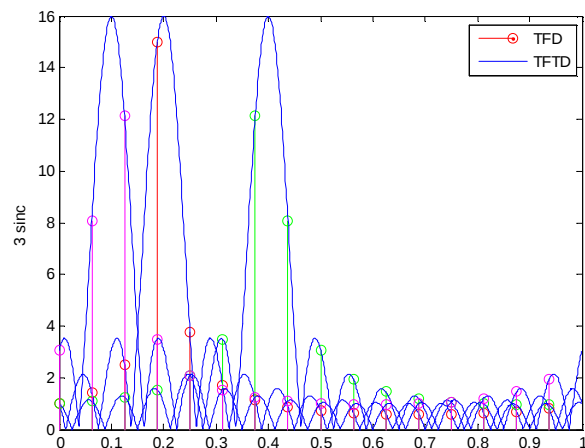
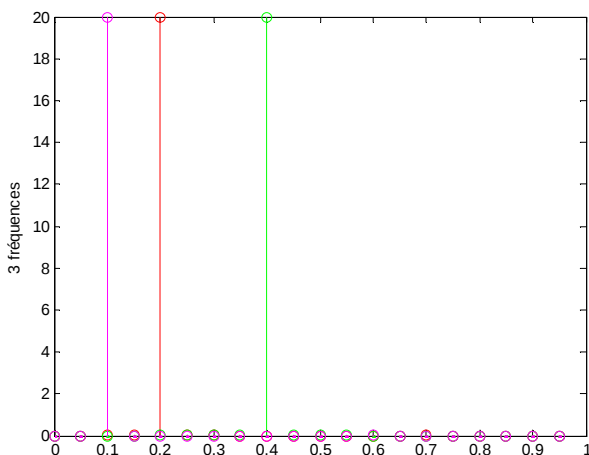
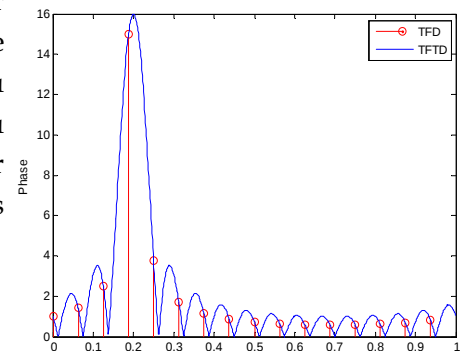
4. TFD des signaux de longueur illimitée

Le nombre d'éléments d'une séquence transformée par la TFD est implicitement limité, la fenêtre intrinsèque à la transformée discrète de Fourier est donc la fenêtre rectangulaire de durée $T_0 = NT_e$.

$$\left| TFD \left\{ x(n) \cdot \text{Rect}(n) \right\}_{T_0=NT_e} \right| \approx |X(f) * N \text{sinc}(fT_0)|$$

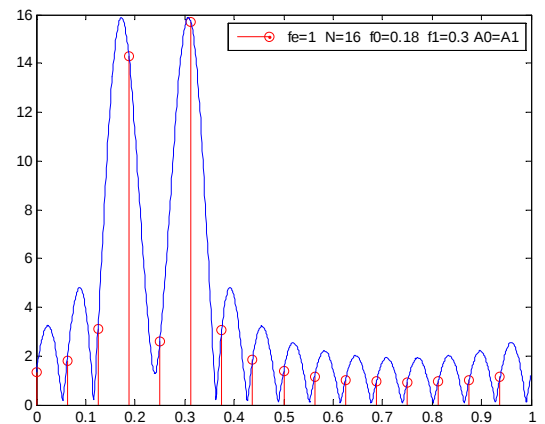
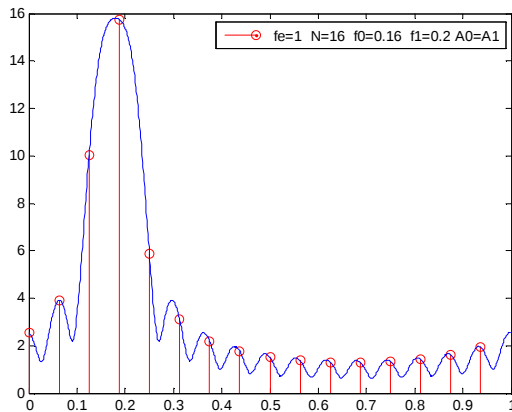
La troncation du signal échantillonné par une fenêtre de largeur T_0 a pour effet de convoluer le spectre avec un sinus cardinal qui s'annule tous les $1/T_0$ avec $T_0 = NT_e$ soit tous les f_e/N .

Exemple : En rouge est illustré $X(k)$ le module de la TFD de $\{x(n) = e^{2\pi j f_0 n}\}$, pour $n = \{0, \dots, N-1\}$, avec $N = 16$ et $f_0 = 0,2$. En bleu $X(f)$, le module de la TFD de $x(n)$. L'allure de $X(f)$ fait apparaître un lobe principal de largeur $2/N$ (ou $2f_e/N$) autour de la fréquence f_0 et des lobes secondaires de largeur $1/N$ (ou f_e/N). Dans le cas général, le spectre, obtenu par transformée de Fourier discrète, est donc un ensemble de fonctions $\text{sinc}(T_0 f)$ centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial.



Exemple : Considérons l'exemple suivant: $x(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_0 e^{2\pi j f_1 n}$ pour $n (0:N-1)$ où f_0 et $f_1 \in [-f_e/2, f_e/2]$

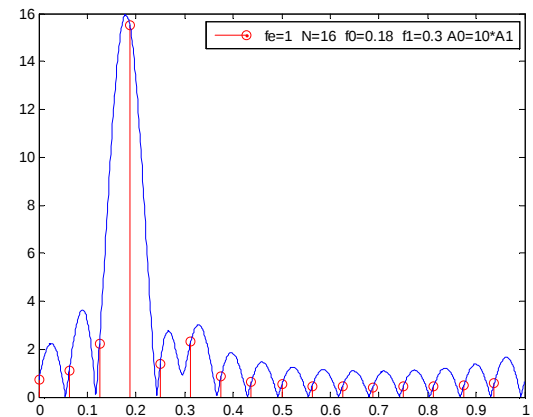
Le tracé du spectre par TFD montre que si l'écart en valeur absolue entre f_0 et f_1 est supérieur à f_c/N , il sera possible de distinguer les deux fréquences sur le tracé. Cette résolution en fréquence est liée au nombre de points N du signal (voir les 2 figure ci-dessous)



On considère maintenant l'exemple suivant (figure ci-dessus, à droite):

$$s(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_1 e^{2\pi j f_1 n} \quad \text{pour } n(0:N-1) \quad \text{où } A_0 > A_1$$

Un masquage du lobe principal de la composante en f_1 peut survenir en raison des ondulations présentes dans le spectre de $A_0 \exp(2j\pi f_0 n)$. Une « fréquence » d'amplitude faible au voisinage d'une d'amplitude plus élevée sera masquée par le premier lobe secondaire. Ce phénomène se révélera gênant lorsque le spectre est composé de nombreuses raies, proches les unes des autres. L'importance des lobes secondaires peut être réduite par l'emploi d'autres fenêtres.

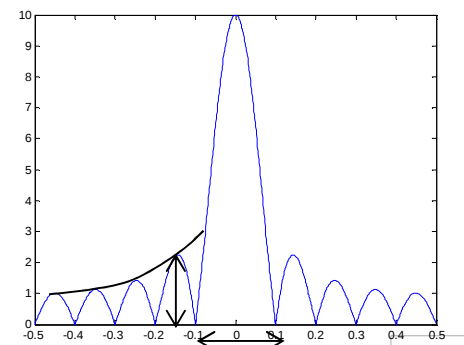


Mais cela se fera au détriment de la séparation de « fréquences » très voisines mais d'amplitude semblables car les 2 raies seront confondues dans un lobe principal plus large (la fenêtre rectangulaire possède le lobe principal le plus étroit).

5. Fenêtres de pondération

Lors de l'analyse spectrale d'un signal de longue durée, nous n'avons accès, en pratique, qu'à une portion limitée de ce signal. Le spectre obtenu correspond donc au spectre du signal à analyser auquel une *fenêtre* a été préalablement multipliée [7]. Pour ne pas altérer le spectre original, il faudrait que $W(f)$ (spectre de la fenêtre) se rapproche le plus possible d'une distribution de Dirac. La distribution de Dirac étant l'élément neutre du produit de convolution. Il y a deux éléments importants pour se rapprocher de la distribution de Dirac. La finesse du lobe principale et la hauteur des lobes secondaires.

En effet, plus la largeur du pic principal est fine, plus la résolution est grande, c'est-à-dire que l'on peut séparer des raies proches. Et plus les lobes secondaires sont élevés plus on dégrade la forme du spectre et la détection d'un signal d'amplitude faible en présence d'un signal d'amplitude élevée sera ardue [8].

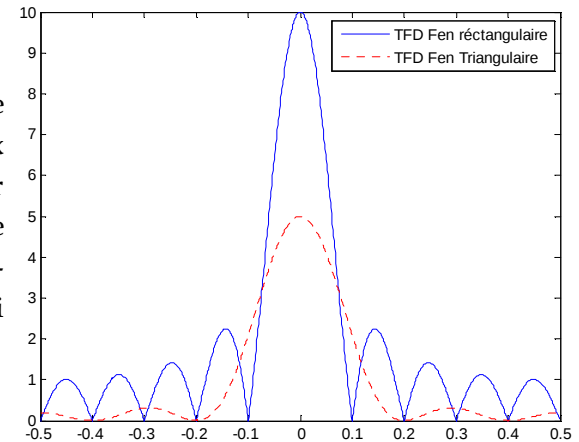


- Fenêtre Rectangulaire

Pour la fenêtre rectangulaire, on voit que la finesse du lobe principale ($2 f_e/N$) peut être réglée par le nombre d'échantillons N . Ainsi, plus on observe le signal longtemps, plus la résolution du spectre augmente ce qui paraît logique. Par contre, λ_R varie très peu en fonction de N (-13dB) donc toujours une distorsion de spectre.

- Fenêtre Triangulaire

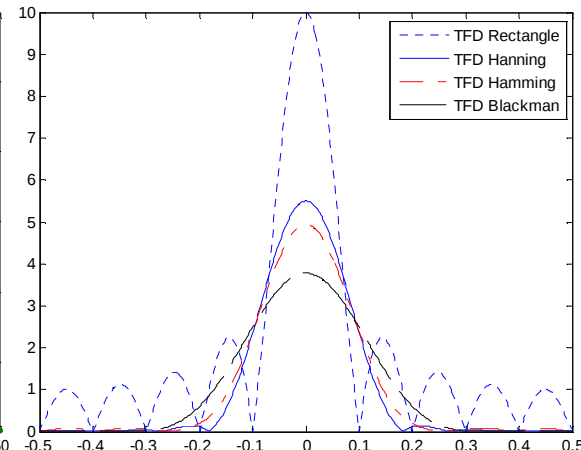
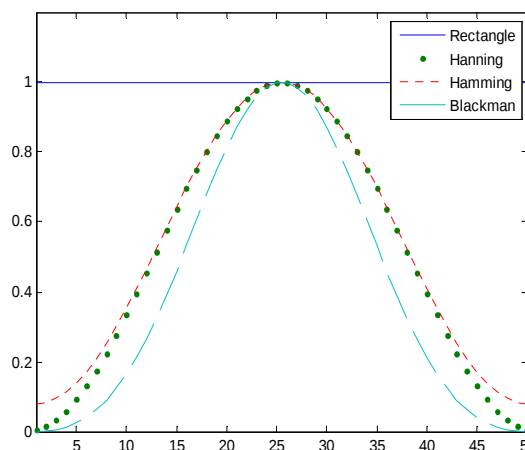
Pour obtenir la transformée de Fourier de la fenêtre triangulaire de largeur N , rappelons que la convolution de deux signaux rectangulaires donne un signal triangulaire. Ainsi, on peut exprimer cette fenêtre sous la forme d'une convolution de deux rectangles de largeur $N/2$. On observe une atténuation des lobes secondaires (-24dB) par rapport à la fenêtre rectangulaire[8]. Malheureusement, ceci se fait au prix de l'élargissement du pic central ($4 f_e/N$).



- Autres fenêtres

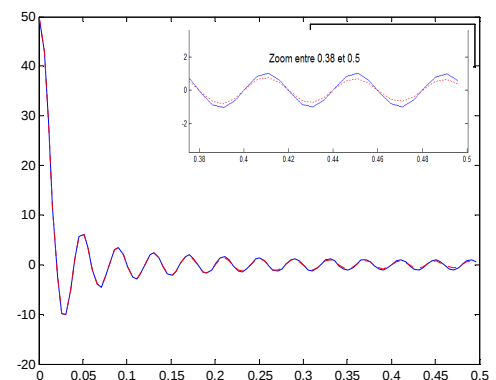
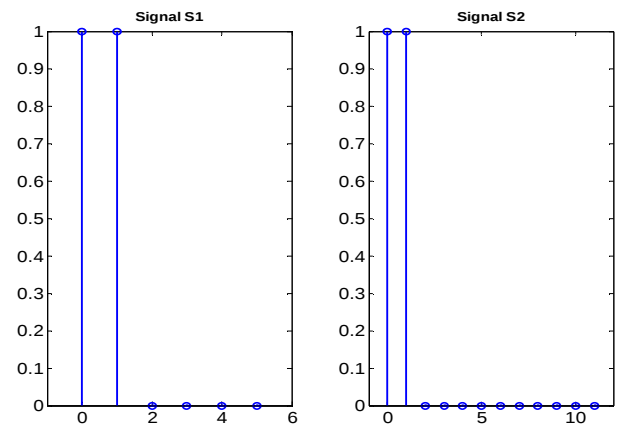
Fenêtres		Largeur de Transition : Δf	Lobe Principale/Secondaire
Rectangle	$w_{\text{Rect}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$2 f_e/N$	-13 db
Triangulaire	$w_{\text{Trian}}(n) = \begin{cases} 1 - 2 n /(N-1) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e/N$	-25 db
Hanning	$w_{\text{Han}}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e/N$	-31 db
Hamming	$w_{\text{Ham}}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e/N$	-41 db
Blackman	$w_{\text{Black}}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$6 f_e/N$	-57 db

Dans un problème d'analyse spectrale, on utilise généralement plusieurs fenêtres l'une après l'autre afin d'obtenir un bon compromis résolution/déformation.



Série n°2 (A)

1. Calculer la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de $x(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$
2. Soit $x(n) = 1/N$ pour $0 \leq n \leq N-1$ et 0 ailleurs.
 - Calculer et tracer la TFTD
 - Calculer sa TFD $X(k)$ pour N quelconque puis pour $N=4$ et tracer la.
3. On a le signal suivant $x(n) = e^{-an}U(n)$, avec $U(n)$ l'échelon unité, échantillonné à $T_e = 1$.
 - Calculer la TFTD
 - Calculer la TFD pour N et comparer si $N \rightarrow \infty$
4. La figure ci-contre représente 2 signaux discrets. Le signal S1 est obtenu avec un échantillonnage à la fréquence $f_e = 1200\text{Hz}$.
 - Calculer l'énergie du signal.
 - Déterminer et tracer l'auto-corrélation du signal S1.
 - On décale le signal S1 de 2 vers la droite, sans faire de calcul, tracer son auto-corrélation.
 - Déterminer la TFTD de S1 et tracer son module.
 - Calculer la TFD pour tout N . Tracer la TFD pour $N=6$.
 - Le signal S2 est obtenu à partir du signal S1, comment ?
 - Tracer approximativement la TFD de S2 ($N=12$).
5. Calculer la TFD du signal $s(n) = n$ pour $N=2, 3, 4, 8$.
6. Calculer la transformée de Fourier discrète (TFD) de la suite $x(n)$ formée de $N = 8$ points ($n \in [0,7]$), obtenue en échantillonnant à la fréquence $f_e = 16\text{ Hz}$ le signal $s(t) = 2\sin(8\pi t) + 8\cos(4\pi t)$
7. Etant donné les signaux $s(n) = \{1, -2, 3, 2\}$ et $v(n) = \{-2, 1, 2, 3\}$, déterminer $w(n) = s(n) * v(n)$ par
 - la méthode directe
 - la méthode de la TFD

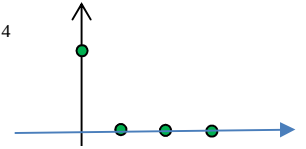


Solutions

$$1. X(f) = 1 + 6e^{-2\pi j f T_e} + 3e^{-4\pi j f T_e}$$

$$2. X(f) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi N f T_e)}{\sin(\pi f T_e)} e^{-\pi j (N-1) f T_e} \approx \text{sinc}(N f T_e) e^{-\pi j (N-1) f T_e}$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / N)} e^{-\pi j k (N-1) / N} \approx \text{sinc}(k) e^{-\pi j k (N-1) / N} \quad X(k) = \frac{1}{4} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / 4)} e^{-3 \pi j k / 4}$$



$$3. \text{TFTD } X(f) = \frac{1}{1 - e^{-a - 2\pi j f T_e}}$$

$$\text{TFD } X(k) = \frac{1 - e^{-aN}}{1 - e^{-a - 2\pi j k / N}}$$

$$4. E=3, R_{S1}(0)=2, R_{S1}(1)=R_{S1}(-1)=1, \text{ identique, } S_{S1}(f)=2\cos(\pi f T_e) e^{-\pi j f T_e}, S_{S1}(k)=2\cos(\pi k / N) e^{-\pi j k / N}$$

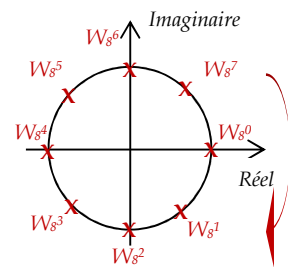
$S_{S1}=[2, 1.73, 1, 0, 1, 1.73]$, zéro padding, Rajouter des points entre la TFD de $N=6$.

$$5. N=2, X(k)=[1, -1]$$

$$N=3, X(k) = \left[3, \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{3}j), \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{3}j) \right]$$

$$N=4, X(k)=[6, 2j-2, -2, -2-2j]$$

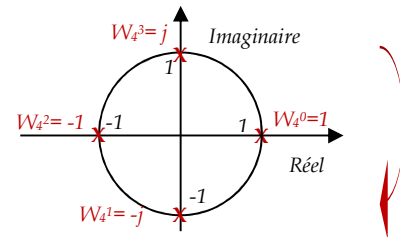
$$6. \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix}$$



$$s_n = \begin{bmatrix} 8 & 2+4\sqrt{2} & 0 & -2-4\sqrt{2} & -8 & 2-4\sqrt{2} & 0 & -2+4\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } W_8^k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) & -j & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) & j & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \end{bmatrix}$$

$$7. \text{Convolution circulaire } w(n)=s(n)*v(n)=[0, 18, 0, -2]$$

$$\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$



$$S_k=[4, 4j-2, 4, -2-4j]$$

$$V_k=[4, -4+2j, -4, -4-2j]$$

$$W_k=[16, -20j, -16, 20j] \Rightarrow w(n)=[0, 18, 0, -2]$$

Convolution Normale

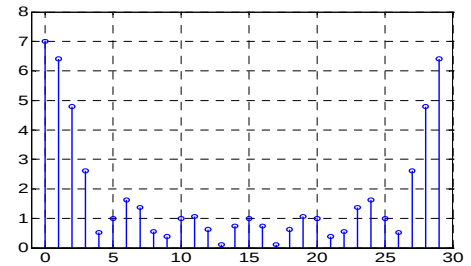
Convolution Circulaire

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & -2 & 3 & 2 \\ \times & -2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & -2 & 4 & -6 & -4 \\ & & 1 & -2 & 3 & 2 \\ & & & 2 & -4 & 6 & 4 \\ + & & & & 3 & -6 & 9 & 6 \\ \hline & -2 & 5 & -6 & -2 & 2 & 13 & 6 \\ + & 2 & 13 & 6 & & & & \\ \hline & 0 & 18 & 0 & -2 & & & \end{array}$$

Exercices supplémentaires

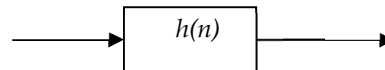
1. Calculer la TFD du signal $x(n)=1$ pour $0 \leq n \leq 6$ et $x(n)=0$ pour $7 \leq n \leq 29$

$$X(0)=7 \quad X(k \neq 0) = \frac{\sin(\pi k 7/30)}{\sin(\pi k/30)} e^{-6\pi j k/30}$$



2. Calculer la TFD de la suite $x=[2,3,-1,1]$ sur $N=4$ pts **Solution** $X=[5, 3-2j, -3, 3+2j]$

3. On considère le système suivant :

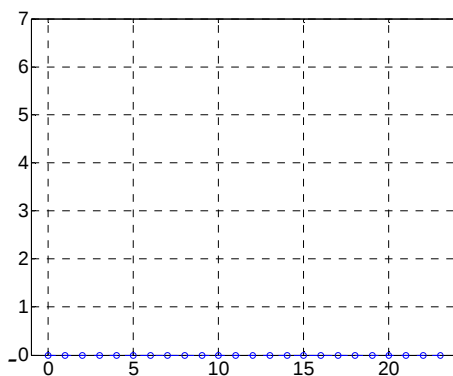
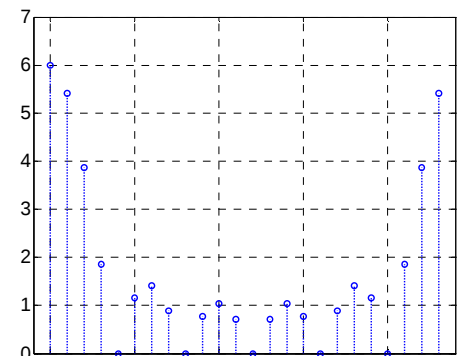


On suppose que $H(0)=H(1)=1$ et $H(2)=H(3)=0$.

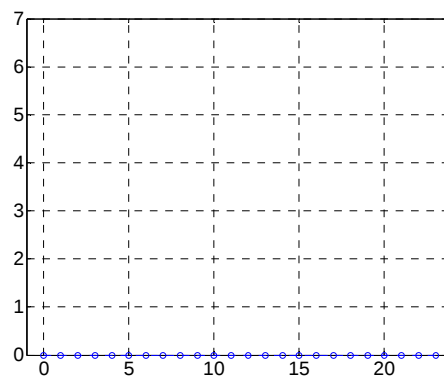
- Déterminer et tracer $h(n)$ pour $0 \leq n \leq 3$
- On pose $H(4)=H(5)=\dots=H(N-1)=0$. Donner le nom de cette technique.
- Quelle est le but de cette opération ? Donner, alors, l'allure approximative de $h(n)$ pour N assez grand.

4. Le signal suivant représente la TFD $X(k)$ d'un signal $x(n)$ calculée sur 24 points

- Représenter la TTFD $X(f)$ du signal $x(n)$.
- Représenter sa TFD sur 6 points.
- Sans calcul, identifier $x(n)$: _____



TTFD



TFD

TP n°2 : TFD et fenêtrage

Rappels

1. Transformée de Fourier Discrète

La TFD d'ordre N d'un signal numérique $s(kT_e)$, $k=0\dots N-1$ est définie par :

$$X(k) = X\left(\frac{k}{N} f_e\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2\pi j k n / N}, k = -N/2 \dots N/2$$

Sa transformée inverse est donnée par:

$$x(n) = x(nT_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k f_e / N) e^{2\pi j k n / N}, n = 0 \dots N-1$$

Matlab fournit la fonction **y=fft(x)** pour calculer la transformée de Fourier complexe d'un vecteur de longueur N.

- La fonction **fft(x)** (respectivement **ifft(X)**) permettra de calculer la TFD (respectivement la TFD⁻¹) sur les N points, soit de 0 à N-1 correspondant à l'intervalle $[0, f_e]$ (respectivement $[0, NT_e]$). Le spectre obtenu sera un vecteur complexe que l'on pourra représenter en coordonnées cartésiennes (partie réelle et imaginaire fonction **real** et **imag**), ou en coordonnées polaires (module et phase, fonction matlab **abs** et **angle** ou **unwrap**).

- Pour une représentation entre $-f_e/2$ et $f_e/2$ de la TFD, il suffira d'écrire **X=fftshift(X)**

- Pour augmenter la précision, il suffit d'écrire **fft(x,NF)** où $NF > N$. La transformée inverse est donnée alors par **ifft(x,NF)**.

2. Exemple d'utilisation de la FFT sous matlab

```
clc; clear all
N=100; fo=1000; Fe=8000; Te=1/Fe;
n=0:1:N-1;
x=sin(2*pi*fo*n*Te);
t=Te*[0:1:N-1];
subplot(2,2,1); plot(t,x,'gx:'); grid;
y=fft(x);
axe_FF=Fe*(0:1/N:1-(1/N));
subplot(2,2,2); plot(axe_FF,abs(y/N),'b.:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète par FFT du signal entre 0 et fe')
xlabel('fréquence'); ylabel('Module du spectre');
y_dec=fftshift(y);
axe_freq=Fe*(-1/2:1/N:1/2-(1/N));
subplot(2,2,3); plot(axe_freq,abs(y_dec/N),'b.:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète par FFT du signal entre -fe/2 et fe/2')
xlabel('fréquence'); ylabel('Module du spectre');
%FFT inverse %
FFT_INV=ifft(y);
subplot(2,2,4); plot(t,FFT_INV,'bx:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète inverse du signal N=100')
xlabel('temps'); ylabel('Amplitude');
```

3. Programmes à réaliser

I. Reprendre l'exemple vu en cours $x(n) = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$, calculer, afficher et visualiser sa TFD pour $NF=4$ puis $NF=32$ et commenter.

II. TFD d'une porte

```

clc; clear all; close all;
N=6; Fe=1; Te=1/Fe;
n=Te*(1:N); x=ones(1,N);
subplot(2,1,1); stem(n,abs(x),'bx:'); grid;
NF=6; y=fft(x,NF); y_dec=fftshift(y);
subplot(2,1,2); axe_freq=Fe*(-1/2:1/NF:1/2-(1/NF));
stem(axe_freq,abs(y_dec/N),'r.:'); grid;

```

- Expliquer par un dessin le rôle de fftshift.
- Calculer la TFD théorique et comparer avec celle obtenue par ce programme.
- Prendre NF = 12 puis 24 puis encore 128 et commenter.
- Vérifier que l'énergie se conserve $\sum_0^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |X(k)|^2$
- Illustrer la propriété de décalage fréquentiel de la TF en calculant (théoriquement) et en représentant le module de la TFD de $x(n) \times e^{2\pi j f_0 n}$ avec $f_0 = 0.2$ Hz.
- Reprendre le signal original et mesurer la largeur Δf du lobe principal à partir de sa TF. Sa taille est-elle fonction de N ou NF?
- Afficher le module de la transformée de Fourier en décibels en écrivant `stem(axe_freq, 20*log10(abs(y_dec/N)), 'r.:');` grid;
puis vérifier que l'on a bien environ 13 dB entre le max du lobe principal et le max du lobe secondaire pour tout N (prendre N=10 et N=40).

III. TFD d'un signal illimité et Effet du fenêtrage

- Déterminer la TTFD théorique de $s(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n}$

- Que se passe-t-il si l'on calcule cette TTFD sur N ?

On calcule maintenant la TFD comme illustré par le programme suivant :

```

clc; clear all; close all;
N=50; NF=1024; Fe=8000; Te=1/Fe; f0=1680;
n=(0:N-1)*Te; x=exp(2*pi*j*f0*n);
y=fft(x,NF); yy=fftshift(y/N); axe_f=Fe*(-1/2:1/NF:1/2-(1/NF));
plot(axe_f,abs(yy)); grid; title('TFD Fenêtre Rectangulaire'); hold on;

```

- Pourquoi parle-t-on de fenêtre rectangulaire ? A-t-on vraiment multiplié par une fenêtre ?
- Que se passe-t-il si l'on remplace f_0 par 1600 ?
- On remet f_0 à 1680 et on rajoute au programme les lignes suivantes

```

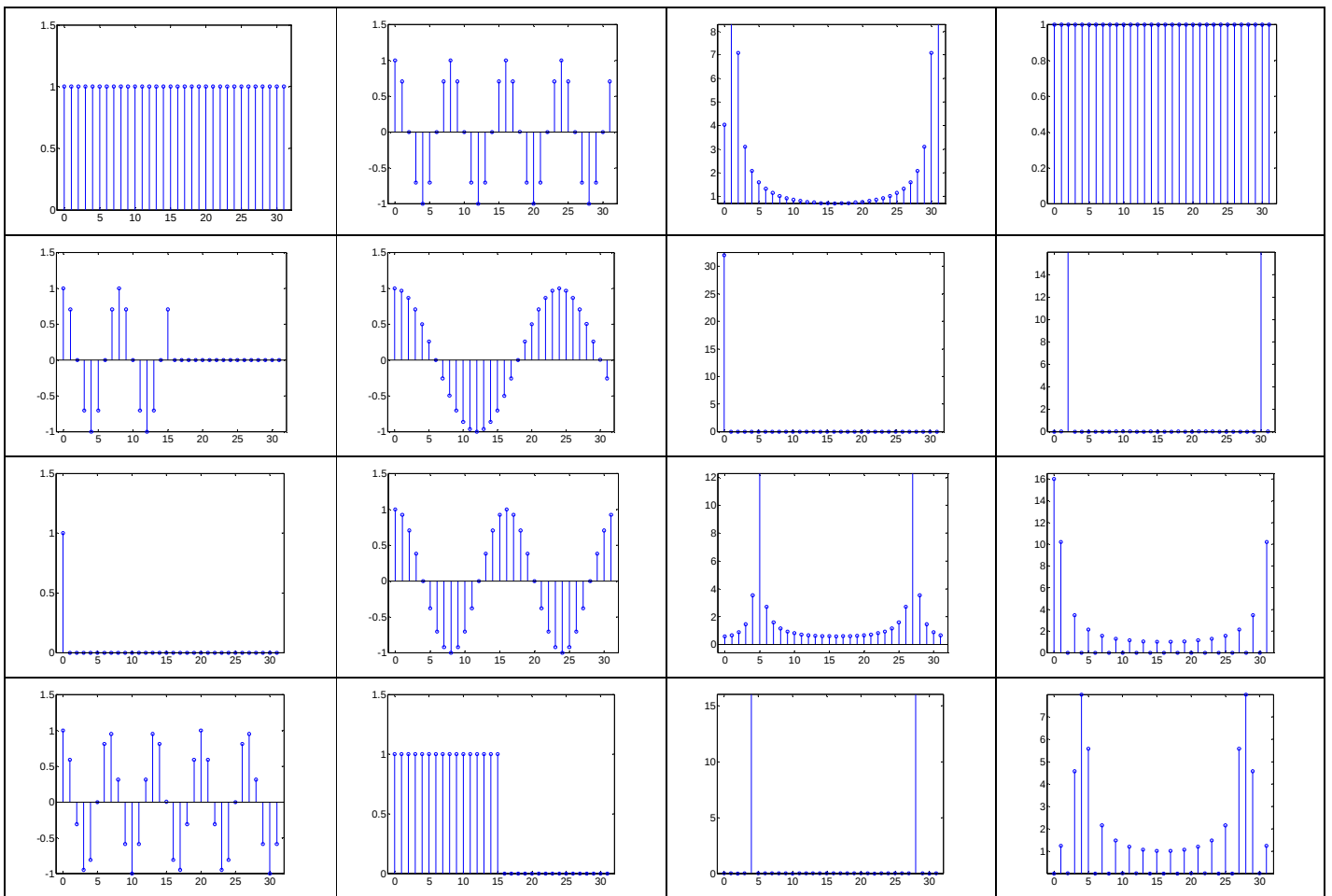
fen=hanning(N);
xx=x.*fen; y=fft(xx,NF); yy=fftshift(y/N);
plot(axe_f,abs(yy),'r'); grid; title('TFD Fenêtre Hanning');

```
- Calculer la largeur du lobe principale pour chaque fenêtre en fonction de f_0 et N.
- Comparer les fenêtres (amplitude principale, largeur des lobes, amplitudes des lobes).
- Tester d'autres fenêtres (Hamming, Blackman)
- Modifier ce programme pour calculer la TFD de la somme de 2 exponentielles de fréquences $f_0 = 1680$ Hz et $f_1 = 1800$ de même amplitude 1. Comparer alors les résolutions fréquentielles théoriques et pratiques des différentes fenêtres
- Refaire le même travail avec $f_0 = 1680$ Hz et $f_1 = 2100$ avec des amplitudes différentes ($A_0 = 1$ et $A_1 = 0.2$) et commenter.

Remarque Deux raies d'un spectre sont considérées comme séparables, si le maximum de l'une correspond au premier minimum nul de l'autre soit $|f_1 - f_2| > \text{Largeur du lobe principal} / 2 = L\Delta f / 2$ (Voir tableau page 31).

Série n°2 (B)

1. Etablir la correspondance entre chaque signal et sa TFD



2. Un signal analogique est échantillonné à une fréquence $f_e=7500$ Hz et N échantillons sont collectés.

- Quelle est la résolution fréquentielle pour $N=1250$?
- Déterminer N permettant d'atteindre une résolution fréquentielle de 4.5 Hz.

3. Un signal analogique est échantillonné à une fréquence $f_e= 500$ Hz et $N=980$ échantillons sont collectés. On veut connaître la valeur du spectre à 120 Hz.

- Quel indice k de la TFD est le plus proche de 120Hz?
- Quel est le nombre minimum de 0 à rajouter obtenir une valeur de la TFD à 120 Hz exactement?
- Donner alors la valeur de l'indice k correspondant.

4. Soit $x(n) = \sin(2\pi f_1 n) + 0.5 \sin(2\pi f_2 n)$ avec $0 \leq n \leq 127$, $f_1 = 0.223$, $f_2 = 0.240$

- On veut employer un fenêtrage, calculer la largeur du lobe principale de chaque fenêtre
- Déterminer alors le fenêtrage permettant de visualiser les 2 sinusoides.

5. Soit $x(n)=A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_0 e^{2\pi j f_1 n}$ pour $n (0:N-1)$ où $f_0=0.25$, et $f_1=0.70$ et $f_e=2$ $N=20$.

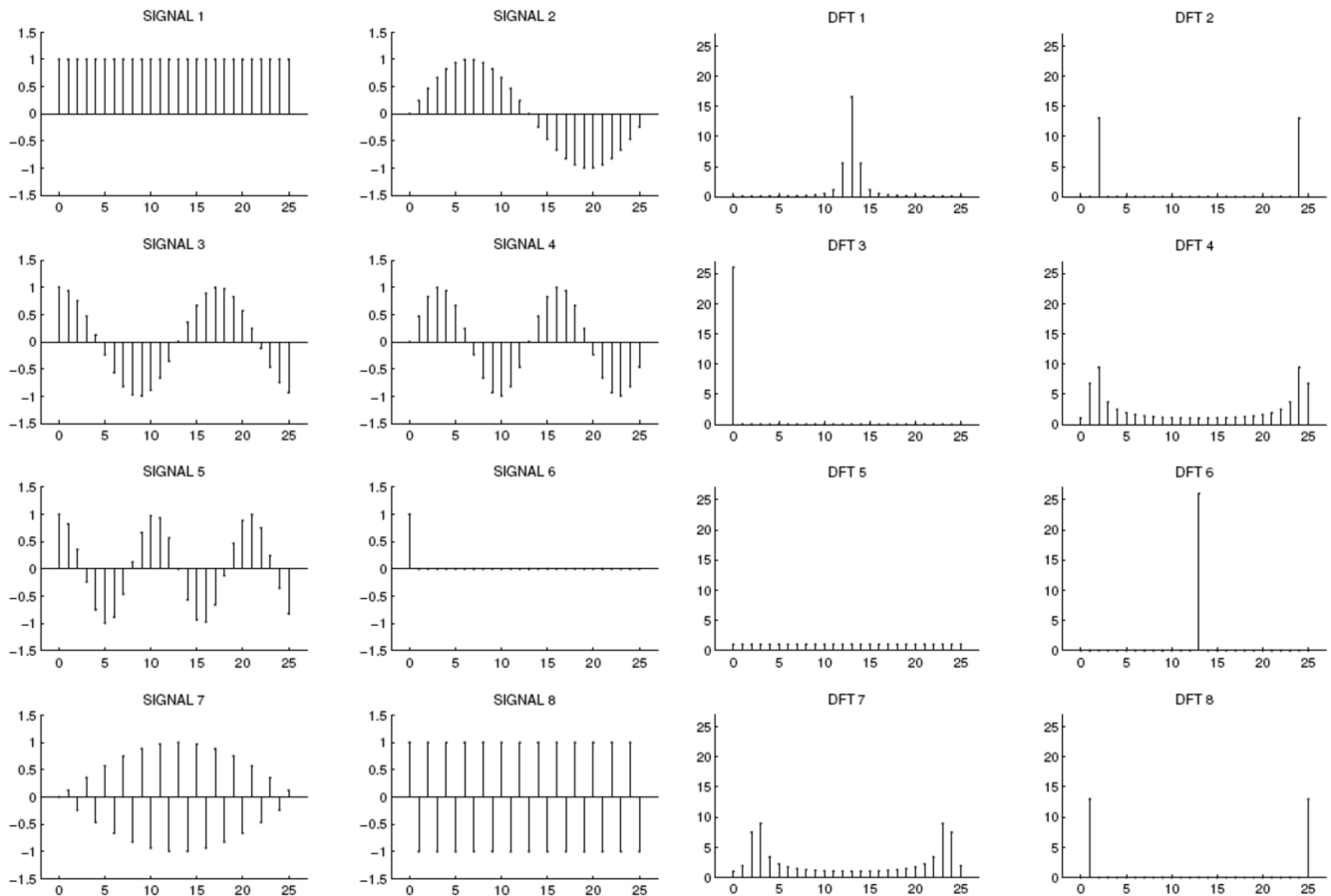
- Donner l'allure de la TFD et de la TFD.
- Quel est le but du fenêtrage ?
- Quelle est la meilleure fenêtre à utiliser pour ce signal ? Justifier.

Solutions

1. 1-3, 2-7, 3-6, 4-1, 5-2, 6-4, 7-5, 8-6
2. $\Delta f=6$ N=1667 3. $k=235$, Rajouter 20 zéros et prendre $k=240$
4. Rect=0.0156 Tri, Han, Ham= 0.03125 Black=0.0469 $f_1-f_2=0.017 \Rightarrow$ Rectangle ou Hamming
5. 2 sinc l'un en f_0 et l'autre en f_1 s'annulant tous les $f_c/N=0.1$, Atténuation des lobes secondaires, Blackman.

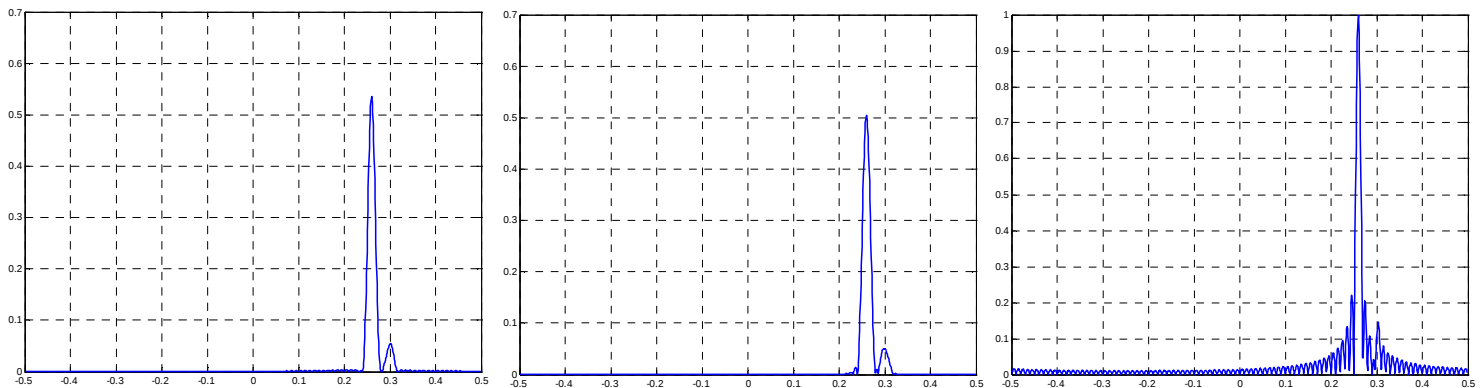
Exercices supplémentaires

1. On donne les signaux et les TFD suivantes, associer chaque signal à sa TFD



2. On souhaite calculer la TFD du signal suivant : $e^{2\pi j f_0 n} + 0.1 e^{2\pi j f_1 n}$ avec $f_0=0.26$, $f_1=0.3$, $N=100$ ($f_c=1$) et $NF=1024$. A cette fin, on teste différentes fenêtres (Rectangulaire, Hamming et Hanning). Les TFD obtenues sont illustrées ci-dessous.

- Identifier les fenêtre utilisées (en justifiant vos réponses)
- Quelle est la meilleure fenêtre pour ce signal ? Justifier.

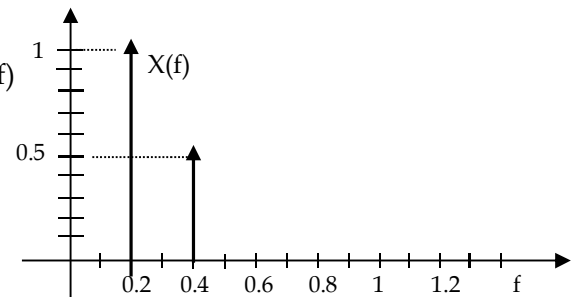


Solutions:

1. (1,3), (2,8), (3,4), (4,2), (5,7), (6,5), (7,1) et (8,6)
2. Hamming, Hanning, Rectangulaire, Meilleure : Hamming.

3. L'analyse par la TFTD d'un signal $x(n)$ illimité a donné le signal $X(f)$ ci-contre

1. Tracer sa TFTD (on supposera que $T_e=1$ et $N=10$).
2. Tracer sa TFTD si on utilise un fenêtrage de Hamming.
3. Quelle fenêtre choisir ? (Justifier) : _____



III. Analyse des filtres numériques par la TZ

La transformée de Fourier est un outil précieux d'analyse et de traitement des signaux. Cependant, dans certains problèmes (comme le filtrage numérique), les limites de la TF sont vite atteintes. La transformée en Z, qui s'applique aux signaux discrets, généralise la TF et permet de dépasser ces limites [10]. Elle est tout-à-fait analogue à la transformée de Laplace, mais plus facile à utiliser. Ce type de transformée permet de décrire aisément les signaux à temps discret et la réponse des systèmes linéaires invariants soumis à des entrées diverses. C'est un outil qui permet de calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies. Elle permet l'interprétation directe des caractéristiques des signaux et des filtres dans le domaine des fréquences [9].

1. Transformée en Z

- Définition : La TZ est la généralisation de la TFD ($X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f n T_e}$).

Soit un signal discret $x(n)$. Sa TZ est définie par:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} \quad \text{où } z \text{ est une variable complexe définie partout où cette série converge.}$$

Exemples :

$$- x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(z) = 1,$$

$$- x(n) = \delta(n-k) \Rightarrow X(z) = z^{-k}, \quad \text{si } k > 0 \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{si } k < 0 \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{\infty\}$$

$$- x(n) = (1, 2, 3, 5, 0, 2) \text{ on peut écrire } x(n) = \delta(n) + 2 \cdot \delta(n-1) + 3 \cdot \delta(n-2) + 5 \cdot \delta(n-3) + 2 \cdot \delta(n-5)$$

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^{-5} \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{0\}$$

La série des puissances introduite dans l'équation de définition de la TZ ne converge que pour un sous-ensemble du plan complexe. Ce sous-ensemble est appelé région de convergence (RDC) ou domaine de convergence. Une région de convergence correspond à l'ensemble des valeurs de z telles que $X(z)$ soit définie et à valeurs finies. Spécifier le domaine de convergence de la transformée est tout aussi important que la transformée elle-même [9].

- Condition d'existence : La transformée existe si la série converge. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n|^{1/n} < 1 \text{ sur la convergence des séries géométriques } S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$$

L'ensemble des valeurs de la variable complexe z pour lesquelles la série converge est appelée Région De Convergence (RDC):

$$RDC = \left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) \cdot z^{-n}| < +\infty \right\}$$

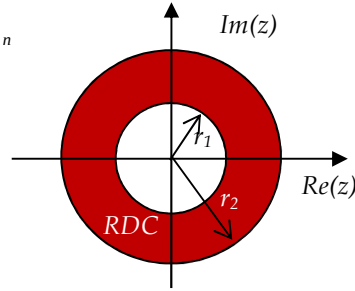
Exemple : TZ{u(n)}

$$U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, \text{ la limite est finie si } |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \Rightarrow U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ pour } |z| > 1$$

De façon générale, on montre que la RDC est un anneau de convergence centré sur l'origine défini par :

$$r_1 < |z| < r_2 \quad \text{avec } r_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(n)|^{1/n} \text{ et } r_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(-n)|^{-1/n}$$

où r_1 peut être réduit à 0 et r_2 peut être égal à $+\infty$.

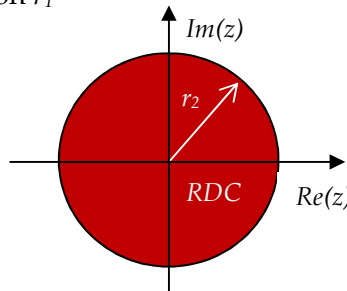


- $x(n)=0$ pour $n < n_0 \Rightarrow r_2 = +\infty$,

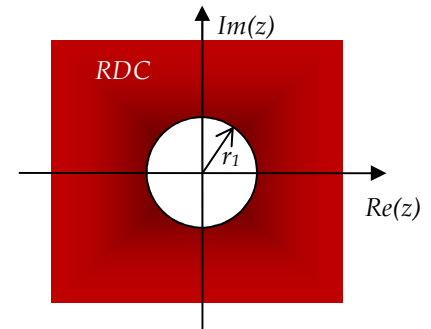
RDC = région extérieure au cercle de rayon r_1

- $x(n)=0$ pour $n > n_0 \Rightarrow r_1 = 0$

RDC = disque de rayon r_2



$\Rightarrow$ système anti-causal : RDC cercle.



système causal : RDC extérieure au cercle.

Exemples

- Soit $a > 0$, $x(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$, convergente pour $|z| > a$.

- Soit $b > 0$, $y(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 0 \\ -b^n & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow Y(z) = \sum_{n<0} -b^n z^{-n} = \frac{z}{z-b}$, convergente pour $|z| < b$.

- Soient $a > 0, b > 0$, $w(z) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ b^n & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow W(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b}$, convergente pour $b > |z| > a$.

Remarque : La TZ de a^n pour $n \in]-\infty, +\infty[$ n'existe pas.

2. Propriétés de la TZ

Les propriétés qui nous sont les plus utilisées sont résumées comme suit :

Si on définit : $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$, $x_1(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z)$ et $x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_2(z)$

- Linéarité : $a.x_1(n) + b.x_2(n) \xrightarrow{TZ} a.X_1(z) + b.X_2(z)$ RDC intersection des deux RDC

- Théorème du retard : $x(n-k) \xrightarrow{TZ} z^{-k}.X(z)$ RDC : identique

- Théorème de l'avance : $x(n+k) \xrightarrow{TZ} z^k.X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}$ RDC : identique

- Multiplication par a^n : $a^n x(n) \xrightarrow{TZ} X\left(\frac{z}{a}\right)$ RDC : $a.r_1 < |z| < a.r_2$

- Retournement du temps : $x(-n) \xrightarrow{TZ} X(z^{-1})$ RDC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$

- Convolution : $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z).X_2(z)$ et RDC : identique

- Théorème de dérivation : $n.x(n) \xrightarrow{TZ} -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$ RDC : identique

- Théorème de la valeur initiale : si $x(n)=0$ pour $n < 0$ alors $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

- Théorème de la valeur finale : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

Exemples

$$1. x(n) = \cos(w_0 n)U(n) = \frac{1}{2}(e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n})U(n) \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{jw_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-jw_0} z^{-1}} \right) = \frac{1 - \cos(w_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(w_0)z^{-1} + z^{-2}} \quad \text{avec} \quad |z| > 1$$

2. Calculer la transformée en z des fonctions discrètes suivantes. Vérifier que les théorèmes de la valeur initiale et finale s'appliquent : $x(n) = 0,8^n u(n)$ et $y(n) = n0,8^n u(n)$.

$$X(z) = \frac{z}{z - 0.8} \quad Y(z) = -z \frac{d\left(\frac{z}{z - 0.8}\right)}{dz} = \frac{0.8z}{(z - 0.8)^2}$$

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z - 0.8} = 1 \quad y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.8z}{(z - 0.8)^2} = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z-1)}{z-0.8} = 0 \quad y(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.8z(z-1)}{(z-0.8)^2} = 0$$

Quelques TZ

$x(n)$	$X(z)$	Région de convergence
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$U(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n U(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n U(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-a^n U(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{1-az^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

3. TZ rationnelles (correspondant aux SLID)

Les systèmes linéaires invariants décrits par une équation aux différences finies possèdent une transformée en Z rationnelle c'est ainsi que celles-ci vont s'écrire comme le rapport de deux polynômes en z^{-1} .

$$\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \xrightarrow{TZ} \sum_{i=0}^M a_i \cdot z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i} X(z)$$

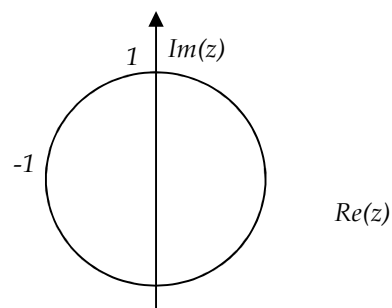
On peut caractériser un système LI par $h(n)$ ou par la transformée en Z ($H(z)$) de sa réponse impulsionnelle $h(n)$, encore appelée fonction de transfert du système.

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^M a_i \cdot z^{-i}} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z - z_i)}{\prod_{i=1}^M (z - p_i)} = K z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z - z_i)}{\prod_{i=1}^M (z - p_i)}$$

On appelle zéros, les valeurs de z pour lesquelles $H(z)=0$ et on appelle pôles, les valeurs de z pour lesquelles $H(z)$ est infini (annule le dénominateur). C'est ainsi que $H(z)$ possède N zéros (z_i), M pôles (p_i). Si $M > N$, elle possède $(M-N)$ zéros en 0, sinon $(N-M)$ pôles en 0.

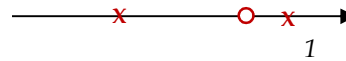
Ainsi, la position de ses pôles et de ses zéros (+ le facteur d'amplitude $K=b_0/a_0$) va nous fournir une description complète de $H(z)$ (par conséquent de $h(n)$ et $H(f)$) donc du comportement du système. $H(z)$ peut donc être représentée sous la forme d'un cercle modélisant la position des pôles et des zéros dans le plan complexe.

Exemple



$$H(z) = \frac{3z - 2}{(z - 1)(z + 0.5)}$$

Un zéro en $2/3$ et deux pôles $p_1 = -0.5$ et $p_2 = 1$



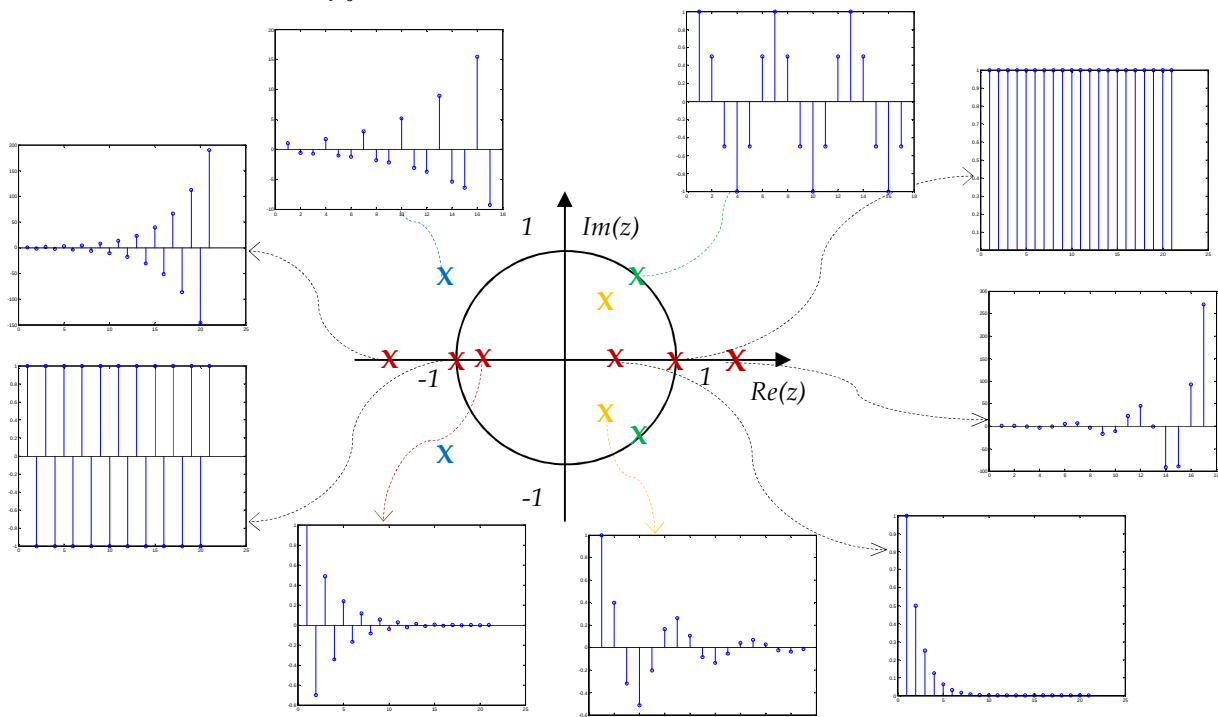
Remarques

- Dans la plupart des systèmes, les a_i et le b_i sont réels $\Rightarrow$ les pôles et les zéros sont soit réels soit des paires de complexes conjugués.

- Rappelons que le rayon d'un système causal se trouve à l'extérieur d'un cercle. Par ailleurs, s'il est stable : $\sum_n |h(n)| < \infty$, puisque $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n}$, il suffit donc que $z=1$ fasse partie de la RDC.

- Pour un système causal et stable, tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité ($|p_i| < 1, \forall i$). Le domaine de convergence ne peut contenir de pôles puisque la TZ ne converge pas aux pôles. S'il est anti-causal, il sera stable si les pôles sont à l'extérieur du cercle unité.

- Si le filtre est non-récursif $H(z) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}$. Un filtre RIF a tous ses pôles à l'origine et sera donc toujours stable.



- A un pôle p_i simple ou multiple va correspondre une réponse impulsionnelle qui converge si $|p_i| < 1$. Elle divergera dans le cas contraire, soit si $|p_i| > 1$.

- Sachant qu'à chaque pôle complexe est associé un pôle conjugué cela donnera une réponse impulsionnelle $h(n)$ oscillante (cosinus ou sinus) amortie si $|p_{i=1,2}| < 1$ ou divergente si $|p_{i=1,2}| > 1$.

- Dans un système à phase minimale, tous les zéros sont à l'intérieur du cercle unité ($|z_i| < 1, \forall i$).

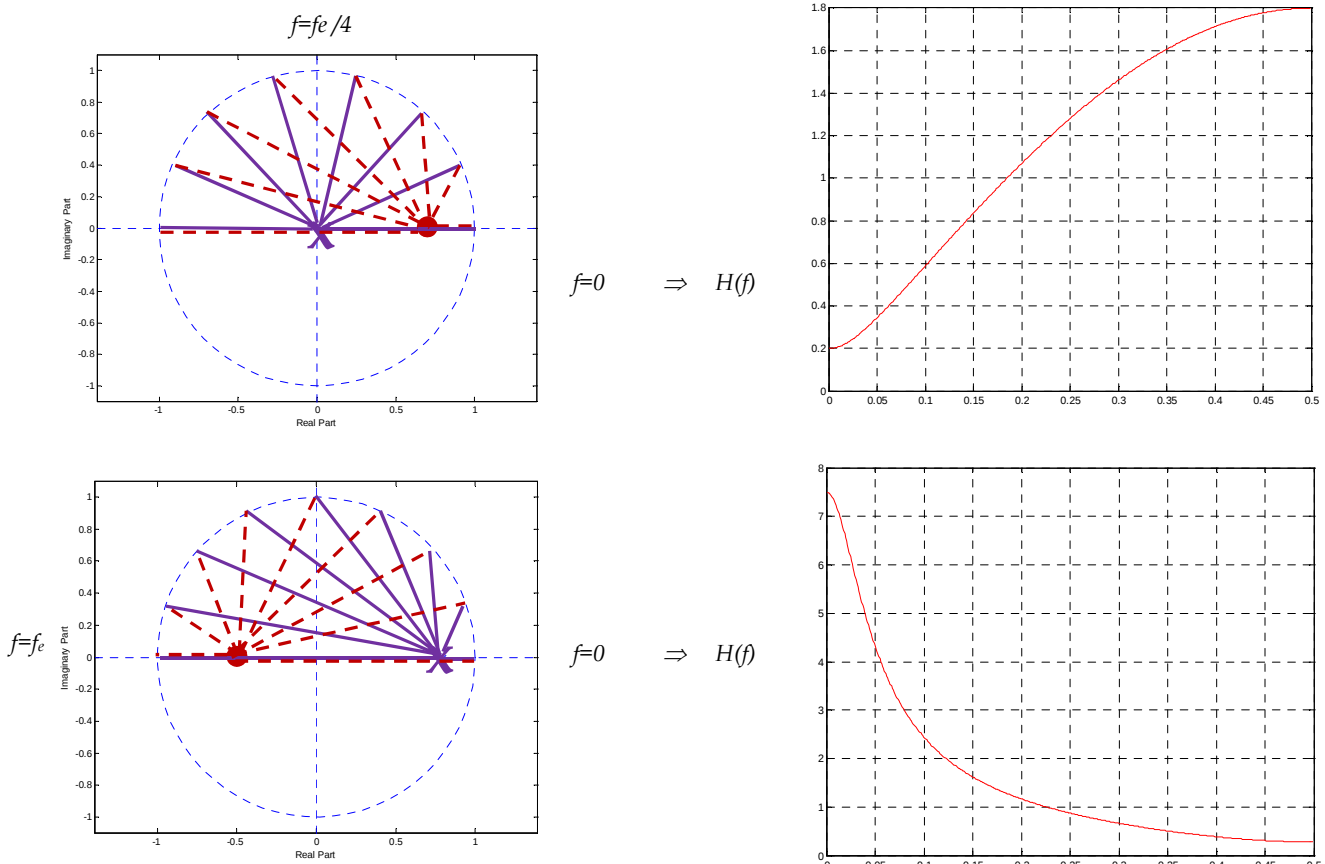
4. Détermination de la réponse fréquentielle des filtres numériques

On suppose que le cercle unité ($|z|=1$) $\in$ RDC de $X(z)$. On restreint le calcul de $X(z)$ au cercle unité en posant $z = e^{2\pi j f T_e}$.

Lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z , la réponse fréquentielle sera de 0 au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic au point correspondant. Plus les pôles ou les zéros sont proches du cercle unité, plus ils influencent la réponse en fréquence [11].

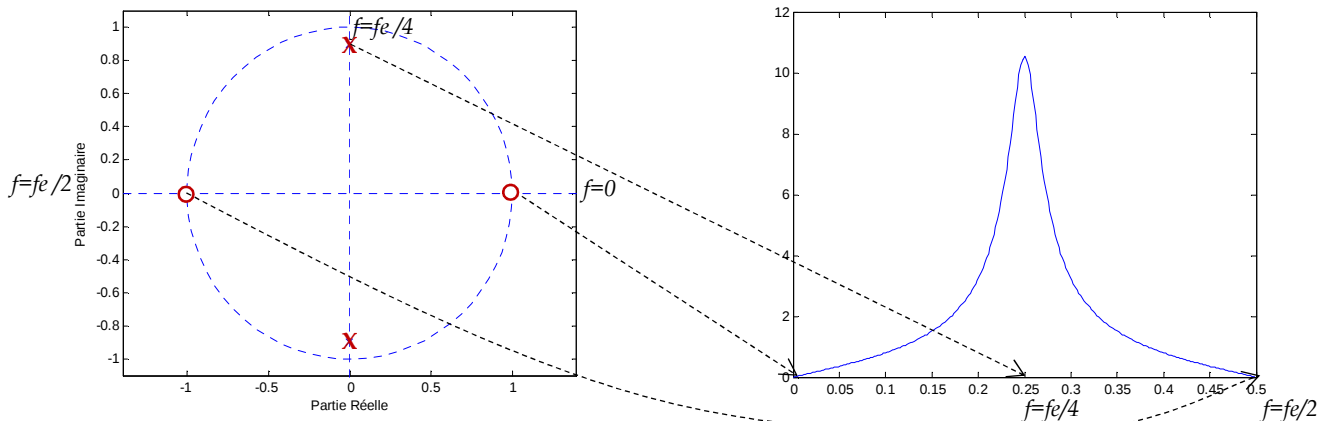
- un zéro ou un pôle à l'origine n'influent pas sur le module de la réponse fréquentielle.
- un zéro sur le cercle unité introduit une annulation du module pour la fréquence correspondant
- Un zéro au voisinage du cercle unité introduit une atténuation dans le module de la réponse en fréquence. Atténuation d'autant plus importante que le zéro est proche du cercle unité.
- Un pôle sur le cercle unité introduit une résonance infinie dans le module de la réponse en fréquence pour la fréquence correspondante.
- Un pôle au voisinage du cercle unité introduit une résonance d'autant plus importante dans le module de la réponse en fréquence que le pôle est proche du cercle unité.

Exemples: 1 pôle en 0 et un zéro en 0.7. Pour obtenir l'allure de $H(f)$, on divise le vecteur du numérateur (en rouge) sur celui du dénominateur (en mauve). Et pour le suivant un pôle 0.8 et un zéro en -0.5

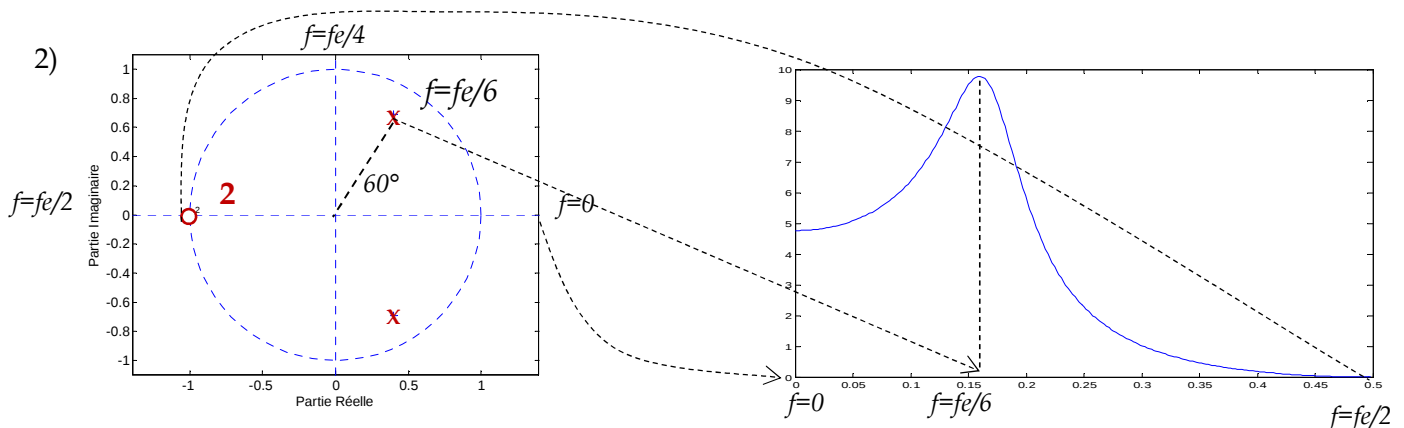


Autres Exemples

1) Sur la figure ci-dessous le cercle complet correspond à une fréquence d'échantillonnage f_e . Des pôles proches du cercle unité sont à l'origine de larges pics tandis que des zéros proches ou sur le cercle unité produisent des minima. Ce tracé nous permettra d'identifier la nature du filtre.

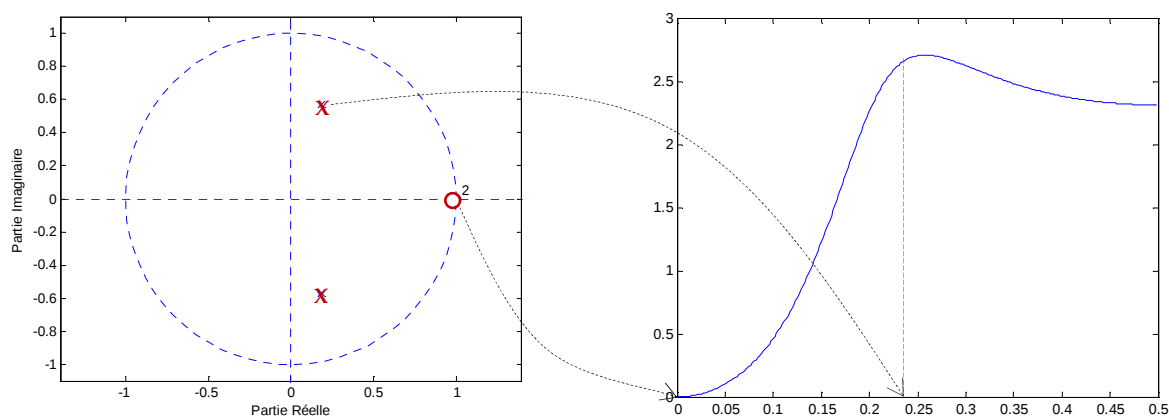


On peut aussi avoir une idée sur son comportement général : passe-bas, passe-haut ou passe-bande, connaître sa ou ses fréquences de coupure.



$$3) H(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.371z + 0.36} \Rightarrow \text{Zéros double en } z=-1, \text{ pôles } p_{12} = \pm 0.6e^{j72^\circ}$$

- Un zéro double en $z = 1 \Rightarrow |H(f)| = 0$ pour $f = 0$ - Des pôles proches du cercle unité $\Rightarrow$ maxima.



Remarque : Puisque les coefficients du filtre sont réels, les pôles et zéros sont réels (sur l'axe des réels) ou paires de complexes conjugués.

5. Détermination de la réponse impulsionnelle des FN (TZ inverse)

Le passage de la TZ vers $h(n)$ peut se faire par le biais de la transformées en Z de signaux élémentaires connus à condition qu'il soit possible d'écrire $H(z)$ comme la combinaison de transformées élémentaires. Dans le cas contraire, on peut employer l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus, ou le développement en puissance de z et de z^{-1} , ou encore le développement en fractions élémentaires [12].

1. La relation générale de la transformée en z inverse est donnée par l'équation donnée par l'intégrale de Cauchy :

$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{n-1} \cdot dz$, où C est un contour fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre contenant l'origine.

En pratique, on utilise le théorème des résidus: $x(n) = \sum_{p_i \text{ poles de } z^{n-1} X(z)} \text{Res} [z^{n-1} X(z)]_{z=p_i}$

$$\text{Res}[z^{n-1} X(z)]_{z=p_i} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_i)^m z^{n-1} X(z)]_{z=p_i}$$

Exemple: $X(z) = \frac{z}{z-e^a} \Rightarrow p_i = e^a \Rightarrow \text{Res}[z^{n-1} X(z)]_{z=e^a} = [z^n]_{z=e^a} = e^{an} \cdot u(n)$

2. Transformée inverse par division polynômiale : Il est possible de calculer la transformée en Z inverse selon les puissances croissantes de z^{-1} (système causal) ou selon les puissances décroissantes de z (système anti-causal).

Exemples $X(z) = \sum_n C_n z^{-n} \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = C_n$

- $y(n) = y(n-3) + x(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-k})^3 = 1 + z^{-3} + z^{-6} + \dots \Rightarrow h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-3k)$

- $X(z) = \frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$ pour $|z| > a$

Domaine de convergence extérieur à un cercle $\rightarrow$ signal causal $\rightarrow$ division pour avoir une série en z^{-1} .

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - a \cdot z^{-1} \\ \hline -1 + a \cdot z^{-1} & 1 + a \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2} + \dots \\ 0 + a \cdot z^{-1} & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ -a \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2} & x[0] \quad x[1] \quad x[2] \\ 0 + a^2 \cdot z^{-2} & \dots \end{array}$$

On obtient : $\frac{1}{1-a \cdot z^{-1}} = 1 + a \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2} \Rightarrow x(n) = a^n \cdot u(n)$

- $X(z) = \frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$ pour $|z| < a$

Région de convergence intérieure à un cercle $\rightarrow$ signal anti-causal $\rightarrow$ division pour avoir une série en z .

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{l}
 z \\
 \hline
 -z + a^{-1}.z^2 \\
 0 + a^{-1}.z^2 \\
 \hline
 -a^{-1}.z^2 + a^{-2}.z^3 \\
 0 + a^{-2}.z^3 \\
 \hline
 \dots\dots
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 \frac{-a+z}{-a^{-1}.z - a^{-2}.z^2 - a^{-3}.z^3 - \dots\dots\dots} \\
 \nearrow x[-1] \qquad \nearrow x[-\infty]
 \end{array}
 \end{array}$$

On obtient : $\frac{1}{1-a.z^{-1}} = -a^{-1}.z - a^{-2}.z^2 - \dots \Rightarrow x(n) = -a^n .u(-n-1)$

Notons que la division peut se réaliser sans faire apparaître une expression analytique générale.

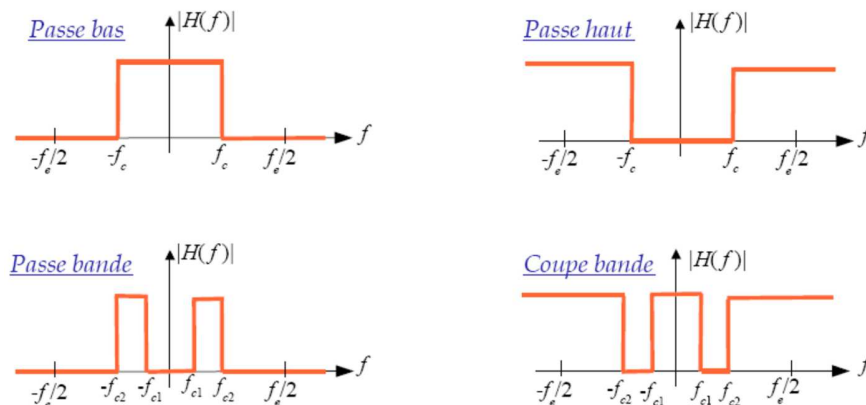
3. L'idée générale de cette approche consiste à trouver pour une fonction $X(z)$ complexe un développement en fonctions en Z plus simples et pour lesquelles une transformée inverse est connue:

$$X(z) = \sum_i X_i(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = \sum_i x_i(n)$$

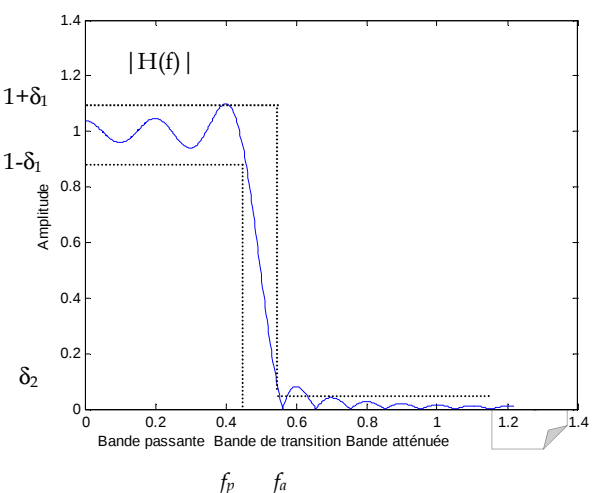
où les $X_i(z)$ sont des fonctions dont les TZ^{-1} sont connues (Voir page 38).

6. Caractéristiques des filtres numériques

Un filtre numérique est constitué d'un groupement de circuits logiques astreints à un processus de calcul (ou algorithme) qui confère à ce filtre une fonction déterminée (passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande, intégrateur [$y(n)=(x(n)+x(n-1))/2$], différentiateur [$y(n)=(x(n)-x(n-1))/2$], ...). Il faut souligner que certains filtres ne sont pas conçus pour arrêter une fréquence, mais pour modifier légèrement le gain à différentes fréquences, comme les égaliseurs. Ce sont tous des systèmes linéaires, discrets, invariants dans le temps et unidimensionnels. De plus, pour qu'ils soient physiquement réalisables, il faut qu'ils soient nécessairement causaux.



Les filtres représentés ci-dessus sont idéaux. Dans un cas réel il n'est pas possible d'obtenir une fréquence de coupure aussi raide. Le passage entre zones passantes et zones atténuées se fait par des zones dites "de transition" $f_p f_a$ dont la largeur va exprimer la sélectivité du filtre.



Par ailleurs, les bandes passantes et atténuées ne sont également pas idéales, elles contiennent des ondulations dont l'amplitude est exprimée par les paramètres d'ondulation en bande passante δ_1 et bande atténuée δ_2 [9].

Remarque : Idéalement, il est souhaitable qu'un filtre possède une phase linéaire dans la bande passante. Une phase linéaire assurera un même déphasage pour toutes les fréquences (pas de distorsion). Les filtres FIR peuvent générer des filtres à phase linéaire à la condition que la réponse impulsionnelle soit symétrique.

Si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme :

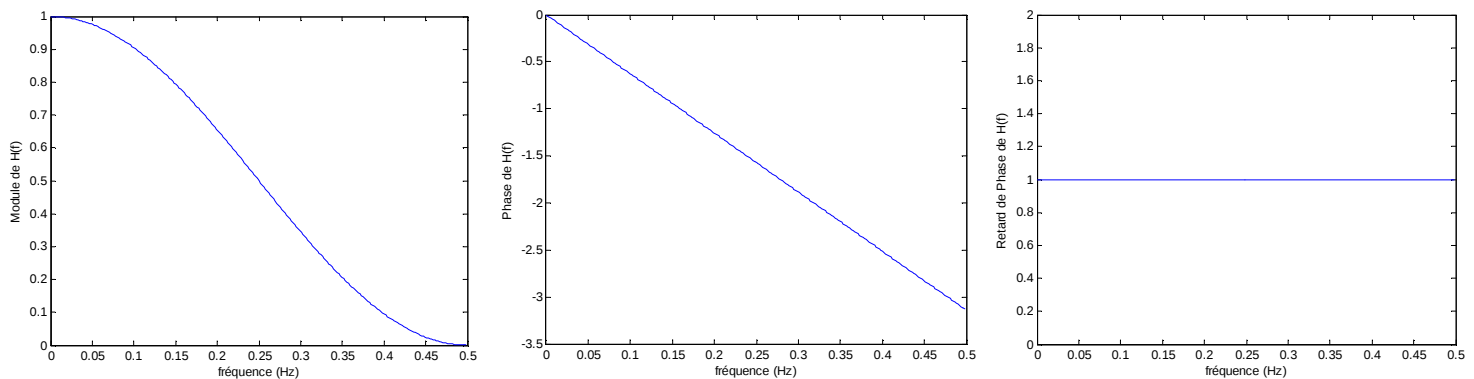
$$H(f) = R(f)e^{-j\phi(f)} \text{ avec } \phi(f) = \phi_0 + 2\pi f\tau$$

Et la dérivée de cette dernière par rapport à f fournit le 'retard de groupe', défini donc par :

$$\beta = -\frac{d\phi(f)}{df}$$

et qui correspond au retard subi par le signal après être passé par un filtre. Si la phase est linéaire (filtres RIF symétrique), le retard est constant et le signal à la sortie aura donc une distorsion minimale puisque l'effet de la phase sur le signal sera un simple décalage temporel (primordial dans un système audio)

Exemple $y(n) = \frac{1}{4}(x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)) \Rightarrow h(n) = \frac{1}{4}(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2))$ et $H(f) = e^{-2\pi j f} \cos^2(\pi f)$



RII ou RIF ?

➤ Les filtres RII, on l'avantage qu'ils sont efficaces. Avec très peu de pôles et zéros on peut assurer la plupart des réponses fréquentielles dont on peut avoir besoin dans les applications audio. Cependant, le filtre étant récursif, les erreurs de précision numérique deviennent une question d'importance, car ils peuvent s'amplifier et devenir hors de contrôle, d'abord dans la forme de bruit, mais éventuellement dans la forme d'instabilité. La forme de la réponse impulsionnelle n'est pas facile à déterminer, non plus, car elle est définie indirectement par les pôles et zéros de $H(f)$.

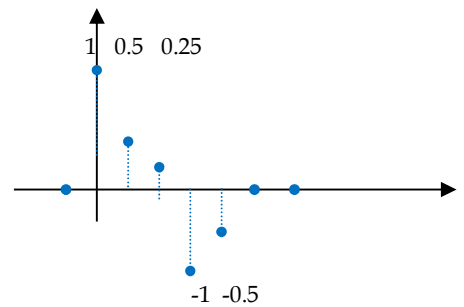
➤ Par contre, les filtres RIF n'ont jamais des problèmes d'instabilité, car la sortie n'est qu'une somme finie d'échantillons de l'entrée. Cependant, quand la réponse impulsionnelle est longue, le numéro d'opérations peut devenir un facteur décisif quand il faut choisir entre RIF ou RII. Un autre avantage des RIF est le retard de groupe constant, qui permet d'avoir une distorsion de phase minimale sur le signal traité [13].

Série n°3

1. Une séquence finie $x(n)$ est définie par : $x(n) = \begin{cases} \neq 0 & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Déterminer le ROC suivant les différentes valeurs de N.

2. Donner la transformée en z de la fonction numérique discrète $x(n)$ représentée par le graphique ci-contre.



3. Calculer la transformée en z, $X(z)$, et esquisser la carte des pôles et zéros ainsi que la ROC pour chacune des séquences suivantes :

$$x(n) = (0.5)^n u(n) + (0.25)^n u(n), y(n) = (0.25)^n u(n) + (0.5)^n u(-n-1), z(n) = (0.5)^n u(n) + (0.25)^n u(-n-1)$$

4. Calculer la Transformée en Z du signal $x(n) = \text{rect}_N(n)$,

- en appliquant la définition de la TZ directement,
- en utilisant le signal échelon et le théorème du retard.

5. Soit $H(z)$ la fonction de transfert d'un SLIT causal avec : $H(z) = \frac{az-1}{z-a}$ avec a réel

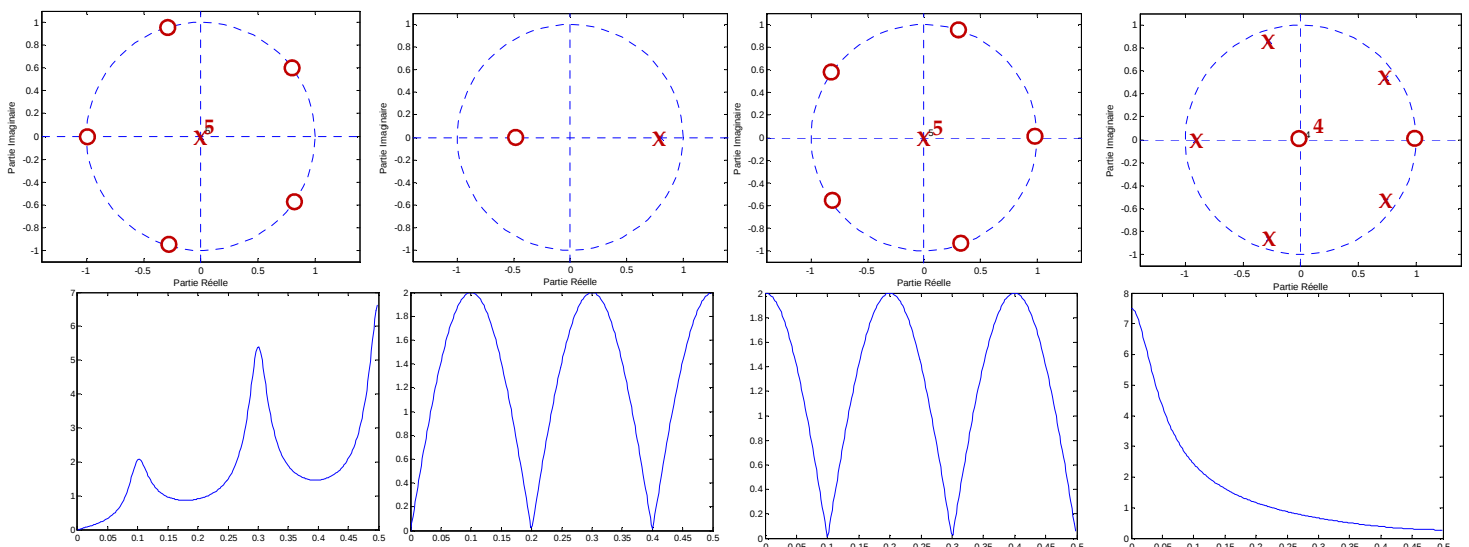
Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $H(z)$ correspond à un système stable. Prendre une valeur de $a = 0.5$. Représenter alors les pôles et zéros de la fonction, la région de convergence. Donner et tracer $|H(f)|$.

6. Soit les SLIT décrits par les équations suivantes :

- $y(n) = 3y(n-1) - 2y(n-2) + x(n)$
- $y(n) = 0.3y(n-1) + 0.3y(n+1) - 0.3x(n)$

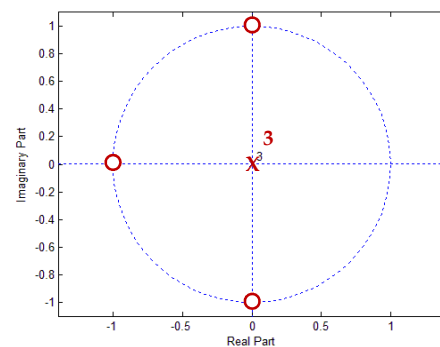
Pour chaque cas, déterminer la fonction de transfert du système. Etudier la stabilité et la causalité et calculer la réponse impulsionnelle.

7. Etablir les correspondances entre les diagrammes pôles zéros et les réponses en fréquence pour une fréquence d'échantillonnage $f_e=1$ en justifiant vos choix :



8. On suppose que le tracé des pôles et des zéros de ce système est le suivant :

- Est-ce un filtre RIF ou RII ? (Justifier votre réponse)
- Donner l'allure approximative de $H(f)$
- Déterminer $H(z)$ puis déterminer et tracer $h(n)$
- A partir de $h(n)$, étudier la stabilité, la causalité et l'invariance de ce filtre.
- Calculer et tracer $H(f)$ pour au moins 3 valeurs
- Ce filtre possède-t-il un retard de groupe constant (justifier)
- Déterminer sa réponse pour une entrée échelon $x(n)=U(n)$.



9. Trouver la séquence $y(n)$ qui a comme transformée en z : $Y(z) = \frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}}$.

10. De quelle fonction $x(n)$, la fonction: $X(z) = \frac{\sqrt{2}/2 z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$ est la transformée en Z

11. Trouver $h(n)$ correspondant à la transformée en z suivante : $H(z) = \frac{z^{-2} - 2z^{-1} + 1}{a^2 z^{-2} - 2az^{-1} + 1}$

Solutions

1. Si $N_1 \geq 0$ RDC=C-{0} Si $N_2 \leq 0$ RDC=C- $\{\infty\}$ Si $N_1 \leq 0 \leq N_2$ RDC=C-{0, ∞ }

2. $X(z) = 1 + 0,5 z^{-1} + 0,25 z^{-2} - 1 z^{-3} - 0,5 z^{-4}$ RDC=C-{0}

3. $X(z) = \frac{z(2z - 0.75)}{(z - 0.5)(z - 0.25)}$ $|z| > 0.5$ $Y(z) = \frac{-0.25z}{(z - 0.5)(z - 0.25)}$ $0.25 < |z| < 0.5$ N'existe pas

4. $(1 - z^{-N}) / (1 - z^{-1})$

5. Pôle $z=a$, stable si $|a| < 1$. Le module vaut toujours 1 (cellule passe-tout).

6. $H(z) = z^2 / (z^2 - 3z + 2)$ causal pour $|z| > 2$ mais instable avec $x(n) = (2^{n+1} - 1)U(n)$

$H(z) = 0.375 (1 / (3z - 1) + 1 / (0.33z - 1))$ causal pour $|z| > 3$ instable avec $x(n) = 0.375(3^n - 0.33^n)U(n)$

8. Tous les pôles en 0 alors RIF, $H(z) = z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1$, $h(n) = \delta(n-3) + \delta(n-2) + \delta(n-1) + 1$,

$H(f) = 2(\cos(3\pi f T_e) + \cos(\pi f T_e))e^{-3\pi f T_e}$, Retard de groupe cst, $x(n) = U(n)$ alors $y(n) = U(n-3) + U(n-2) + U(n-1) + U(n)$

9. $y(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n U(n) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^n U(n)$ 10. $x(n) = 0.8^n \cos \left[\frac{\pi}{4} (n-1) \right] U(n)$

11. $x(n) = (n+1)a^n U(n+1) - 2na^{n-1} U(n) + (n-1)a^{n-2} U(n-1)$

Exercices supplémentaires

1. Soit un système linéaire invariant dans le temps (SLID) dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ est telle que :

$h(n) = 1$ pour $0 \leq n \leq 3$ et 0 ailleurs

Calculer la réponse $y(n)$ à la suite $x(n)$ définie par :

- $x(n) = a^n$ pour $0 \leq n \leq 5$, avec $a = 0.7$ et $x(n) = 0$ ailleurs.

- $x(n) = \cos(2\pi n/8)$ pour $0 \leq n \leq 7$ et $x(n) = 0$ ailleurs.

Solution $y(0) = 1$ $y(1) = 1+a = 1.7$ $y(2) = 1+a+a^2 = 2.19$ $y(3) = 1+a+a^2+a^3 = 2.533$ $y(4) = a+a^2+a^3+a^4 = 1.7731$ $y(5) = a^2+a^3+a^4+a^5 = 1.24117$

$y(6) = a^3+a^4+a^5 = 0.75117$ $y(7) = a^4+a^5 = 0.40817$ $y(8) = a^5 = 0.16807$

$y(0) = 1$ $y(1) = 1 + \cos(\pi/4) = 1.707$ $y(2) = 1.707$ $y(3) = 1$ $y(4) = -1$ $y(5) = -2.414$ $y(6) = -2.414$ $y(7) = -1$ $y(8) = 0$ $y(9) = 0.707$ $y(10) = 0.707$

2. Soit $y(n) = x(n) + ax(n-1) + by(n-1)$, l'équation aux différences d'un système discret causal.

- Trouvez $h(n)$, la réponse impulsionnelle de ce système ; pour quelles valeurs de a et b le système est-il stable
- Trouvez la réponse impulsionnelle du système formé par la mise en série de deux systèmes $h(n)$.
- Même question pour la mise en parallèle de deux systèmes $h(n)$.

Réponses : a) $h(n) = b^n u(n) + ab^{n-1} u(n-1)$; stable pour a finie et $|b| < 1$.

b) $h(n)*h(n) = (n+1)b^n u(n) + (2nab^{n-1} + (n-1)a^2 b^{n-2})u(n-1)$ c) $2h(n) = 2b^n u(n) + 2ab^{n-1} u(n-1)$

3. On considère un système linéaire régi par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = (x(n+m) + x(n+m-1) + x(n+m-2))/3 \quad \text{où } m \text{ est un paramètre entier.}$$

-Montrer que ce système est linéaire invariant dans le temps. Etudier la causalité et la stabilité selon les valeurs de m .

-Calculer la fonction de transfert $H(z)$ de ce système pour $m=0$ et $m=1$.

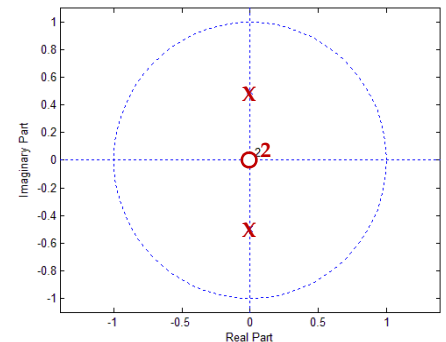
-En déduire la réponse fréquentielle.

Réponses Le système est causal si $m < 1$ et toujours stable. Pour $m=0$, $H(z) = 1/3(1+z^{-1}+z^{-2})$,

$H(f) = 0.33(1 + 2 \cos(2\pi f T_e))e^{-2j\pi f T_e}$ (filtre RIF passe-bas à phase linéaire). Pour $m=1$, de même filtre moyennneur

4. On suppose donné le tracé des pôles et des zéros du système suivant :

- Est-ce un filtre RIF ou RII ? (Justifier votre réponse)
- Donner l'allure approximative de $H(f)$
- Déterminer $H(z)$ puis déterminer l'équation de récurrence
- Déterminer et tracer $h(n)$
- A partir de $h(n)$, étudier la stabilité, la causalité et l'invariance du filtre



5. Déterminer en utilisant la décomposition en éléments simples, la forme du signal $x(n)$ dont la TZ est donnée par :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \quad \text{avec } |z| > 2 \quad \text{et} \quad X(z) = \frac{z^2}{z^2 - (a+1)z + a} \quad \text{avec } |a| < 1$$

Réponses : $x(n) = (2^{n+1} - 1)u(n)$ $x(n) = 1/(1-a) + a^n a / (a-1) = (1-a^{n+1})/(1-a)$

6. On considère la transformée : $X(z) = \frac{z}{z - z_0} + \frac{z}{z - z_0^*}$ on pose $z_0 = e^{(r+j\theta)}$, déterminer $x(n)$.

Réponse $x(n) = 2e^{rn} \cos(n\theta)U(n)$

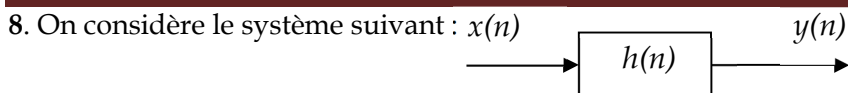
7. En utilisant la méthode des résidus puis celle de décompositions en éléments dans la TZ est connue, déterminer

$h(n)$ dont la transformée est : $H(z) = \frac{z - z_0}{(z - p_0)(z - p_0^*)}$ z_0 : réel, $p_0 = \rho e^{j\theta}$

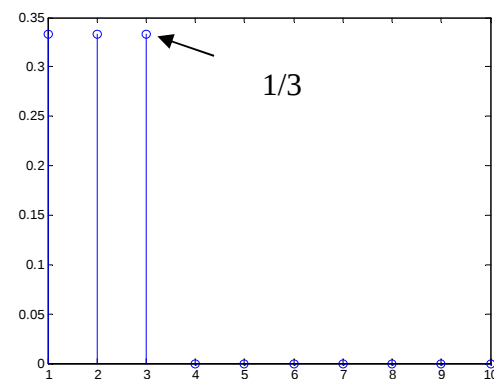
Réponse $h(n) = \frac{\rho^{n-1}}{\sin \theta} \left[\left(1 - \frac{z_0}{\rho} \cos \theta \right) \sin(n\theta) + \frac{z_0}{\rho} \sin \theta \cos(n\theta) \right] U(n-1)$

$$y(n) = x(n-1) - z_0 x(n-2) + 2\rho \cos \theta y(n-1) - \rho^2 y(n-2)$$

Certains exercices sont inspirés des références suivantes [14][15]



On suppose que $h(n)$ est donné comme ci-contre.



- Calculer et tracer son auto corrélation et en déduire son énergie
- Tracer son auto corrélation si l'on suppose qu'il est périodique de période 9.
- Etudier la causalité
- Est ce un filtre RIF ou RII
- A partir de l'expression de $h(n)$, déduire le rôle de ce filtre :
- Déterminer l'équation aux récurrences du système :
- Déterminer les pôles et zéros de ce filtre puis donner leur tracé. En déduire un tracé approximative de $|H(f)|$
- Calculer et tracer $|H(f)|$ puis en déduire le tracé du module de la TFD pour $N=6$.

9. On considère que l'équation aux récurrences du système suivant est donnée comme suit :

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

- Etudier la causalité et l'invariance de ce système
- Est ce un filtre RIF ou RII ?
- Déterminer $H(z)$ et donner le tracé des pôles et zéros, en déduire le rôle de ce filtre :
- Donner les allures approximatives de $h(n)$ et $|H(f)|$
- Déterminer $h(n)$ et tracer la pour les 3 premières valeurs
- On suppose que $f_e = 6$ kHz, quelle sera la sortie du filtre si l'on donne en entrée : un signal bruité par une sinusoïde de 500 Hz puis un signal composé de 2 sinusoïdes l'une de 500 Hz et l'autre de 3000Hz

10. On considère le système LIT décrit par l'équation aux récurrences suivantes :

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3) \text{ et } h(n) = 9\delta(n) + 7\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

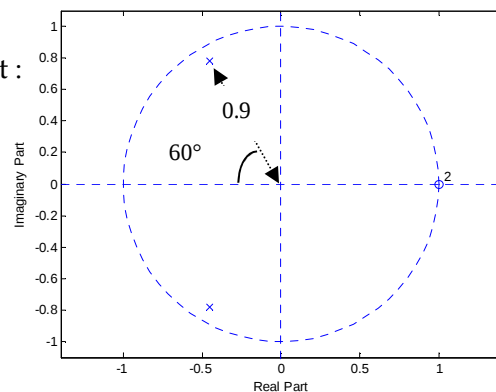
- Ce système est-il invariant ? Justifier.
- Etudier la stabilité et la causalité de $x(n)$, $h(n)$ et $y(n)$.
- Les signaux $x(n)$, $h(n)$ et $y(n)$ sont-ils à énergie finie (ou infinie) ? Justifier
- Déterminer $y(n)$ directement et tracer le.
- Déterminer $y(n)$ en passant par la TZ de $x(n)$ et $h(n)$
- On considère que $x(n)$ et $h(n)$ sont périodiques de période 4, déterminer $y(n)$ de 2 façons.
- Quelle est lien entre la convolution et l'autocorrélation ?

11. On suppose que le tracé des pôles et des zéros d'un système est le suivant :

- Donner les allures approximatives de $h(n)$ et $|H(f)|$ puis en déduire le rôle du filtre
- Déterminer $H(z)$ (On supposera un gain de 1 en $z = -1$)
- Déterminer les coefficients du filtre
- On suppose que $f_e = 3$ kHz, quelle sera la sortie du filtre si l'on donne en entrée :

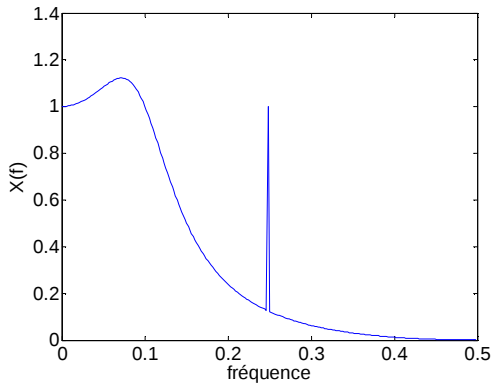
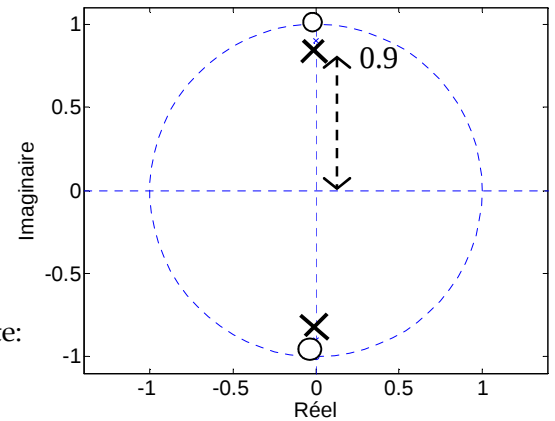
un signal bruité par une sinusoïde de 500 Hz :

un signal composé de 2 sinusoïdes l'une de 1100 Hz et l'autre de 1300Hz



12. On suppose le filtre représenté par le tracé des pôles et des zéros suivant :

- Caractériser le filtre RII ou RIF
- Quel est son rôle ? :
- Donner les pôles et les zéros :
- Donner les allures approximatives de $h(n)$ et $|H(f)|$
- Déterminer $H(z)$ (gain de 1 à $f=0$)
- Déterminer les coefficients du filtre
- Esquisser la TF de la sortie $Y(f)$ si la TF de l'entrée $X(f)$ est la suivante:



13. On suppose le filtre défini par l'équation aux récurrences suivante:

$$y(n) = 0.4y(n-1) - 0.16y(n-2) + 0.5x(n) + x(n-1) + 0.5x(n-2)$$

- Caractériser le filtre RII ou RIF : _____ car _____
- Déterminer $H(z)$:
- Donner les pôles et les zéros
- Le retard de groupe est
- Donner les allures approximatives de $h(n)$ et $|H(f)|$
- Quel est son rôle ? :
- Quelle serait la sortie $y(n)$ si $x(n) = 3 + \exp(\pi j n / 2) + 3 \exp(\pi j n / 4)$. Prendre $f_e = 1$.

TP n°3: Analyse des filtres numériques par la TZ

Rappel : Soit $H(z)$ la transformée en z d'un filtre numérique donné dont la décomposition sous forme fraction rationnelle est donnée par :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$$

Grâce à la seule connaissance du vecteur b et du vecteur a , on peut analyser tout filtre et :

- Déterminer les pôles et les zéros du filtre (et étudier sa stabilité)
- Déterminer la réponse impulsionnelle ou indicielle
- Déterminer la réponse fréquentielle et le retard de groupe (dérivée de la phase), etc.

Quelques fonctions utiles [16]

$s = \text{filter}(b, a, e)$: filtre numériquement les données stockées dans le vecteur e avec le filtre décrit à la fois par le vecteur b (coefficients du numérateur de $h(z)$) et le vecteur a (coefficients du dénominateur de $H(z)$) pour une entrée e . Il faut normaliser l'équation de telle sorte que $a_0 = 1$.

Pour déterminer la réponse indicielle e sera un dirac, pour la réponse impulsionnelle e sera un échelon.

$[H, f] = \text{freqz}(b, a, N, fe)$: retourne N valeurs du gain complexe (Réponse fréquentielle TFD) du filtre numérique échantillonné à la fréquence fe (Hertz), décrit par b et a . Ces valeurs sont stockées dans H et calculées pour N fréquences mises dans f . Les fréquences sont equi-espacées sur l'intervalle $[0, fe/2]$.

$[b, a] = \text{invfreqz}(H, f, nb, na)$: retourne le numérateur b (d'ordre nb) et le dénominateur a (d'ordre na) à partir de la réponse fréquentielle donnée par H et f .

$[h, n] = \text{impz}(b, a, N, fe)$: retourne la réponse impulsionnelle du filtre numérique décrit par b et a . La réponse impulsionnelle est calculée en N instants stockés dans n et espacés de $1/fe$, les valeurs de réponse correspondante sont stockées dans h .

$[\tau, f] = \text{grpdelay}(b, a, N, fe)$: retourne le retard de groupe (dérivée de la phase) du filtre numérique décrit par b et a . La réponse impulsionnelle est calculée en N fréquences mises dans f .

$\text{zplane}(b, a)$: permet de tracer les pôles et les zéros dans le plan complexe.

I. Analyse d'un filtre RII

Soit le filtre $h(n)$ décrit par l'équation aux différences suivantes :

$$y(n) = 1.2 y(n-1) - 0.516 y(n-2) + 0.079 x(n) + 2 \cdot 0.079 x(n-1) + 0.079 x(n-2)$$

- La première étape consiste à déterminer les vecteurs a et b . On calcule $H(z)$ (coefficients en z^{-1}) et on trouve :
Numérateur : $b = [0.079 \ 2 \cdot 0.079 \ 0.079]$ et Dénominateur : $a = [1 \ -1.2 \ 0.516]$
- Puis, par programme on peut : déterminer et tracer la réponse impulsionnelle, la réponse fréquentielle (module et phase), le retard de groupe, les pôles et les zéros, étudier la stabilité, la nature du filtre, etc.

```
clc ; clear all ; close all;
b = [0.079 2*0.079 0.079]; %Numérateur
a = [1 -1.2 0.516]; %Dénominateur
figure (1); zplane(b,a);
N = 32; n=0:N-1; delta = [1; zeros(N-1,1)];
h = filter(b, a, delta); figure(2); stem(n,h);
echelon=ones(1,N); h_ind=filter(b,a,echelon);
figure(3); stem(n,h_ind);
L = 256; fe=1; [H, f] = freqz(b,a,L, fe);
module = abs(H); figure (4); plot(f,module);
% phase = angle(H); figure (5); plot(f,phase);
% [tau, f]=grpdelay(b,a,L, fe); figure (6); plot(f,tau);
% [num,den]=invfreqz(H,f, 2,2)
```

1. Calculer les pôles et zéros de ce filtre (à préparer), correspondent-ils à ceux de la figure 1 ?
2. A partir du tracé des pôles et des zéros, esquisser l'allure de $h(n)$ et $H(f)$ en justifiant vos réponses (à préparer). Confirmer avec les figures 2 et 4.
3. Etudier la stabilité du filtre (à partir du tracé des pôles et de $h(n)$). Quel est le rôle de ce filtre?
4. Quelle valeur de b faut-il changer pour faire de ce filtre un passe-haut?
5. Modifier les valeurs de a pour avoir une réponse impulsionnelle divergente. Le filtre obtenu est-il stable?
6. Enlever les commentaires et comparer les figures 5 et 6. Quel lien les relie ?
7. Quel retard de groupe souhaite-t-on avoir dans la bande passante du filtre ?
8. Rétablir les valeurs par défaut et rajouter les lignes suivantes

```
nom_fich = uigetfile('*.wav', 'Selectionner le fichier son');
[x,fe]=wavread(nom_fich);
sound(x,fe); N=length(x); t=(0:N-1)/fe;
figure;subplot(2,1,1);plot(t,x);
legend('Son original');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude'); axis([0 N/fe -1 1.5]);
y = filter(b, a, x);sound(y,fe)
subplot(2,1,2);plot(t,y);
legend('Son filtré');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude'); axis([0 N/fe -1 1.5]);
```

9. Comparer les deux signaux en utilisant le zoom et commenter.
10. Prendre une petite portion du signal et observer sa TF avant et après filtrage en commentant.

II. Analyse d'un filtre RIF

On considère la récurrence suivante : $y(n)=0.5 x(n)-0.5 x(n-1)$

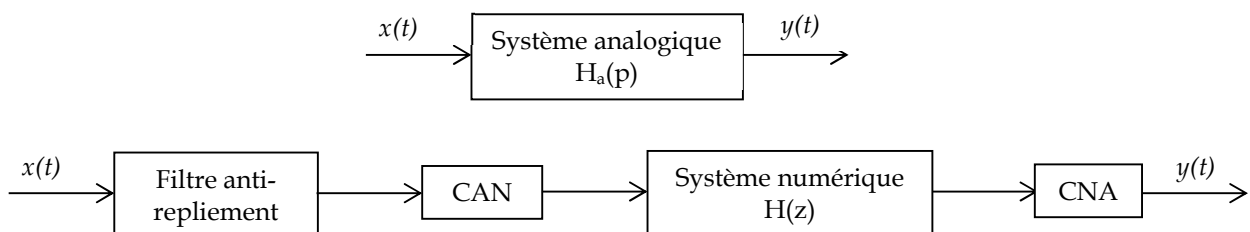
1. Déterminer $h(n)$, les pôles et zéros et esquisser $H(f)$. En déduire le rôle de $H(f)$, puis calculer le retard de groupe (en préparation).
2. Vérifier ces réponses par matlab.
3. Que peut-on dire sur la stabilité, la nature et le retard de groupe de ce filtre?
4. Si l'on remplace l'un des coefficients 0.5 par 1, que devient le retard de groupe?
5. Quelle serait la sortie d'un tel filtre si l'entrée était constante?
6. Rétablir les valeurs par défauts et rajouter les lignes concernant le fichier audio puis commenter.
7. Prendre la même portion du signal et observer sa TF avant et après filtrage en commentant.
8. Refaire le même travail pour $y(n)=\frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 x(n-i)$

IV. Conception des Filtres Numériques RIF

Le traitement numérique a conduit à une amélioration importante des dispositifs de filtrage linéaire notamment en termes de fiabilité, de reproductibilité, de souplesse et de complexité des fonctions réalisables. En outre, les filtres numériques ont aussi d'autres propriétés difficiles qu'il n'est pas aisé de mettre en œuvre dans le cas des filtres analogiques, entre autres : le filtrage numérique en temps réel (transmissions numériques, codage des sons MP3, synthèse de parole, télévision numérique par exemple). La plupart des modèles de filtres analogiques peuvent ainsi être reproduits sous forme numérique. Les éléments physiques (résistance, capacité, inductance, amplificateurs opérationnels) sont en quelque sorte transposés en éléments logiques [17].

1. Synthèse des Filtres numériques et Gabarit analogique

La synthèse d'un filtre est un ensemble de processus qui débute par la définition des caractéristiques du filtre, jusqu'à sa réalisation informatique et/ou électronique, en passant par la détermination de ses coefficients. Pour synthétiser un filtre numérique, on considère connu le gabarit du filtre analogique et on cherche un système numérique caractérisée par une fonction de transfert $H(z)$ à insérer dans le circuit ci-dessus permettant de satisfaire le gabarit analogique.



La détermination de la fonction de transfert d'un filtre numérique, par une méthode directe, n'est pas toujours très simple. Par contre, le problème qui consiste à transformer un filtre analogique en un filtre numérique est relativement simple. De ce fait, de nombreuses méthodes sont proposées pour concevoir un filtre numérique à partir du filtre analogique équivalent. Dans tous les cas, la synthèse d'un filtre numérique est une approximation d'un filtre analogique idéal équivalent. Il est nécessaire de contraindre un certain nombre de paramètres.

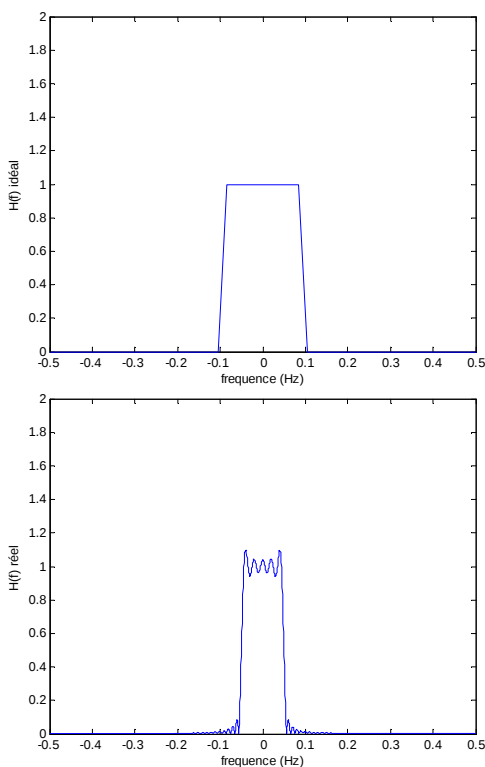
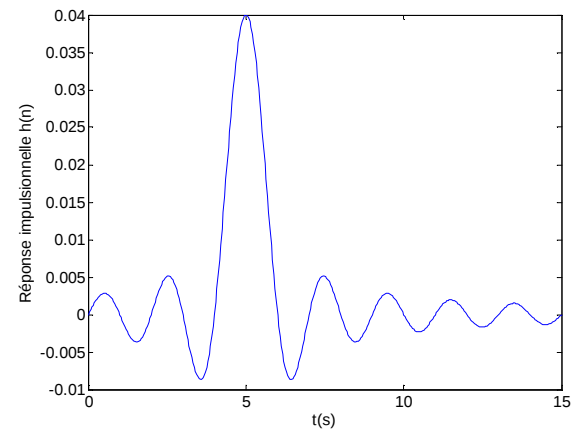
La synthèse d'un filtre numérique comprend les étapes suivantes :

1. la détermination d'une réponse en fréquence idéale souhaitée ;
2. la détermination de la meilleure approximation sous un certain nombre de contraintes (stabilité, rapidité, précision, déphasage linéaire, etc.) ;
3. le choix d'une structure de calcul réalisant le filtre approximé.

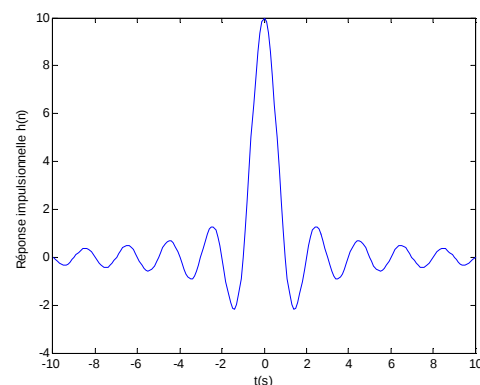
Les fonctions modèles utilisées pour la synthèse des filtres sont soit la réponse impulsionnelle soit la réponse en fréquence (celle-ci est préférée) de filtres analogiques connus. Si l'on emploie la réponse impulsionnelle, les éléments $h(n)$ de la réponse impulsionnelle numérique sont obtenus en calculant $h(t)$, la réponse impulsionnelle du filtre analogique, aux instants $t=nT_e$.

Rappelons que les filtres idéaux présentent un déphasage linéaire et ne sont pas physiquement réalisables, car les réponses fréquentielles idéales correspondent à une réponse temporelle non-causale. Par exemple, en considérant le filtre passe-bas $H(f) = \Pi(f) e^{-2\pi j f T}$, on obtiendra un sinc décalé de T .

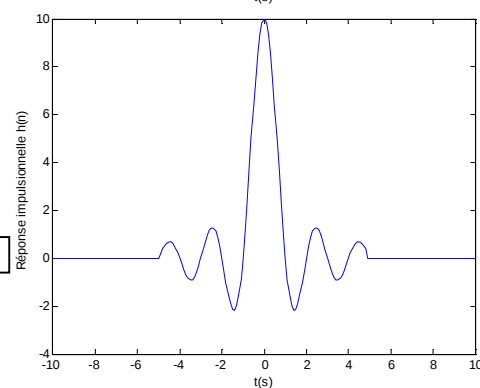
On peut observer qu'il faut annuler une partie du signal. De ce fait, il n'est plus possible d'obtenir un filtre passe-bas idéal (droit et avec une droite de transition perpendiculaire). Il s'ensuit que les filtres qui vont pouvoir être réellement synthétisés n'ont pas de réponse fréquentielle correspondant à la fonction porte, mais pourront s'en rapprocher.



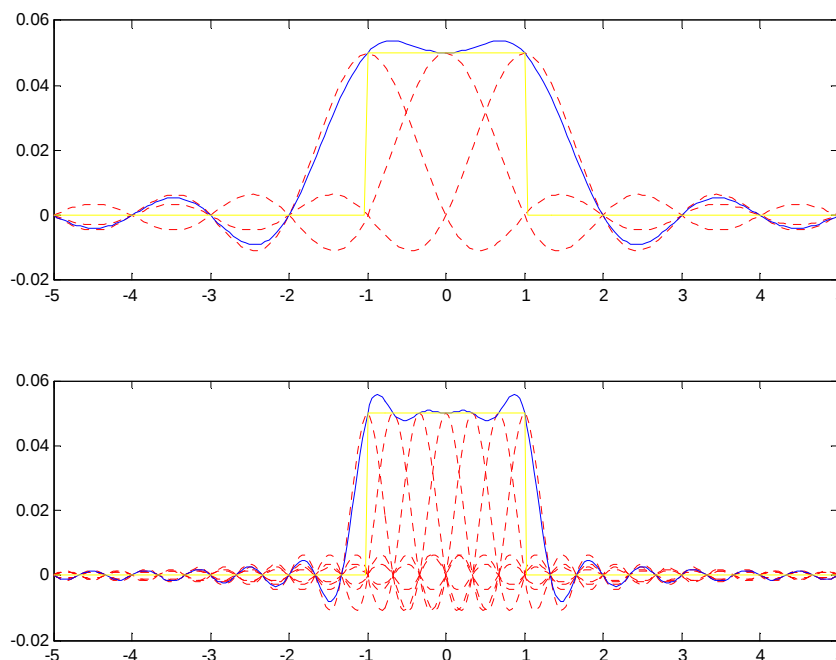
TF



TF



Comme l'illustre la figure suivante, la troncature (multiplication par une porte de largeur NT_e) du sinc dans le domaine temporel se traduira par une convolution dans le domaine fréquentiel du filtre idéal avec un sinc s'annulant tous les NT_e . Pour de grandes valeurs de N , les sinc dans la bande passante se compenseront les uns les autres mais autour des points de discontinuité (fréquence de coupure), les ondulations restent apparentes.



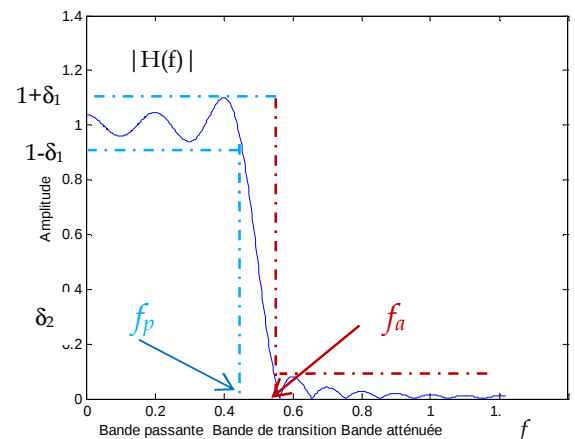
On peut observer que les différences vis-à-vis du filtre idéal (soit la fonction porte) sont principalement les ondulations dans la bande passante et dans la bande atténuée ainsi que la largeur de la transition.

C'est ainsi que les spécifications du filtre vont être définies par un gabarit fréquentiel linéaire ou en dB (décibels). Ce gabarit indique la ou les fréquences de coupure, la largeur de la bande de transition minimale souhaitée, le maximum d'ondulation de la bande passante et de la bande atténuée, la fréquence d'échantillonnage et éventuellement l'ordre maximal permis.

Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre n'est autre que l'ensemble des caractéristiques du filtre, à savoir :

- la bande passante (BP) de 0 jusqu'à f_p
- la bande atténuée (ou coupée BA) de f_a jusqu'à $f_q/2$
- Le gain du filtre dans la bande passante.
- L'atténuation du filtre en bande coupée f_a .
- la largeur $\Delta f = f_a - f_p$ de la zone de transition $\Rightarrow f_c = f_a + \Delta f / 2 = (f_a + f_p) / 2$
- l'amplitude des oscillations en bande passante :
 $\delta_1 \Rightarrow A_p = 20 \log(1/\delta_1)$ ondulation permise en BP
- l'amplitude des ondulations en bande atténuée :
 $\delta_2 \Rightarrow A_a = -20 \log(\delta_2)$ ondulation permise en BA



En pratique, plus les fréquences f_a et f_p sont proches, plus l'ordre du filtre devra être élevé. Pour un filtre idéal, ces valeurs seraient confondues

2. Synthèse des filtres RIF

L'emploi des filtres RIF peut se révéler attrayant eu égard à ses nombreux avantages : stabilité inconditionnelle (Tous les pôles sont en 0), phase linéaire possible. Néanmoins, ils présentent l'inconvénient de nécessiter un plus grand nombre de coefficients que les filtres RII pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles à cause de l'absence de pôles hors 0. Ainsi, toute fonction de filtrage numérique stable et causale peut être approchée par la fonction de transfert d'un filtre RIF.

Rappelons que la sortie d'un filtre RIF va s'exprimer comme une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrée :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \quad \text{d'où} \quad H(z) = \sum_{n=0}^N b_n \cdot z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^N b_n \cdot e^{-2\pi j f n T_e}$$

Ainsi, les coefficients de pondération ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre. Ces coefficients constituent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction de transfert $H(f)$ (voir TFTD chapitre 3)

Du fait qu'un filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale (non rationnelle), il ne peut être obtenu par transposition d'un filtre continu. Les deux méthodes les plus utilisées pour l'approximation des filtres numériques RIF sont alors:

- o Développement par série de Fourier : cette série est ensuite tronquée par des fonctions fenêtres pour limiter la réponse impulsionnelle. Les coefficients de Fourier coïncident avec les échantillons de la réponse impulsionnelle du Filtre.
- o Echantillonnage de la réponse fréquentielle : Cette méthode fait appel à la TFD. Celle-ci est appliquée aux coefficients recherchés b_i pour obtenir une suite fréquentielle qui corresponde à la réponse fréquentielle du filtre.

Il existe d'autres méthodes telles les méthodes d'optimisation qui sont basées sur la minimisation d'un critère d'erreur entre la courbe réelle et le filtre idéal [9].

3. Méthode de la fenêtre

Cette technique consiste, connaissant l'expression analytique $H(f)$ de la réponse fréquentielle continue (dont la formulation mathématique connue) à approcher, à déterminer par utilisation de la transformée de Fourier à temps discret inverse, la réponse impulsionnelle. Cette réponse temporelle non causale obtenue sera retardée pour la rendre causale [18]. Ainsi :

1. A partir du gabarit idéal du filtre, on détermine les coefficients du filtre en limitant le calcul à N valeurs réparties symétriquement autour de $n=0$. Puis, on calcule de la TFTD inverse du filtre idéal qui nous permettra de retrouver les échantillons de la réponse impulsionnelle soient les coefficients du filtre :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df & N \text{ impair} \\ \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{-j\pi f T_e} e^{2\pi j f n T_e} df & N \text{ pair} \end{cases}$$

2. Cette méthode produit une série infinie de coefficients, on limite, alors la réponse impulsionnelle à N échantillons (troncature). Sachant que la troncature induit des ondulations, on peut faire appel aux fenêtres de pondération pour les atténuer. Ainsi, la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ sera multipliée par la fenêtre discrète $w_N(n)$ de longueur N:

$$h'_N(n) = h(n) \cdot w_N(n). \text{ (Choix de la fenêtre : voir chapitre 3)}$$

3. Il ne reste plus qu'à décaler la réponse impulsionnelle $h(n)$ pour avoir une solution causale.

Remarque : Pour le choix de f_c il faudra faire attention aux fréquences de coupure à prendre en compte. Afin d'avoir de bons résultats lors de la synthèse, ce ne sont pas les fréquences de coupure du filtre idéal qu'il faut utiliser mais il faut déplacer celles-ci afin de les centrer dans la zone de transition. Pour un passe-bas, l'augmenter de la demi zone de transition (Δf), soit $f_p + \Delta f$ et pour un passe-haut, la diminuer de la demi zone de transition. Pour un passe-bande, diminuer la première fréquence de coupure de la demi zone de transition et augmenter la seconde de la demi zone de transition, pour un rejeteur de bande, on fera l'inverse.

Exemple :

- Calcul de la réponse impulsionnelle idéale (cas N impair)

$$h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df$$

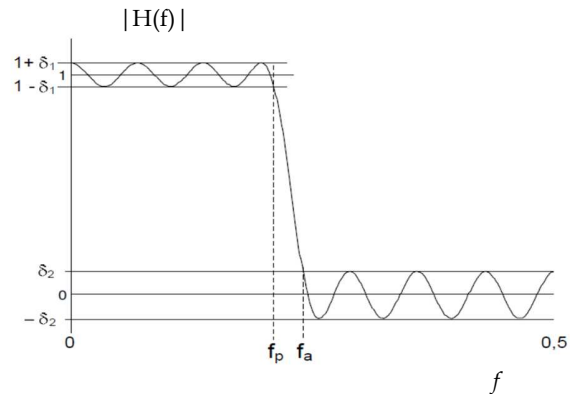
$$\text{On pose } f_c = (f_p + f_a)/2 \Rightarrow h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_c}^{f_c} e^{2\pi j f n T_e} df = \frac{1}{2\pi j n f_e T_e} \left[e^{2\pi j f n T_e} \right]_{-f_c}^{f_c}$$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{e^{2\pi j f_c n T_e} - e^{-2\pi j f_c n T_e}}{2\pi j n} = \frac{\sin(2\pi f_c n T_e)}{\pi n} = \frac{\sin(\pi n f_c / (f_e/2))}{\pi n}$$

On normalise les fréquences par rapport à $f_e/2$ (ou f_e) c.a.d que l'on remplace partout f_c par $f_c/(f_e/2)$, on obtient alors :

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n f_c / (f_e/2))}{\pi n} \frac{f_c / (f_e/2)}{f_c / (f_e/2)} = f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$$

Tout aussi facilement, on peut déterminer les réponses impulsionnelles d'un passe-haut ($1-H(f)$), d'un passe-bande (différence de 2 passe-bas) et d'un coupe-bande données. Les valeurs de la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ sont données au tableau suivant. Les fréquences f_c indiquées dans ce tableau (fréquences de coupure désirées) s'expriment également en fréquences normalisées (divisées par $f_e/2$).



	Réponse impulsionnelle h(n)	
Type de filtre	$h(n)$ pour $n \neq 0$	$h(n)$ $n=0$
Passe-bas	$f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$	f_c
Passe-haut	$-f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$	$1-f_c$
Passe-bande	$f_{c2} \frac{\sin(\pi n f_{c2})}{\pi n f_{c2}} - f_{c1} \frac{\sin(\pi n f_{c1})}{\pi n f_{c1}}$	$f_{c2} - f_{c1}$
Rejécteur de bande	$f_{c1} \frac{\sin(\pi n f_{c1})}{\pi n f_{c1}} - f_{c2} \frac{\sin(\pi n f_{c2})}{\pi n f_{c2}}$	$1-(f_{c2} - f_{c1})$

- Limitation du nombre d'échantillons à N

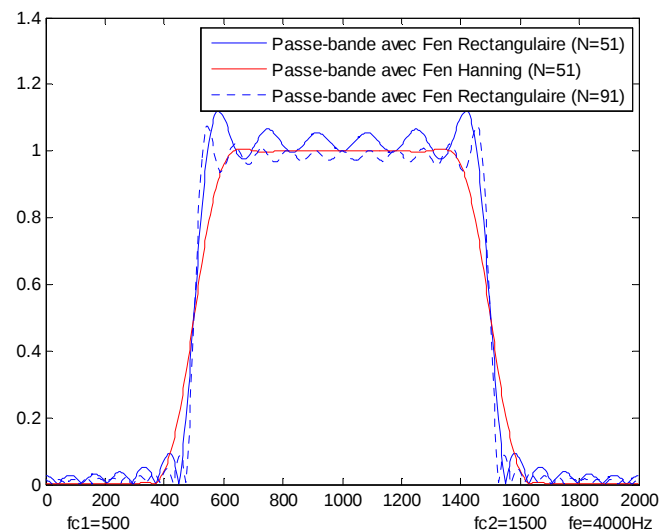
$$h'_N(n) = h(n) \cdot w(n)$$

$$\text{si } w(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \Rightarrow |W(f)| = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

$$H'_N(f) = H(f) * W(f)$$

La troncure temporelle introduit des ondulations et induit une zone de transition moins rapide déterminée par la largeur du lobe principal. Un compromis est à faire entre la raideur et l'amplitude des ondulations. Notons que cette méthode donne des ondulations de même amplitude dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Remarque: Si N augmente, l'étendue des oscillations diminue (la réponse est plus plate) et la largeur de la bande de transition décroît (Δf faible). On peut observer que les oscillations les plus fortes tendent à se concentrer aux discontinuités. Ces dernières ne diminuent pas si N augmente : on a toujours un dépassement à peu près égal à 9% se concentrant aux points de discontinuité : c'est le phénomène de Gibbs (Voir TP n°5). Pour diminuer les oscillations : on utilise les fenêtres de pondération qui permettent d'obtenir de forte atténuation des oscillations mais cela se fait au détriment de la largeur de la bande de transition qui devient plus grande.



Pour la choix de la fenêtre de pondération, on procédera comme suit : En fonction de l'atténuation $\delta 1$ requise dans la spécification du filtre, on choisira le type de fenêtre $w(n)$ à utiliser. Puis en fonction de la largeur de la zone de transition Δf (spécifiée aussi au départ) et du type de la fenêtre $w(n)$, on déterminera la longueur de la réponse impulsionnelle N.

Fenêtres $w_N(n)$	Largeur de Transition : $\Delta f (2\Delta f / f_e)$	Atténuation en bande atténuée A
$w_{Rect}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$1.8/N$	21
$w_{Han}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$6.2/N$	44
$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$6.6/N$	53
$w_{Black}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$11/N$	74

Exemple : On veut synthétiser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f = f_e/5$ et une ondulation en bande atténuée > 50 db (voir TP n°4)

a- On normalise les fréquence $f_c / (f_e/2) \Rightarrow f_c = 0.2$ $\Delta f / (f_e/2) \Rightarrow \Delta f = 0.4$

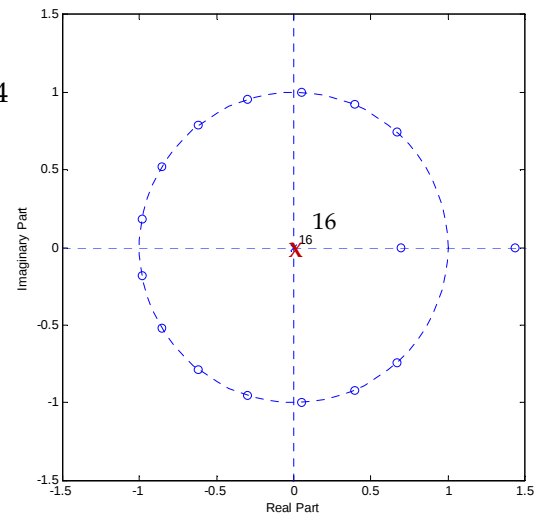
b- $h(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n/5}$

c- On choisit $w(n)$ comme étant la fenêtre de Hamming

($A_a = 20 \log(\delta_2) = -53$) $\Rightarrow \Delta f = 6.6/N$

d- On calcule $N = 6.6/\Delta f = 16,5$ on prend $N = 17$

e- on calcule les valeurs $h(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n/5}$ pour $-8 \leq n \leq 8$



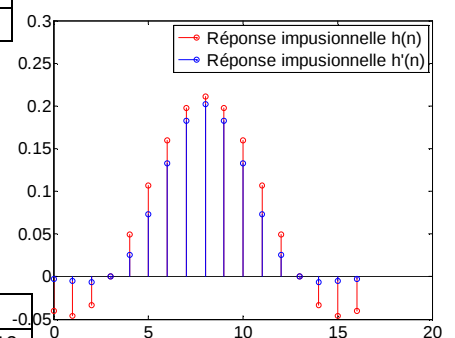
n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$h(n)$	-0,0399	-0,0456	-0,0329	0	0,0493	0,1064	0,1597	0,1974	0,2110
n	1	2	3	4	5	6	7	8	
$h(n)$	0,1974	0,1597	0,1064	0,0493	0	-0,0329	-0,0456	-0,0399	

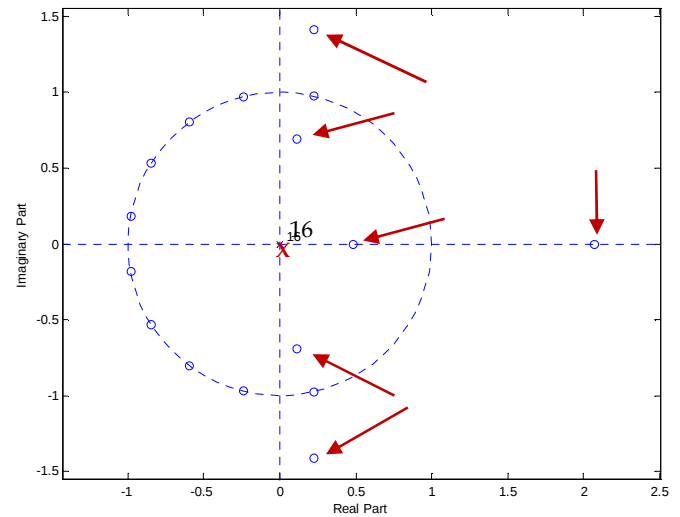
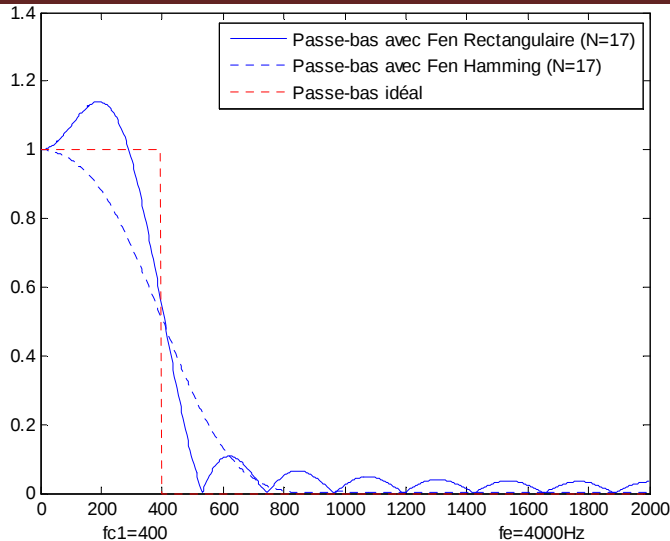
f- On multiplie $h(n)$ par $w(n)$ pour trouver $h'_N(n) = h(n) \cdot w(n)$

$$h'_N(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n/5} \left[0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{16}\right) \right]$$

g- On translate le résultat de 8 échantillons.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(n)$	-0,0399	-0,0456	-0,0329	0	0,0493	0,1064	0,1597	0,1974	0,2110
$h'_N(n)$	-0,0031	-0,0050	-0,0067	0	0,0255	0,0730	0,1325	0,1826	0,2023
n	9	10	11	12	13	14	15	16	
$h(n)$	0,1974	0,1597	0,1064	0,0493	0	-0,0329	-0,0456	-0,0399	
$h'_N(n)$	0,1826	0,1325	0,0730	0,0255	0	-0,006	-0,005	-0,0030	





On peut remarquer l'emplacement de zéros autour du premier 0 en 1 permet d'atténuer les lobes secondaire et de maintenir une réponse cste autour du zéro.

4. Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

La méthode de synthèse par échantillonnage en fréquence est appliquée depuis la réponse fréquentielle d'un filtre continu idéal $H(f)$ dont on ne connaît pas la formule mathématique (on ne peut alors calculer $h(n)$ par TF inverse de $H(f)$). On utilise alors la transformation de Fourier Discrète inverse. C'est-à-dire que l'on "échantillonne" la réponse désirée dans le domaine fréquentiel, on obtient N points de cette réponse fréquentielle auxquels on fait correspondre N points de la réponse temporelle équivalente obtenus par TFD inverse [18] comme suit :

On commence par échantillonner $H(f)$:

$$H(k) = H(f) \Big|_{f=k/N} \quad k = -(N-1)/2 \text{ à } (N-1)/2$$

puis on applique la TFD inverse
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} H(k) e^{2\pi j k n / N}$$

Cette méthode de synthèse est très simple et permet de réaliser toute forme de filtre (chose qu'on ne peut réaliser avec la méthode précédente). Cependant, cette méthode de synthèse ne garantit que les points fréquentiels $H(k)$. Entre ces points, la valeur de $H(f)$ n'est pas maîtrisée, il peut y avoir des oscillations qui ne sont pas également réparties avec un maximum d'erreur entre la réponse idéale et la réponse obtenue se situant autour de la bande de transition. Pour obtenir la réponse en fréquence du filtre finalement obtenu, on peut par exemple appliquer une TFD à la réponse impulsionnelle $h(n)$ de taille N obtenue, après avoir ajouté un grand nombre de zéros. Par ailleurs, du fait de l'emploi d'une TFD inverse sur N points, la réponse impulsionnelle $h(n)$ obtenue est périodique de période N bien que la réponse impulsionnelle idéale souhaitée ne soit pas de durée limitée.

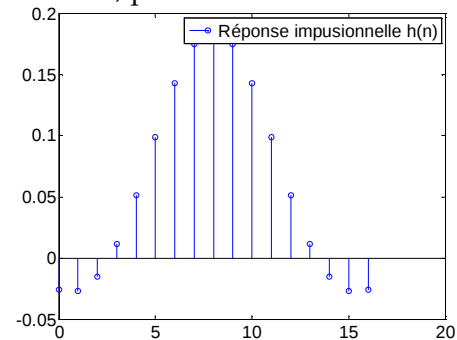
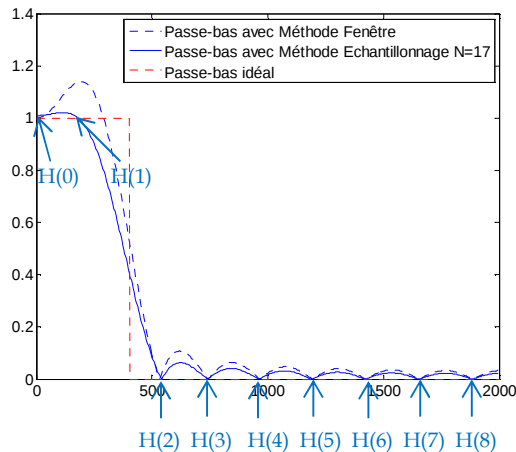
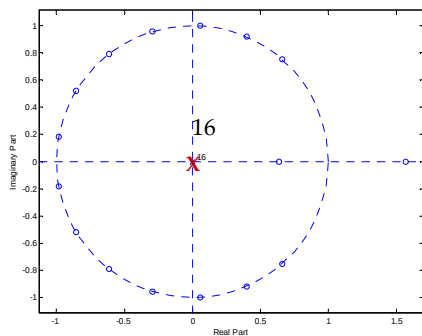
Exemple : On cherche à réaliser sous forme numérique un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f < f_e/16$. On prend donc $N=17$, ce qui nous donne $\Delta f = 0.0588$ (voir TP n°4)

On a $N = 17$, $H(0)=H(-1)=H(1)=1$ et $H(2)=H(-2)=\dots=H(8)=H(-8)=0$. On peut en déduire, par transformation de Fourier discrète (TFD), les valeurs de la réponse impulsionnelle

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} H(k) e^{2\pi j k n / N} \quad h(n) = \frac{1}{17} (1 + e^{-2\pi j n / 17} + e^{2\pi j n / 17})$$

$$h(n) = \frac{1}{17} (1 + 2 \cos(2\pi n / 17)) \quad \text{pour } -8 \leq n \leq 8$$

Enfin, pour rendre ce filtre réalisable physiquement, on translate cette réponse impulsionnelle de 8 échantillons.

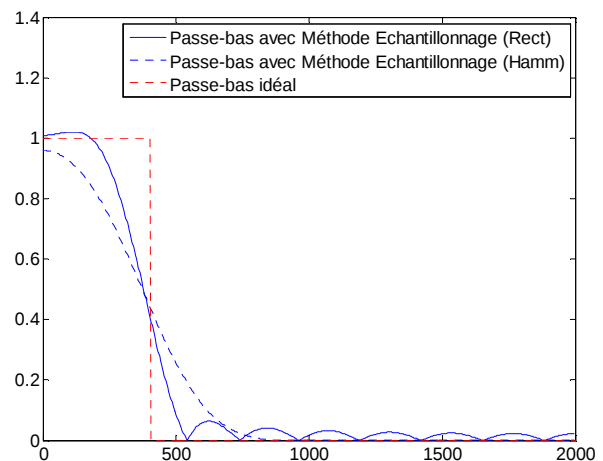
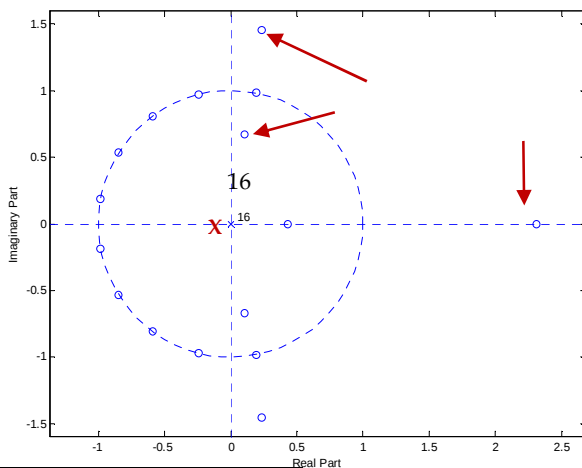


Sachant que $H(k)^*=H(-k)$ pour un signal $h(n)$ réel, on peut, de manière générale, démontrer que :

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \right) \quad \text{pour } -N/2 \leq n \leq N/2$$

La réduction des oscillations peut aussi s'obtenir à travers le fenêtrage. Ci-dessous les coefficients du filtre $h(n)$ suivis de ceux obtenus après fenêtrage de Hamming $h'_N(n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(n)$	-0,0257	-0,0269	-0,0153	0,0114	0,0514	0,0985	0,1430	0,1749	0,1865
$h'_N(n)$	-0,0020	-0,0031	-0,0033	0,0041	0,0279	0,0705	0,1237	0,1688	0,1865
n	9	10	11	12	13	14	15	16	
$h(n)$	0,1749	0,1430	0,0985	0,0514	0,01139	-0,0153	-0,0269	-0,0257	
$h'_N(n)$	0,1688	0,1237	0,0705	0,0279	0,0041	-0,0032	-0,0031	-0,0020	

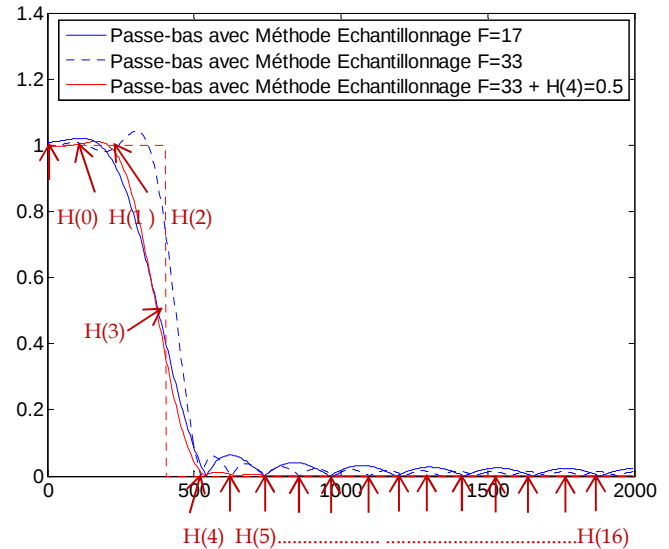
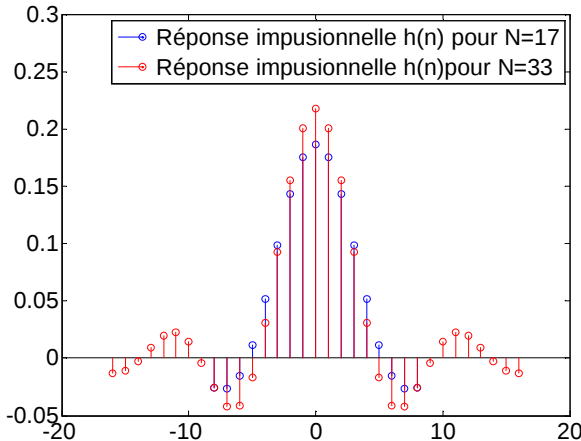


Remarques: Pour le choix de N, il faut veiller à ce que f_e/N soit inférieur à Δf .

Par ailleurs, on peut quelques peu atténuer les ondulations en adoucissant les transitions dans la transmittance du filtre. Pour cela, on introduira 0.5 entre 1 et 0, Mais de ce fait Δf augmentera, on ajustera, alors, la valeur de N en conséquence ($2\Delta f < f_e/16$). Ce qui nous fournira une valeur de N de 33 et $\Delta f = 0.0303$. On prendra $H(3) = H(-3) = 0.5$. Ainsi $H(0) = H(-1) = H(1) = H(2) = H(-2) = 1$ et $H(3) = H(-3) = 0.5$ et $H(4) = H(-4) = \dots = H(32) = H(-32) = 0$.

$$h(n) = \frac{1}{33} (1 + 2 \cos(2\pi n / 33) + 2 \cos(4\pi n / 33) + \cos(6\pi n / 33))$$

pour $-16 \leq n \leq 16$



5. Constitution et réalisation des filtres numériques

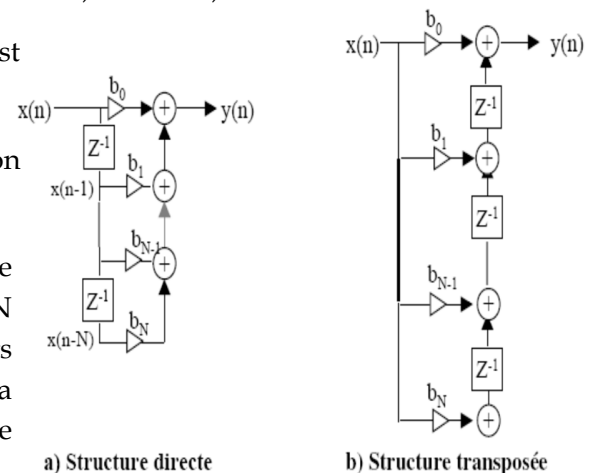
Un filtre numérique est généralement constitué des éléments suivants : un ou plusieurs organes de retard (ce sont des registres à décalage jouant le rôle de mémoires retardées), pilotés par une horloge de période; des opérateurs arithmétiques (additionneurs et multiplieurs); des registres fournissant les coefficients de pondération du filtre [18].

La réalisation concrète d'un filtre numérique consistera en fait à matérialiser l'algorithme de calcul pour la structure retenue. On aura la possibilité de travailler : Soit en logique câblée (assemblage d'organes logiques, tels que portes, mémoires, etc ...), soit en logique programmée (organisation autour d'un processeur de traitement du signal (DSP) ou, même, utilisation d'un microprocesseur(micro-ordinateur) standard).

La structure canonique directe (transversale ou non récursive) est donnée ci-contre:

Un filtre RIF nécessite (N-1) opérations de multiplication, N opération d'addition pour chaque nouvel échantillon à filtrer.

On peut également exprimer la complexité en nombre de multiplication-accumulation qui, dans le cas d'un filtrage RIF, vaut N [9]. Le coût mémoire d'un filtrage RIF est de $2(N+1)$ [(N+1) coefficients b_i et (N+1) points mémoire pour le vecteur des entrées $x(i)$]. Si la fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée vaut f_e , cela signifie que le filtre devra être réalisé en un temps T_{calcul} inférieur à $T_e = 1/f_e$.



Série n° 4

1. Obtenir les coefficients d'un filtre à RIF passe-bas par la méthode de fenêtrage pour obtenir les spécifications suivantes :

- Fréquence de coupure idéale : $f_c=1.75$ kHz
- Largeur de transition : $\Delta f=0.5$ kHz
- Atténuation en bande atténuée : $A=-20 \log_{10}(\delta) > 51$ dB avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$
- Fréquence d'échantillonnage : $f_e=8$ kHz

Solution : $\Delta f=0.125$ $f_c=0.4375$ $h(n) = f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c} = \frac{\sin(\pi n 0.4375)}{\pi n}$ pour $k \neq 0$ et $h(0)=f_c$

hamming $\Rightarrow N=53$

Les coefficients du filtre sont symétriques, il suffira par conséquent de calculer les valeurs de $h(0)$ à $h(26)$.

$h(0) = f_c = 0.4375$ $w(0) = 0.54 + 0.46 \cos(0) = 1$ $h(0) = h_N(0)$ $w(0) = 0.4375$

$$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{52}\right) & \text{pour } |n| \leq 26 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$h(0)=0.4375$, $h(1)=h(-1)=0.311$, $h(2)=h(-2)=0.060$, $h(3)=h(-3)=-0.0856$, $h(4)=h(-4)=-0.053$, $h(5)=h(-5)=0.0325$, $h(6)=h(-6)=0.0434$, $h(7)=h(-7)=-0.0075$, $h(8)=h(-8)=-0.0319$,, $h(26)=h(-26)=-0.0009$.

Pour rendre le filtre causal, on ajoute 26 à chacun des indices.

2. On souhaite approcher un filtre idéal passe-haut par un filtre à réponse impulsionnelle finie, synthétisé par la méthode du fenêtrage. Ce filtre doit répondre aux spécifications suivantes :

- ✓ Fréquence de coupure $f_c=2$ kHz
- ✓ Largeur de transition : $\Delta f=0.5$ kHz
- ✓ Atténuation en bande atténuée : $A=-20 \log_{10}(\delta) > 40$ dB avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$
- ✓ Fréquence d'échantillonnage : $f_e=8$ kHz
- Déterminer l'expression mathématique exacte de $h'(n)$.
- Calculer $h'(0)$ et tracer approximativement $h'(n)$.
- Quel est l'intérêt du fenêtrage et quel est son inconvénient ?
- Quel est l'inconvénient de cette technique de synthèse des filtres ?
- Citer un avantage et un inconvénient de la synthèse par des filtres RIF de même que par les RII.

Solution : $\Delta f=0.5$ $f_c=0.125$ $h(n) = -f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$ pour $k \neq 0$ et $h(0)=1-f_c$ $A>40$ Hanning $\Rightarrow N=49$

$h'(n) = -0.5 \frac{\sin(\pi n / 2)}{\pi n / 2} (0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{48}))$ $h'(0) = 0.5$

3. Soit un filtre passe-bas de coupure 0.25 et $\Delta f < 0.08$ ($f_e=1$). On souhaite synthétiser un filtre d'ordre par la méthode de l'échantillonnage fréquentielle.

Solution $f_c=0.25$, $f_e=1$ et $N=13$ ainsi :

$(f_e/N=0.07, 2f_e/N=0.15, 3f_e/N=0.23, 4f_e/N=0.30) \Rightarrow H(0)=H(1)=H(-1)=H(2)=H(-2)=H(3)=H(-3)=1$ et les autres à 0

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) = \frac{1}{13} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^6 H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{13}\right) \right)$$

$$h(n) = \frac{1}{13} \left(H(0) + 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{13}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi n}{13}\right) + 2 \cos\left(\frac{6\pi n}{13}\right) \right)$$

4. Un filtre numérique est à implanter. La fréquence d'échantillonnage est fixée à 8kHz. Idéalement, on veut supprimer la bande fréquentielle de 1kHz à 2 kHz.

- Tracez, pour ce filtre idéal, le module de $H(f)$
- Si on utilise la méthode d'échantillonnage en fréquence en prenant N points sur cette réponse idéale, quel serait $h(n)$ pour $N=21$.
- Quelle est l'inconvénient de cette méthode? comment y remédier

Solution :

$f_{c1} = 1$, $f_{c2} = 2$ $f_e = 8$ et $N=21$ ainsi : $(f_e/N=381, 2f_e/N=762, 3f_e=1143, 4f_e/N=1523, 5f_e/N=1905, 6f_e/N=2286)$
 $\Rightarrow H(3)=H(-3)=H(4)=H(-4)=H(5)=H(-5)=0$ et les autres à 1.

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) = \frac{1}{20} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^2 H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + 2 \sum_{k=6}^{10} H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right)$$

$$h(n) = \frac{1}{21} \left(H(0) + 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{21}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi n}{21}\right) + 2 \cos\left(\frac{12\pi n}{21}\right) + \dots + 2 \cos\left(\frac{20\pi n}{21}\right) \right)$$

La TF de ce $H(n)$, va effectivement passer par ces points mais en dehors de ces points le comportement du filtre peut dévier du filtre idéal. Pour améliorer, il faudra prendre plus de points, d'où un filtre plus long.

Exercices supplémentaires

1. Au cours de la transmission d'un signal numérique (échantillonné à une fréquence de 2,5 kHz), il a été affecté d'un bruit localisé entre les bandes de fréquence 350 Hz et 550 Hz. On veut éliminer le bruit par l'emploi d'un filtre RIF possédant une bande de transition $\Delta f=100$ Hz. Concevoir ce filtre :

A] Par la méthode du fenêtrage. On souhaite une atténuation en bande atténuée $A=-20 \log_{10}(\delta) > 20$ dB.

- Tracer $H(f)$ idéal
- Déterminer $h(n)$ et l'ordre N du filtre
- Calculer $h(0)$, $h(1)=h(-1)$
- Tracer alors approximativement $H(f)$

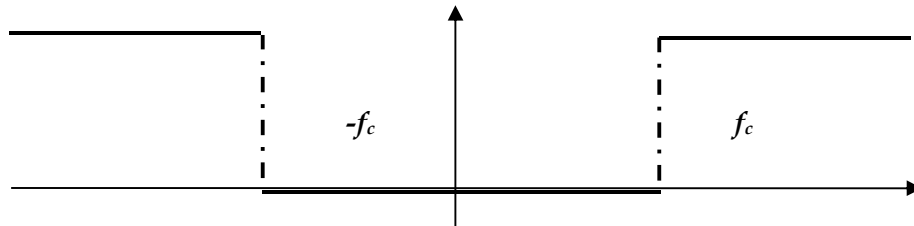
B] Par la technique de l'échantillonnage fréquentiel

- Déterminer N
- Donner les valeurs de $H(k)$ et son tracé
- Déterminer $h(n)$
- Comparer ces 2 techniques de synthèse d'un filtre RIF

2. Au cours de la transmission d'un signal numérique (échantillonné à une fréquence de 5 kHz), il a été affecté par un bruit sinusoïdal de fréquence $f_0=250$ Hz. On veut éliminer le bruit par l'emploi d'un filtre possédant une bande de transition $\Delta f=\pm 50$ Hz à -3db. Concevoir un filtre RIF par la méthode du fenêtrage. On souhaite une atténuation en bande atténuée $A=-20 \log_{10}(\delta) > 40$ dB avec $f_{c1,2}=f_0 \pm \Delta f$

- Déterminer $h(n)$ et l'ordre N du filtre
- Calculer $h'(0)$

2. On suppose le filtre $H(f)$ suivant :



On veut déterminer le filtre numérique $h(n)$ équivalent par

- a) la méthode de l'échantillonnage fréquentiel.
- b) la méthode des fenêtres

Le filtre doit répondre aux spécifications suivantes $f_c = f_e/4$ et une largeur de transition $\Delta f < f_e/16$

- Déterminer et tracer $H(k)$ pour a)
- Déterminer $h(n)$
- Tracer $H(f)$ réel du filtre déterminé
- Comment sera le retard de groupe ? Justifier
- Quelle serait la sortie $y(n)$ si $x(n) = 1 + \cos(0.6\pi n) + 3 \cos(0.4\pi n)$. Prendre $f_e = 1$.

TP n°4: Synthèse des filtres RIF

But du TP : Dans ce TP, on teste deux méthodes différentes pour synthétiser un filtre RIF: méthode de séries de Fourier (ou méthode des fenêtres) et méthode de la TFD dite par échantillonnage fréquentielle.

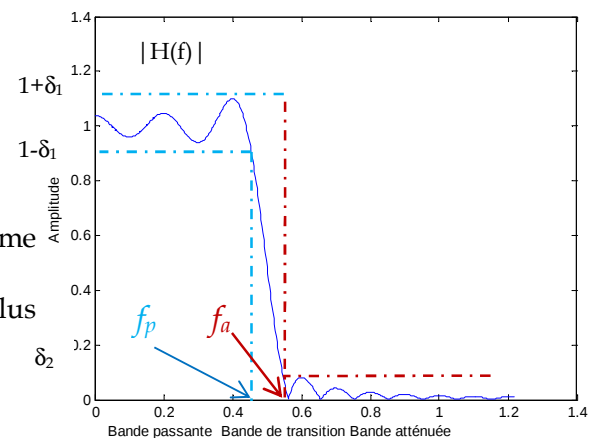
I. Rappels

Un filtre de réponse impulsionnelle finie (RIF) possède une fonction de transfert polynomiale. Il ne peut pas être obtenu par transposition d'un filtre continu, comme cela est fait pour les filtres RII. Les filtres RIF présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de coefficients pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles. Mais par contre, ils sont inconditionnellement stables. On peut synthétiser des filtres RIF à phase linéaire, c'est-à-dire à temps de propagation de groupe constant.

Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre n'est autre que l'ensemble des caractéristiques du filtre, à savoir :

- Le gain du filtre dans la bande passante.
- L'atténuation du filtre en bande coupée f_a .
- La fréquence de coupure f_c , on l'exprime souvent sous forme normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage.
- La largeur de bande de transition Δf souhaitée qui doit être la plus petite possible.
- Les éventuelles oscillations en bande passante et/ou atténuée.



- La détermination des coefficients d'un filtre RIF par la méthode de la fenêtre est réalisée par la fonction Matlab FIR1. Pour utiliser la technique d'échantillonnage de la réponse fréquentielle, on emploiera la fonction Matlab FIR2.

II. Mise en avant du phénomène de Gibbs

```
clc; clear all; close all;
Te=0.2; fe=1/Te; N=50; t = Te*(-N/2:N/2); N=length(t); h = Te*sinc(t);
figure; subplot(2,1,1); plot(t,h); grid; xlabel('t'); ylabel('Amp'); title('Sinc tronqué')
NF=2048; H=fft(h,NF); H=fftshift(H); axe_f=fe*(-1/2:1/NF:1/2-1/NF);
subplot(2,1,2); plot(axe_f, abs(H)); grid; xlabel('f'); ylabel('Amp'); title('TF Sinc tronqué')
```

1. Identifier ce filtre
2. Expliquer la provenance des oscillations observées.
3. Utiliser le zoom pour mesurer le dépassement en bande passante (en %).
4. Déterminer f_a , f_p la largeur de la bande de transition puis f_c
5. Prendre $N=100$ puis 500 puis 1000 et mesurer à nouveau le dépassement et les 3 fréquences. Commenter.
6. Que représente N ? Quel est l'inconvénient d'augmenter N ?
7. Comment réduire les oscillations?
8. Choisir un fenêtrage et l'appliquer puis commenter.

III. Méthode des fenêtres

Pour synthétiser un filtre passe-bande, par la méthode des fenêtres, répondant aux spécifications suivantes: $f_{c1} = 500$ Hz, $f_{c2} = 1$ kHz, $f_e = 4$ kHz, $N_{\text{Coeff}} = 47$, on procède comme suit :

```

clear all; close all; clc;
fc1 = 500 ;           %Début de la BP
fc2 = 1000;          %Fin de la BP
fe = 4000;           %Fréquence d'échantillonnage
fc1N = fc1/(fe/2);   fc2N = fc2/(fe/2); %Normalisation de fc1 etfc2
NbCoeff = 47;        %Nombre de coefficients
N=NbCoeff-1 ;        %Ordre du filtre
h = FIR1(N,[fc1N fc2N], 'band',rectwin(NbCoeff), 'scale') ;
[H F]= freqz(h, 1, 512, fe); % Calcul de H(f)
subplot(2,2,1);hold on; stem(h,'b'); grid; %Tracé de la réponse impulsionnelle,
subplot(2,2,2);hold on;plot(F,abs(H)); grid; %Tracé du spectre d'amplitude
subplot(2,2,3);hold on; plot(F,20*log10(abs(H))); grid %Tracé du spectre d'amplitude en db
subplot(2,2,4);hold on; zplane(h,1);grid; %Tracé des pôles et zéros

```

1. Donner l'expression théorique de ce filtre.
2. Calculer Δf réelle sachant que Δf normalisée soit $\Delta f / (fe/2) = 1.8/N$ théorique puis déterminer la (pratiquement) à partir du graphe en employant les valeurs à $1-\delta_1$ et la tangente à δ_2 .
3. Faites de même pour l'atténuation en db. Dépend-elle de N?
4. Reprendre les questions 2 et 3 pour un fenêtrage de Hanning
`h = FIR1(N,[fc1N fc2N], 'band', hann(NbCoeff), 'scale')`
5. Superposer les nouveaux graphes pour les 4 précédents graphes (changer de couleur) et commenter.
6. Comment réduire Δf pour une même fenêtre? Quel est l'inconvénient de cette solution?
7. Pour NbCoeff = 23, comparer la répartition des zéros pour les 2 fenêtres en établissant la relation avec les tracés des réponses en fréquence leur correspondant.

IV. Synthèse RIF par échantillonnage fréquentiel

On veut synthétiser le même filtre passe-bande par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel et comparer le résultat avec la méthode des fenêtres (garder l'ancien programme et rajouter)

```

Deltaf=fe/(NbCoeff);
AA = zeros(1,N/2+1);
for i=0:N/2
    if (i*Deltaf>fc1 && i*Deltaf<fc2)
        AA(i+1)=1;
    end
end
FF = (0:1/(N/2):1); %frequence normalisée
h = fir2(N, FF, AA,rectwin(NbCoeff)); [H F] = freqz(h, 1, 512, fe);
subplot(2,2,1);hold on;stem(h,'r');
subplot(2,2,2);hold on;plot(F,abs(H),'r');
subplot(2,2,3);hold on;plot(F,20*log10(abs(H)),'r');

```

1. Donner l'expression théorique de ce filtre.
2. Expliquer le rôle de la boucle.
3. Tester la fenêtre de Hanning également et comparer avec la fenêtre rectangulaire (Δf et dépassement).

V. Filtrage d'un ECG

Le signal dans **ecg.dat** contient plusieurs secondes d'un ECG échantillonné à 500 Hz. Les petites oscillations visibles principalement entre les complexes PQRST sont dues à la présence d'une interférence à 50 Hz, qu'on peut supprimer avec un filtrage passe-bas, mais en essayant de ne pas déformer les complexes.

1. Ecrire le programme permettant de réaliser un filtre RIF à phase linéaire (méthode des fenêtres)
2. Visualiser la sortie pour vérifier (utiliser filter).

V. Synthèse des filtres récurrents RII

Le principe de définition du cahier des charges d'un filtre récurrent (RII) se déroule de la même manière que pour un filtre non récurrent (RIF) mais la synthèse se fera de différente manière. L'intérêt d'employer un filtre RII réside principalement dans la possibilité d'obtenir une bande de transition étroite pour un ordre raisonnable bien qu'il présente d'une part, un risque d'instabilité dû à une grande sensibilité numérique des coefficients mais que l'on peut toutefois contrôler en déterminant une structure mieux adaptée, et d'autre part, une variation de phase fortement non linéaire.

Rappelons que pour un filtre RII, la sortie s'exprime comme une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrées et de sortie:

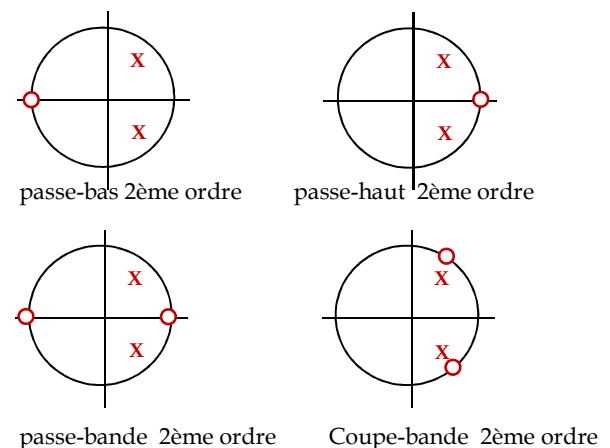
$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \quad \text{d'où} \quad H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i . z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i . z^{-i}}$$

La méthode directe consiste à placer des pôles et des zéros aux fréquences utiles mais la plus courante (indirecte dite aussi de transposition) est l'utilisation des méthodes de synthèse des filtres analogiques aboutissant à une fonction $H(p)$ correspondant aux spécifications. Une fonction permettant le passage du plan p dans le plan z ($p = fct(z)$) est ensuite utilisée pour obtenir $H(z)$. Cette fonction doit maintenir la stabilité du filtre analogique et maintenir, au mieux, les caractéristiques de la réponse fréquentielle $H(f)$ du filtre numérique.

1. Méthode des pôles et des zéros

Un filtre est rigoureusement caractérisé par la position de ses pôles et ses zéros dans le plan p (en continu) ou dans le plan z (en discret). Grâce à laquelle, on pourra déterminer la fonction de transfert du système à une constante près.

Rappelons, dans ce contexte que lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z , la réponse fréquentielle présentera un minimum au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic (un maximum) au point correspondant qui sera d'autant plus important que le pôle est proche de 1.



De ce fait, on peut, par un placement adéquat des pôles et des zéros, obtenir un filtre sélectif simple.

La méthode se résume donc ainsi [11] :

- o A partir des spécifications du filtre, placer des pôles et des zéros sur le cercle (ou à partir des zéros et des pôles de $H(p)$ calculer les zéros et les pôles de $H(z)$).

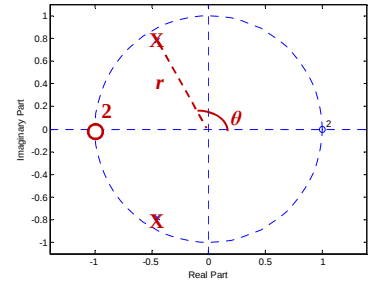
- o Si c'est un passe-bas, le caractère passe-bas est renforcé en complétant l'ensemble des zéros par autant de zéros que possible en $z=-1$ tout en conservant à $H(z)$ son caractère propre (degré du numérateur égal au degré du dénominateur). Si c'est un passe-haut, placer les zéros en $z=1$.
- o On ajuste le coefficient K pour obtenir un gain unitaire à $z=1$ pour un passe-bas, à $z=-1$ pour un passe-haut.

Il existe une relation "empirique" entre la largeur de la zone de transition Δf à 3 db et la position des pôles sur un rayon supérieure à 0.9: $r \approx 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$

- Pour un filtre passe-bas de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z+1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2+2z+1)}{z^2-2zr\cos\theta+r^2}$$

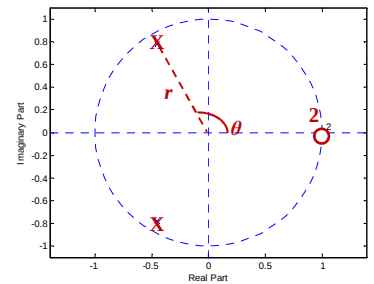
avec $K = \frac{1+r^2-2r\cos\theta}{4}$ $\theta = (f_c / f_e) \times 360^\circ$ et $r = 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$



- Pour un filtre passe-haut de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z-1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2-2z+1)}{z^2-2zr\cos\theta+r^2}$$

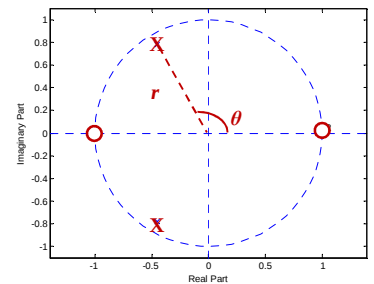
avec $K = \frac{1+r^2+2r\cos\theta}{4}$



- Pour un filtre passe-bande de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2-1)}{z^2-2zr\cos\theta+r^2}$$

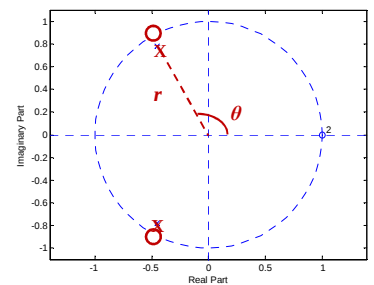
avec $K = \frac{|e^{2j\theta} - 2r\cos\theta e^{j\theta} + r^2|}{|e^{2j\theta} - 1|}$



- Pour un filtre coupe-bande de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z-e^{-j\theta})(z-e^{j\theta})}{(z-re^{-j\theta'})(z-re^{j\theta'})} = \frac{K(z^2-2\cos\theta z+1)}{z^2-2zr\cos\theta'+r^2}$$

avec $K = \frac{1+r^2-2r\cos\theta'}{2-2\cos\theta}$

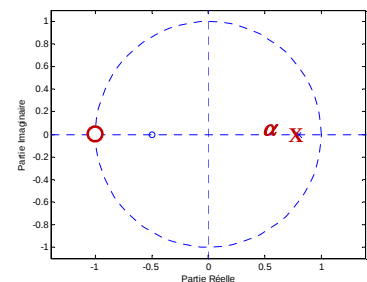


- Pour un filtre passe-bas de premier ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z/\alpha + 1/\alpha)}{z - (1-K)/\alpha} \quad K = \tan(\omega_c/2) \quad \omega_c = 2\pi f_c / f_e \quad \alpha = 1 + K$$

- Pour un filtre passe-haut de premier ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z/\alpha - 1/\alpha)}{z - (1-K)/\alpha}$$



Exemple: Trouver, grâce à la position des pôles et des zéros, la fonction de transfert et l'équation de récurrence d'un filtre numérique simple qui a les caractéristiques suivantes :

- Fréquence de coupure : 50 Hz
- Largeur de bande à 3 dB : ± 10 Hz
- Fréquence d'échantillonnage : 500 Hz

Pour rejeter les composants à 50 Hz, on place une paire de zéros aux points du cercle unité qui correspondent à 50 Hz. Ces points se situent à un angle de $360^\circ \cdot 50 / 500 = \pm 36^\circ$. Pour obtenir un filtre idéal rejecteur de bande et renforcer la réponse en amplitude de chaque côté de la fréquence de coupure, deux pôles complexes conjugués sont placés sur le cercle de rayon inférieur à 1 [18].

La largeur de la bande rejetée est déterminée par la position de pôles. La relation entre la largeur de bande et le rayon est donc applicable, par conséquent, la norme des pôles est 0,937.

Depuis la figure, la fonction de transfert du filtre est donnée par :

$$H(z) = K \frac{(z - e^{-j36^\circ})(z - e^{j36^\circ})}{(z - 0.937e^{-j36^\circ})(z - 0.937e^{j36^\circ})} = K \frac{1 - 1.618z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.516z^{-1} + 0.878z^{-2}}$$

Avec $K = 0.947 \approx 1$, l'équation de récurrence est :

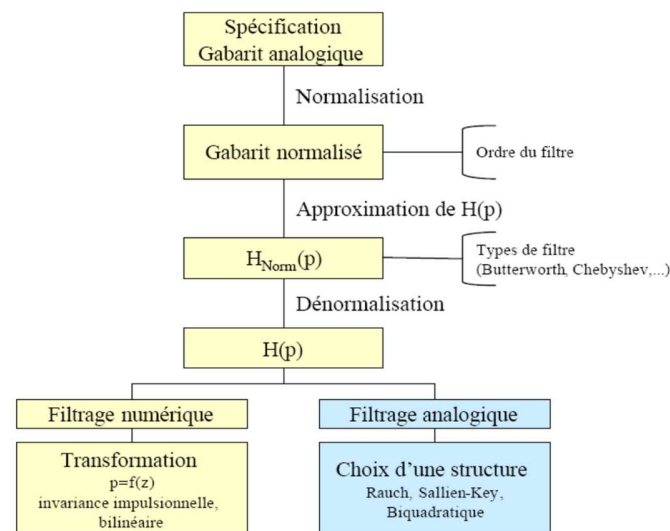
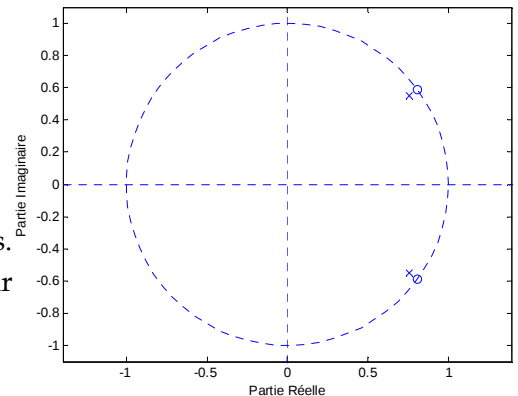
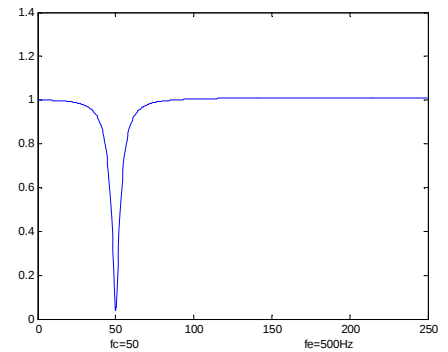
$$y(n) \approx x(n) - 1.618x(n-1) + x(n-2) + 1.516y(n-1) - 0.878y(n-2)$$

2. Rappels sur les filtres analogiques

Il existe de nombreuses méthodes permettant de synthétiser un filtre numérique récursif à partir d'un filtre analogique pris comme modèle [18]:

- o le filtre doit avoir une réponse impulsionnelle ou indicielle imposée : ce sont les méthodes de l'invariance impulsionnelle et de l'invariance indicielle.
- o le filtre doit avoir une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit donné : c'est la transformation bilinéaire.

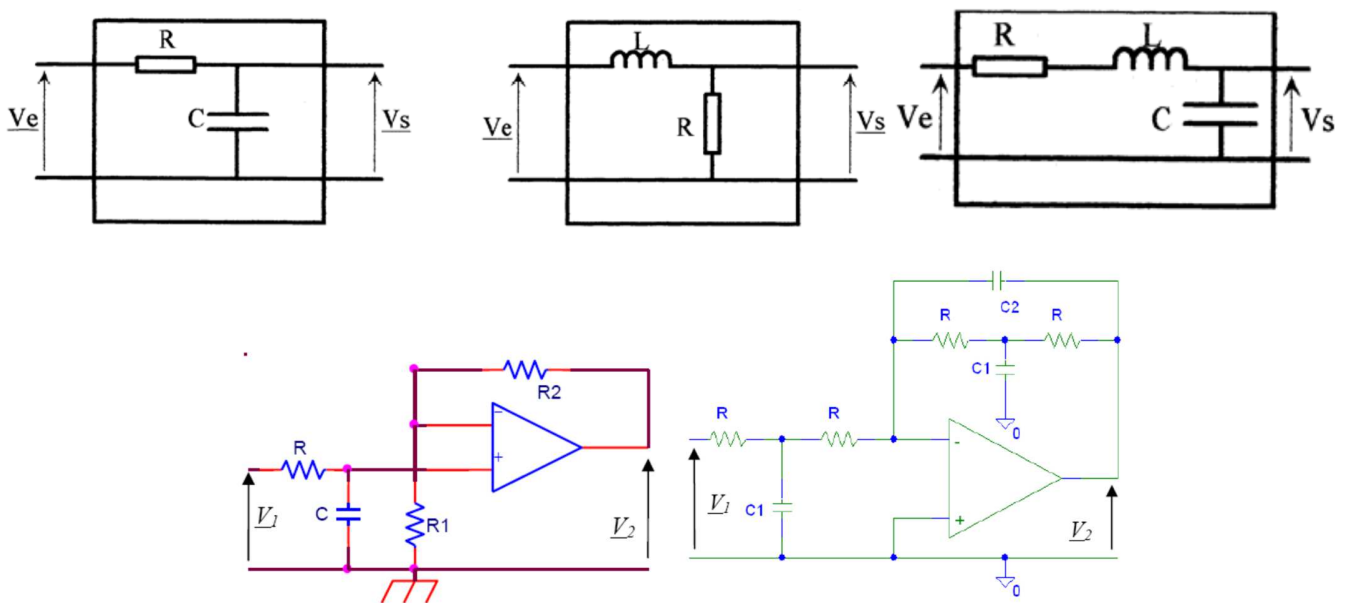
Pour concevoir un filtre analogique, on peut employer des filtres passifs obtenus par combinaison de résistances, de condensateurs et/ou de bobines ou encore utiliser des filtres actifs comportant un élément amplificateur (transistor, AO, etc.) qui permet donc de modifier les amplitudes des signaux. Ainsi, un filtre passif de base (de premier ordre) peut être composé d'une cellule RC ou d'une cellule RL.



Il faut noter que :

- les filtres numériques sont limités à des fréquences $< 100\text{MHz}$
- les filtres passifs (L,C, quartz, etc ;) sont utilisés pour les hautes fréquences
- les filtres actifs (R,C, ALI) utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) limités à 1Mhz
- les filtres à capacité commutés (R et C intégrés, ALI, Interrupteur commandé MOS) ont des fréquences ($< 10\text{ Mhz}$) programmables

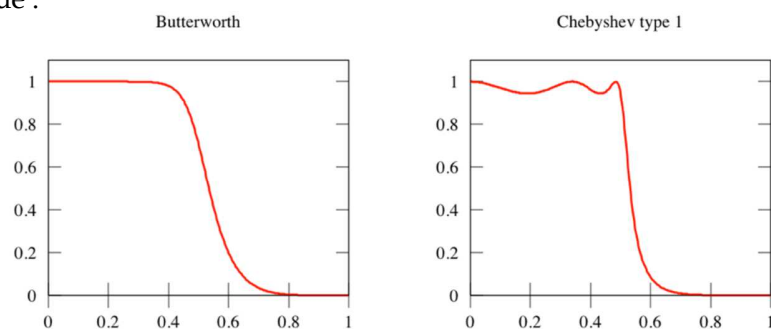
Ci-dessous, sont donnés quelques exemples de structure pour des filtres passifs passe-bas de premier et second ordre suivis de filtres actifs passe-bas de premier et second ordre aussi.



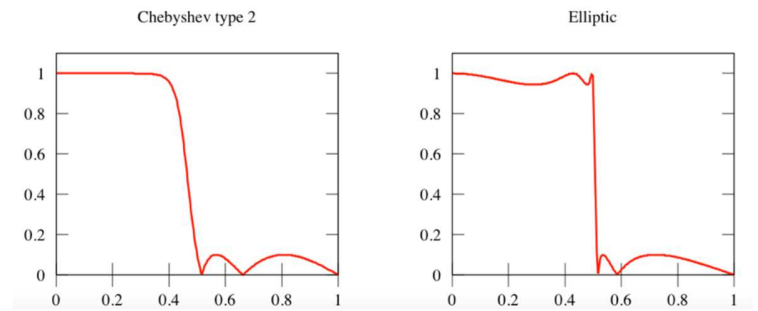
Pour obtenir des filtres d'ordre N plus élevé, on emploiera des filtres du premier et du deuxième ordre mis en cascade. Les pentes asymptotiques seront proportionnelles au nombre de cellules ($+N \uparrow$ et $+\Delta f \downarrow$). A noter également que les filtres passe-bas ou passe-haut peuvent avoir un nombre entier d'ordre (1, 2, 3...) tandis que les filtres passe-bande ou coupe-bande ne peuvent qu'avoir un ordre pair (2, 4, 6, ...) car ils sont formés de paires de cellules : 2 cellules RC ou une cellule RC et une cellule RL.

Pour synthétiser des filtres analogiques répondant à un gabarit donné, on choisira parmi un ensemble de filtres analogiques testés et éprouvés donc connus pour leurs propriétés en termes de pente d'atténuation et d'ondulation dans la bande passante et atténuée telles que :

- Filtres de Butterworth : Coupure peu raide mais gain constant en bande passante
- Filtres de Tchebychev (Chebyshev) : Raideur de coupure importante mais ondulations dans la bande passante (Chebyshev 1) ou atténuée (Chebyshev 2) et simple à mettre en oeuvre



- Filtres de Cauchy (dit aussi elliptiques) : Coupure extrêmement raide mais ondulations dans la bande passante et atténuée mais circuits plus complexes à réaliser.
- Filtres de Bessel : Retard de groupe constant mais mauvaise sélectivité même pour ordre élevé.



1. Un filtre de Butterworth est caractérisé par le fait que la réponse d'amplitude est maximale plate dans la bande passante et monotonement décroissante à partir d'une certaine fréquence (fréquence de coupure).

L'amplitude d'un filtre analogique Passe-bas de Butterworth d'ordre N est définie par l'expression :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

ou

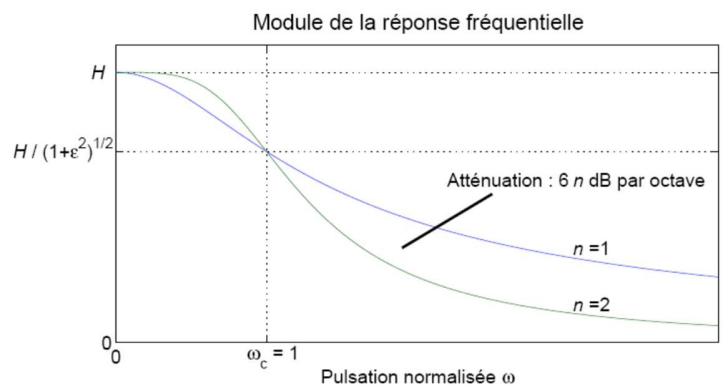
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

ω_c est la pulsations de coupure limites et ε est un paramètre de conception qui fixe la région de tolérance dans la bande passante $\delta_1 = 1/(1+\varepsilon^2)^{1/2}$. Le filtre aura N pôles placés sur le cercle unité (à partie réelle négative).

L'ordre N est déterminé par la zone de transition ($\omega_a - \omega_p$) et les ondulations permises en bande passante (A_p) et bande atténuée (A_a) :

$$N \geq \frac{\log\left(\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right) / \left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right)\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)} = \frac{\log\left(\sqrt{\left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right) / \left(\frac{1}{\delta_1^2} - 1\right)}\right)}{\log(\omega_a / \omega_p)}$$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$p^2 + \sqrt{2}p + 1$
3	$(p^2 + p + 1)(p + 1)$
4	$(p^2 + 1.8477p + 1)(p^2 + 0.7653p + 1)$
5	$(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)(p + 1)$
6	$(p^2 + 1.9318p + 1)(p^2 + \sqrt{2}p + 1)(p^2 + 0.5176p + 1)$



2. Un filtre de Tchebychev est caractérisé généralement par une ondulation équilibrée dans la bande coupée. La forme analytique du module de réponse fréquentielle d'un filtre analogique de Tchebychev (ou Chebyshev) d'ordre N est donnée par :

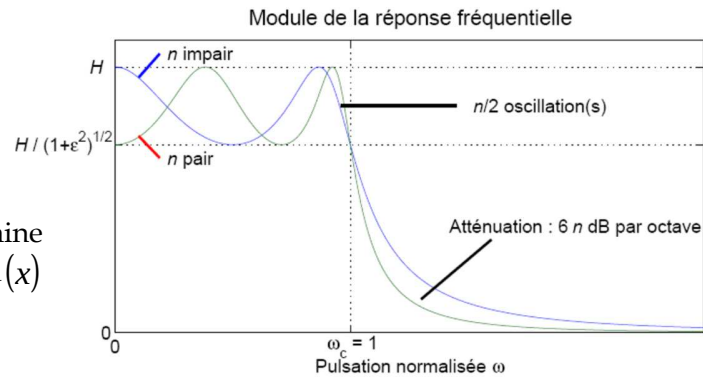
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

Où ε est un paramètre réel inférieur à l'unité qui détermine l'amplitude des oscillations dans la bande passante et où $T_N(x)$ est le polynôme de Tchebychev d'ordre N, définie par :

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)] & \text{pour } 0 \leq |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arccosh}(x)] & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$

L'ordre N est déterminé par la zone de transition ($\omega_a - \omega_p$) et les ondulations permises en bande passante $A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$ et bande atténuée ($A_a = -\log \delta_2$)

$$N \geq \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}} \right)}{\operatorname{arccosh}(\omega_a / \omega_p)} = \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{\delta_1^2} - 1}} \right)}{\operatorname{arccosh}(\omega_a / \omega_p)}$$



Dans la pratique, on utilise trois valeurs d'ondulation, $\varepsilon = 0.1$ dB, 0.5 dB et 1 dB. Pour ces 3 valeurs $H_N(p)$ est donnée :

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.3017 p^2 + 0.7158 p + 1$
3	$(0.5918 p^2 + 0.5736 p + 1)(1.031 p + 1)$
4	$(0.7518 p^2 + 0.3972 p + 1)(1.6053 p^2 + 2.0475 p + 1)$
5	$(0.8368 p^2 + 0.2787 p + 1)(1.5725 p^2 + 1.3712 p + 1)(1.855 p + 1)$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.6595 p^2 + 0.9402 p + 1$
3	$(0.8753 p^2 + 0.5483 p + 1)(1.596 p + 1)$
4	$(0.9402 p^2 + 0.3297 p + 1)(2.8057 p^2 + 2.3755 p + 1)$
5	$(2.0974 p^2 + 1.2296 p + 1)(0.9654 p^2 + 0.2161 p + 1)(2.759 p + 1)$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.9070 p^2 + 0.9956 p + 1$
3	$(1.0058 p^2 + 0.497 p + 1)(2.023 p + 1)$
4	$(1.0136 p^2 + 0.2828 p + 1)(3.5791 p^2 + 2.4113 p + 1)$
5	$(2.3293 p^2 + 1.0911 p + 1)(1.0118 p^2 + 0.1610 p + 1)(3.454 p + 1)$

On rappelle que les fonctions de transfert $H_N(p)$ des filtres analogiques polynômiaux (Butterworth, Tchebychev, Bessel, Caer, etc.) sont données pour des fréquences de coupure normalisées et uniquement pour des filtres passe-bas [2].

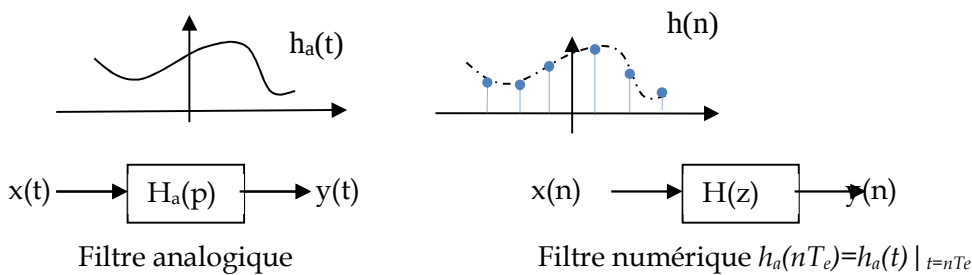
				Pulsation Centrale	Largeur de Bande
Passe-bas	$p = p / \omega_A$	Passe-bande	$p = (p^2 + \omega_{A1} \omega_{A2}) / ((\omega_{A2} - \omega_{A1}) p)$	$\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$	$B = (\omega_{A2} - \omega_{A1}) / \omega_A$
Passe-haut	$p = \omega_A / p$	Coupe-bande	$p = ((\omega_{A2} - \omega_{A1}) p) / (p^2 + \omega_{A1} \omega_{A2})$	$\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$	$B = (\omega_{A2} - \omega_{A1}) / \omega_A$

A partir de l'expression de $H_N(p)$ normalisée, on dénormalise en remplaçant p par les valeurs données au tableau précédent permettant d'aboutir à une fonction de transfert dénormalisée $H(p)$.

3. Méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle

La méthode de l'invariance impulsionnelle consiste à effectuer la synthèse d'un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ est l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre analogique équivalent [18] :

- on détermine la réponse impulsionnelle désirée $h_a(t)$ d'un filtre analogique connu.
- on échantillonne cette réponse impulsionnelle à la fréquence f_e et on en déduit la suite $h(n)$.
- on recherche la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique qui a pour réponse impulsionnelle la suite $h(n)$.



Rappelons toutefois que l'échantillonnage temporel se traduit par une périodisation en fréquence telle que :

$$X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e) \quad \text{Pour compenser la multiplication par } f_e, \text{ on prendre } h(n) = T_e h_a(nT_e)$$

Pour obtenir $h(n)$, on peut opérer de 2 manières:

$$H_a(p) \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{t=nT_e} h(n) = T_e h_a(nT_e) \xrightarrow{TZ} H(z) \quad \text{ou} \quad H(z) = T_e \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } H_a(p)} \text{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \right) \Bigg|_{p=p_i}$$

Exemple 1

On veut synthétiser un filtre numérique qui possède la même réponse impulsionnelle qu'un filtre passe-bas analogique du 1er ordre de transmittance normalisée: $H_N(p) = \frac{1}{(1+p)}$

$$\text{On commence par dénormaliser } H_a(p) = H_N(p) \Big|_{p=p/\omega_c} = \frac{1}{1+(p/\omega_c)} = \frac{\omega_c}{\omega_c + p}$$

La réponse impulsionnelle est alors : $h_a(t) = \omega_c e^{-\omega_c t}$ pour $t \geq 0$

$$\Rightarrow h(n) = T_e \omega_c e^{-nT_e \omega_c} \text{ pour } n \geq 0 \Rightarrow H(z) = T_e \omega_c \frac{1}{1 - e^{-T_e \omega_c} z^{-1}} = T_e \omega_c \frac{z}{z - e^{-T_e \omega_c}}$$

Il s'avère qu'il y a égalité entre les 2 réponses à un coefficient K près, on posera donc : $H(z) = K T_e \omega_c \frac{1}{1 - e^{-T_e \omega_c} z^{-1}}$

Sachant que $p = 2\pi j f$, pour $f=0$, $H_a(0)=1$ et $z = e^{2\pi j f T_e}$, pour $f=0$, $H(0) = K T_e \omega_c / (1 - e^{-T_e \omega_c}) \Rightarrow H(z) = \frac{1 - e^{-T_e / \tau}}{1 - e^{-T_e / \tau} z^{-1}}$

Remarque : La réponse du filtre numérique sera proche de celle du filtre analogique dans la bande $[-f_c/2, f_c/2]$ si le filtre analogique a une réponse fréquentielle nulle en dehors de cette bande. Cette méthode est utile seulement dans le cas de filtres analogiques à bande limitée.

En effet, cette méthode n'est applicable que si l'on est en mesure de définir une fréquence d'échantillonnage adéquate [19]. Pour cela, il faut que la réponse en fréquence du filtre continu soit nulle (ou presque) au-delà d'une certaine fréquence de valeur finie. Cette méthode ne peut donc s'appliquer aux filtres de types passe haut ou coupe-bande (f_{max} est ∞ donc on ne peut définir $f_c > 2f_{max}$).

Exemple 2

On considère le filtre analogique d'ordre 3 associé à la fonction d'approximation de Butterworth. Réaliser le filtre numérique passe-bas correspondant en utilisant la méthode de l'invariance impulsionnelle. La fréquence de coupure est $f_c = 1$ kHz et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 10$ kHz.

Rappelons que le filtre de Butterworth d'ordre 3 est formé de 2 cellules d'ordre 1 et 2, respectivement :

$$H_N(p) = \frac{1}{(1+p)(1+p+p^2)} \text{ alors } H(p) = \frac{1}{(1+p/\omega_c)(1+p/\omega_c + (p/\omega_c)^2)}$$

Pour éviter de décomposer en éléments simple, on peut calculer $H(z)$ en utilisant les relations entre transformées de Laplace et en z pour les systèmes du premier et du second ordres.

$H(p)$	$T_e H(z)$
$\frac{1}{p+a}$	$T_e \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$T_e \frac{1 - e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e} z^{-2}}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$T_e \frac{e^{-aT_e} z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e} z^{-2}}$

A cette fin, on décompose alors $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = \frac{A}{(\omega_c + p)} + \frac{Bp + C}{(\omega_c^2 + \omega_c p + p^2)}$$

Par identification, on trouve $C=0$, $A=-B=\omega_c \Rightarrow H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \frac{\omega_c p}{(\omega_c^2 + \omega_c p + p^2)}$

Les pôles de ce filtre analogique sont $p_1 = -\omega_c = -2000\pi$ $p_{2,3} = -\omega_c \frac{1 \pm \sqrt{3}j}{2} = -1000\pi(1 \pm \sqrt{3}j) = -\alpha \pm j\omega_o$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \frac{\omega_c p}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}} = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \omega_c \frac{p + \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \omega_c \frac{p + \frac{\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}} + \frac{\omega_c}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}}$$

En se servant du tableau donné, on peut alors déterminer $H(z)$:

$$H(z) = T_e \omega_c \frac{1}{1 - e^{-\omega_c T_e} z^{-1}} - T_e \omega_c \frac{1 - e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1}}{1 - 2e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1} + e^{-\pi/5} z^{-2}} + T_e \omega_c \frac{e^{-\pi/10} \sin(\pi\sqrt{3}/10)}{1 - 2e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1} + e^{-\pi/5} z^{-2}}$$

Ce qui nous donne :

$$H(z) = \pi/10 \frac{1}{1 - 0.5335z^{-1}} - \pi/10 \frac{(1 - 0.625z^{-1})}{1 - 1.25z^{-1} + 0.5335z^{-2}} + \pi/10 \frac{0.218}{1 - 1.25z^{-1} + 0.5335z^{-2}}$$

$$H(z) = \pi/10 \left(\frac{1}{1 - 0.5335z^{-1}} - \frac{0.781 - 0.625z^{-1}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.5335z^{-2}} \right)$$

Il reste à déterminer le gain K en adaptant les gains des deux filtres analogique et numérique pour une fréquence donnée. Comme il s'agit d'un filtre passe-bas, on supposera l'égalité pour $f=0$ ($p=0$ et $z=1$)

4. Méthode de la transformation bilinéaire

Cette méthode a pour objectif de faire coïncider au mieux les domaines analogique et numérique. Les filtres qui en sont dérivés sont plus stables que sont obtenus à travers l'emploi de la méthode de la variance impulsionnelle. Mais, en contrepartie, elle introduit une distorsion sur l'axe des fréquences.

On sait qu'un filtre analogique est caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ et un filtre numérique est défini par sa fonction de transfert $H(z)$ avec $z = e^{2\pi j f T_e} = e^{p T_e}$. Ce qui implique que $p = \ln(z)/T_e$. Dans les deux cas, cette transformation entraîne une relation non linéaire entre les fréquences f_A du domaine analogique et les fréquences f_N du domaine numérique.

Pour conserver le caractère polynomial des fonctions de transfert, une approximation de la dérivée par développement limité de z autour de $z=1$ est déterminée par transformation bilinéaire [11].

$$\ln(z) \approx 2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \dots$$

$$\text{En ne conservant que les termes du premier ordre, on trouve : } p = \frac{\ln(z)}{T_e} \approx \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

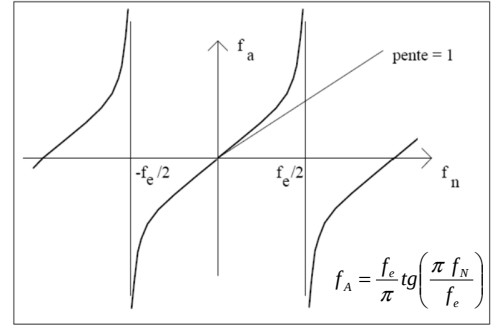
Sachant que

$$p = j\omega_A = \frac{\ln(z)}{T_e} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_N T_e} - 1}{e^{j\omega_N T_e} + 1} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_N T_e/2} (e^{j\omega_N T_e/2} - e^{-j\omega_N T_e/2})}{e^{j\omega_N T_e/2} (e^{j\omega_N T_e/2} + e^{-j\omega_N T_e/2})} = \frac{2}{T_e} \frac{j \sin(\omega_N T_e/2)}{\cos(\omega_N T_e/2)}$$

Ainsi, on peut montrer qu'on obtient la correspondance entre fréquence analogique f_A (ou pulsation ω_A) et la fréquence numérique f_N (ou ω_N) par :

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$$

Cette équation montre qu'il n'y a pas égalité entre pulsation analogique et pulsation discrète et que la relation les liant n'est pas non plus linéaire puisqu'il y a distorsion des fréquences, y compris du retard de groupe.



Pour faire la synthèse d'un filtre numérique par la transformation bilinéaire, on procède comme suit :

- On définit les caractéristiques souhaitées du filtre numérique (fréquence d'échantillonnage, de coupure, etc.)
- On calcule les pulsations analogiques ω_A correspondant aux pulsations numériques $\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$
- On détermine le gabarit du filtre analogique $H_N(p)$ normalisée d'ordre n (Chebyshev, Butterworth, etc.) qui servira de modèle au filtre numérique et on écrit la fonction de transfert dénormalisée $H(p)$ de ce filtre analogique (qu'il faut recalculer en fonction de ω_A).
- On applique la transformation bilinéaire à $H(p)$ en remplaçant $p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, ce qui donne la fonction $H(z)$.

Exemple 1

On désire concevoir un filtre passe-bas numérique de premier ordre à partir d'une fonction de transfert d'un filtre RC dans le domaine continu ($H_N(p)=1/(1+p)$). La fréquence de coupure désirée est $f_N=30$ Hz et la fréquence d'échantillonnage est $f_e=150$ Hz.

$$\text{On calcule d'abord } \omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2}{T_e} 0.7265 \text{ puis } H(p) = \frac{1}{(1+p)} \Big|_{p=p/\omega_A} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{p + \frac{2}{T_e} 0.7265}$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{2}{T_e} 0.7265} = \frac{0.7265(z+1)}{(z-1) + 0.7265(z+1)} = \frac{0.7265(z+1)}{1.7265z - 0.2735}$$

$$\text{On peut remarquer que } f_A = \frac{2}{T_e (2\pi)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{f_e}{\pi} 0.7265 = 34.69 \neq f_N = 30$$

Exemple 2 : On désire réaliser un filtre numérique passe-bas du second ordre avec les caractéristiques suivantes [18]: fréquence de coupure $f_N = 500$ Hz (gain de 1), fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ kHz,

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{2}{T_e} 0.325$$

$$H_N(p) = \frac{0.1075p}{p^2 + 0.1075p + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{0.1075p\omega_A}{p^2 + 0.1075p\omega_A + \omega_A^2} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.035p}{p^2 + \frac{2}{T_e} 0.035p + \frac{4}{T_e^2} 0.1056}$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.035 \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{2}{T_e} 0.035 \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{4}{T_e^2} 0.1056} = \frac{0.035 \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0.035 \frac{z-1}{z+1} + 0.1056}$$

$$H(z) = \frac{0.035(z-1)(z+1)}{(z-1)^2 + 0.035(z-1)(z+1) + 0.1056(z+1)^2} = \frac{0.035(z^2 - 1)}{1.14z^2 - 1.7888z + 1.0706}$$

Pour un filtre numérique passe-bas ou passe-haut, on peut déterminer $H(z)$ directement à partir de $H_N(p)$ en utilisant la pulsation normalisée $\Omega_c = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$ et remplacer p dans $H_N(p)$ comme suit:

- pour un passe-bas par $p = \frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}$ soit $H(z) = H_N(p) \Big|_{p=\frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}}$

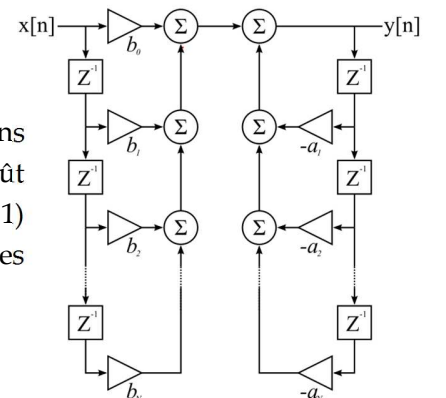
- pour un passe-haut par $p = \Omega_c \frac{z+1}{z-1}$ soit $H(z) = H_N(p) \Big|_{p=\Omega_c \frac{z+1}{z-1}}$

- pour un passe bande ou un rejeteur de bande, la détermination de ω_A s'obtient par la pulsation centrale $\omega_A = \sqrt{\omega_{A1}\omega_{A2}}$

Remarque : Puisqu'il n'est pas possible de faire coïncider précisément la réponse fréquentielle du filtre analogique (sur $[0, +\infty[$ et numérique (sur $[0, f_e/2]$) la transformation bilinéaire aura pour objet de faire coïncider au mieux les deux réponses. Cette méthode donne d'assez bons résultats à condition que les fréquences caractéristiques ne soient pas trop proches de la demi-fréquence d'échantillonnage.

5. Réalisation du filtre RII

Un filtre RII nécessite $(2N+1)$ opérations de multiplication, $2N$ opérations d'addition pour chaque nouvel échantillon à filtrer ou $(2N+1)$ MAC. Le coût mémoire d'un filtre RII en structure directe est de $(4N+3)$ mémoire $[(2N+1)$ coefficients b_i et $2(N+1)$ points mémoire ou retard pour les vecteurs des entrées $x(n)$ et des sorties $y(n)$ [9].



Série 5

Exercice 1 : Déterminer, grâce à la position des pôles et des zéros, la fonction de transfert, les coefficients du filtre et l'équation de récurrence d'un filtre numérique passe-bande qui a les caractéristiques suivantes :

- Fréquence centrale du passe-bande : 125 Hz
- Largeur de bande à 3 dB : ± 10 Hz
- Fréquence d'échantillonnage : 500 Hz

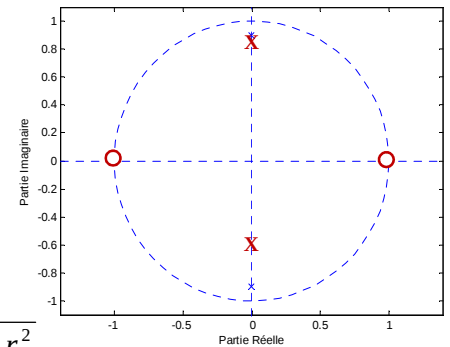
Solution

- Passe bande $\Rightarrow$ Placer un zéro en 1 et un zéro en -1
- Calculer $\theta = (125/500) \times 360^\circ = 90^\circ$ et $r = 1 - (10/500) \times \pi \approx 0.937$

- Remplacer θ et r dans l'équation $H(z) = \frac{K(z-1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2-1)}{z^2-2r\cos\theta+zr^2}$

$$H(z) = \frac{K(z^2-1)}{z^2+0.878} = \frac{K(1-z^{-2})}{1+0.878z^{-2}} \text{ avec } K = \frac{|e^{2j\theta} - 2r\cos\theta e^{j\theta} + r^2|}{|e^{2j\theta} - 1|}$$

- $b_0=K \quad b_1=0 \quad b_2=-K \quad a_0=1 \quad a_1=0 \quad a_2=0.878$
- L'équation de récurrence est : $y(n) = K.x(n) - K.x(n-2) - 0.878y(n-2)$



Exercice 2 : On souhaite approcher un filtre idéal passe-haut de second ordre par un filtre à réponse impulsionnelle infinie, synthétisé par la méthode des pôles et des zéros. Ce filtre doit répondre aux spécifications suivantes

- Fréquence de coupure $f_c = 2$ kHz
- Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 8$ kHz
- Tracer $H(f)$ idéal
- Donner l'expression théorique de $H(z)$
- Placer les pôles et les zéros pour obtenir une approximation de $H(f)$
- Déterminer l'expression mathématique exacte de $H(z)$ en déterminant K
- Déterminer l'équation aux différences.

- Largeur de transition à 3db: $\Delta f = 240$ Hz

Exercice 3 : Considérer la fonction de transfert passe bas dénormalisée $H(p)$ suivant : $2.25/(p^2+0.3p+2.25)$. Utiliser la méthode de l'invariance impulsionnelle puis celle des pôles et zéros pour transformer ce filtre en numérique.

Solution $p_{1,2} = -0.15 \pm j1.4925j \Rightarrow \alpha = -0.15, \omega_r = 1.4925 \Rightarrow$ pôles transposés $z_{1,2} = 0.0671 \pm j0.8574$

$$H(p) = \frac{2.25}{p^2 + 0.3p + 2.25} \xrightarrow{\text{pôles et zéros}} H(z) = \frac{K(z+1)^2}{z^2 - 0.1347z + 0.7408}$$

$$H(p) = \frac{2.25}{p^2 + 0.3p + 2.25} = 1.5075 \frac{1.4925}{(p+0.15)^2 + 1.4925^2} \xrightarrow{\text{invariance impulsionnelle}} H(z) = \frac{1.292z}{z^2 - 0.1347z + 0.7408}$$

Remarque Dans le cas de la méthode de transposition des pôles et zéros, on peut renforcer le caractère passe-bas

en rajoutant un zéro en -1 soit $H(z) = \frac{1.292z(z+1)}{z^2 - 0.1347z + 0.7408}$

Exercice 4 : Considérer la fonction de transfert passe bas $H(p)$ dénormalisée suivante : $6/(p^2+5p+6)$. Utiliser la méthode de l'invariance impulsionnelle pour transformer ce filtre en numérique.

Solution
$$H_A(p) = \frac{6}{p+2} \frac{1}{p+3} = \frac{6}{p+2} + \frac{-6}{p+3} \Rightarrow h_a(t) = 6e^{-2t}U(t) - 6e^{-3t}U(t)$$

$$\Rightarrow h(n) = 6T_e e^{-2nT_e}U(n) - 6T_e e^{-3nT_e}U(n) \Rightarrow H(z) = \frac{6T_e}{1-e^{2T_e}z^{-1}} + \frac{-6T_e}{1-e^{3T_e}z^{-1}}$$

Exercice 5 : On considère le filtre passe-bas analogique normalisé à un pôle unique $H_N(p)=1/(p+1)$. On considère que la fréquence de coupure normalisée à -3db se produit pour $f_c=f_e/10$. Par transformation bilinéaire, trouver le filtre numérique passe-bas équivalent $H(z)$.

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{0.65}{T_e} \Rightarrow H(p) = H_N(p) \Big|_{p/\omega_A} = \frac{\omega_A}{p + \omega_A} = \frac{0.65/T_e}{p + 0.65/T_e}$$

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.65/T_e}{\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.65/T_e} = \frac{0.245(1+z^{-1})}{1-0.509z^{-1}}$$

Exercice 6: Soit la fonction de transfert passe bas dénormalisée $H(p)$ suivante : $(p+0.1)/((p+0.1)^2+\omega_a^2)$. Sachant que $\omega_a=4$, utiliser la méthode de la transformée bilinéaire pour transformer ce filtre en numérique. Le filtre numérique aura sa résonance pour $\omega_N = \pi/(2.T_e)$.

$$\omega_a = 4 = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow T_e = 0.5 \Rightarrow p = 4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1}{\left(4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1\right)^2 + 16} = \frac{0.125 + 0.006z^{-1} - 0.118z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} - 0.950z^{-2}}$$

Exercices supplémentaires

1. Au cours de la transmission d'un signal numérique (échantillonné à une fréquence de 5 kHz), il a été affecté d'un bruit sinusoïdal de fréquence $f_0=250$ Hz. On veut éliminer le bruit par l'emploi d'un filtre possédant une bande de transition $\Delta f=\pm 50$ Hz à -3db.

Concevoir un filtre RII de second ordre par placement des pôles et zéros

- Tracer $H(f)$ idéal
- Déterminer θ et R puis donner le racé des pôles et zéros
- Déterminer $H(z)$ et le gain K .
- Donner l'équation aux récurrences
- Citer un inconvénient des filtres RII de 1er ordre et de 2ème ordre

2. On considère le filtre analogique dénormalisé $H_a(p) = (p+0.1)/((p+0.1)^2+9)$. Par la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle, trouver le filtre numérique passe-bas équivalent $H(z)$.

Solution 3 pôles $p_1=-0.1$, $p_{2,3}=-0.1 \pm 3j$
$$H(z) = T_e \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } H_a(p)} \operatorname{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1-z^{-1}e^{pT_e}} \right) \Big|_{p=p_i}$$

$$H_A(p) = \frac{0.5}{p+0.1-3j} + \frac{0.5}{p+0.1+3j}$$

$$H(z) = \frac{0.5T_e}{1-e^{0.1T_e}e^{3jT_e}z^{-1}} + \frac{0.5T_e}{1-e^{0.1T_e}e^{-3jT_e}z^{-1}} = T_e \frac{1-e^{-0.1T_e}\cos(3T_e)z^{-1}}{1-2e^{-0.1T_e}\cos(3T_e)z^{-1}+e^{-0.2T_e}z^{-2}}$$

3. On considère le filtre analogique dénormalisé $H(p) = 1/[(1+p)(p+2)^2]$.

- Déterminer la réponse impulsionnelle

- Par la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle, trouver le filtre numérique équivalent $h(n)$.

$$H(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{-1}{(p+2)^2} + \frac{-1}{(p+2)} \Rightarrow h_a(t) = e^{-t}U(t) - te^{-2t}U(t) - e^{-2t}U(t)$$

$$h(n) = T_e h_a(nT_e) = T_e e^{-nT_e}U(n) - nT_e^2 e^{-2nT_e}U(n) - T_e e^{-2nT_e}U(n)$$

4. Soit à construire un filtre numérique passe-bas échantillonné à la fréquence $f_e = 4\text{kHz}$ par la méthode de l'invariance impulsionnelle. La fonction modèle est la réponse en fréquence d'un filtre passe-bas de type Butterworth du 2ème ordre dont la fréquence de coupure à -3dB est égale à 500Hz.

$$H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \Rightarrow H(p) = H_N(p)|_{p=p/\omega_c} = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2} = \frac{\omega_c^2}{\left(p + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c\right)^2 + \frac{\omega_c^2}{2}} = \frac{\omega_c^2}{\left(p + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_c\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}\omega_c \frac{\omega_c/\sqrt{2}}{\left(p + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_c\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$H(z) = T_e \frac{\sqrt{2}\omega_c z^{-1} \sin(\omega_c T_e / \sqrt{2}) e^{-\omega_c T_e / \sqrt{2}}}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_c T_e / \sqrt{2}) e^{-\omega_c T_e / \sqrt{2}} + z^{-2} e^{-2\omega_c T_e / \sqrt{2}}} \quad \omega_c T_e = \pi/4 \Rightarrow \omega_c T_e / \sqrt{2} = 0.555$$

$$H(z) = T_e \frac{\sqrt{2}\omega_c z^{-1} \sin(\omega_c T_e / \sqrt{2}) e^{-\omega_c T_e / \sqrt{2}}}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_c T_e / \sqrt{2}) e^{-\omega_c T_e / \sqrt{2}} + z^{-2} e^{-2\omega_c T_e / \sqrt{2}}} = \frac{0.336z^{-1}}{1 - 0.775z^{-1} + 0.308z^{-2}}$$

5. On considère le filtre analogique d'ordre 3 associé à la fonction d'approximation de Butterworth. Réaliser le filtre numérique passe-bas correspondant en utilisant la transformation bilinéaire. La fréquence de coupure est $f_c = 1\text{ kHz}$ et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 10\text{ kHz}$.

$$H_N(p) = \frac{1}{(1+p)(1+p+p^2)} \Rightarrow H(p) = H_N(p)|_{p=p/\omega_c} = \frac{1}{(1+p/\omega_c)(1+p/\omega_c + (p/\omega_c)^2)}$$

$$\omega_c = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{2 \cdot 0.325}{T_e} \quad H(z) = H(p)|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z) = \frac{0.034(z+1)^3}{(1.325z - 0.675)(1.43z^2 - 1.79z + 0.78)}$$

$$\text{Remarque : } H(z) = H_N(p)|_{p=\frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}} = H_N(p)|_{p=\frac{1}{0.325} \frac{z-1}{z+1}}$$

6. En employant un filtre de Butterworth passe-bas de second ordre, concevoir un filtre numérique correspondant (passe-bas) en utilisant la transformation bilinéaire. La fréquence de coupure est $f_c = 100\text{ kHz}$ et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\text{ kHz}$.

$$\omega_a = \frac{2}{T_e} 0.325 \text{ rad/s} \quad H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \Rightarrow H(z) = H_N(p)|_{p=p/\omega_c} = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2}$$

$$H(z) = H(p)|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.1056(z+1)^2}{1.65z^2 - 1.8z + 0.65}$$

7. On cherche à réaliser un filtre numérique équivalent au filtre analogique dénormalisé de transmittance :

$$H_A(p) = \frac{1}{1 + 0.2p}$$

-
- Déterminer la réponse impulsionnelle $h_a(t)$
- Calculer la réponse en z de ce filtre obtenue par transformation bilinéaire pour une fréquence d'échantillonnage $T_e = 0.2$.
- Quelle est sa fréquence de coupure ?
- Calculer la réponse en z d'un filtre similaire de même fréquence de coupure que le filtre analogique.

8. En employant un filtre de Butterworth passe-bas de second ordre, concevoir un filtre numérique correspondant (passe-bas) en utilisant la transformation bilinéaire. La fréquence de coupure est $f_c = 200$ Hz et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1$ kHz.

$$H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

1. Déterminer $H(z)$
2. Etablir le tracé des pôles et zéros
3. Comparer les fréquences analogiques et numériques pour $f_c = 200$ Hz et $f_c = 400$ Hz
4. Si $f_c = 400$ Hz, quel problème cela posera-t-il ?
5. Quelle méthode alors utiliser ? Quel est son inconvénient ?

$$\omega_a = \frac{2}{T_e} 0.7265 \text{ rad/s} \quad H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \Rightarrow H(z) = H_N(p) \Big|_{p=p/\omega_c} = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2}$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.2066(z+1)^2}{z^2 - 0.37z + 0.196}$$

TP n°5: Conception des filtres RII

But du TP : Dans ce TP, on synthétisera un filtre RII par la méthode des pôles et zéros puis par la méthode de l'invariance impulsionnelle et enfin par transformation bilinéaire en utilisant des filtres analogiques (Chebychev et Butterworth).

Rappels sur les filtres RII

Les filtres RII n'auront pas une phase linéaire (phase linéaire : temps de propagation constant pour toute fréquence). L'intérêt des filtres récurrents (RII) est leur faible coût en calcul. Les inconvénients des filtres récurrents sont : leur non-linéarité en phase, et leur instabilité numérique. Avec très peu de pôles et zéros on peut assurer la plupart des réponses fréquentielles dont on peut avoir besoin dans les applications audio. Cependant, le filtre étant rétroactif, les erreurs de précision numérique deviennent une question d'importance, car il peut s'amplifier et devenir hors contrôle, d'abord dans la forme de bruit, mais éventuellement dans la forme d'instabilité. Mais, les filtres RII peuvent être conçus par des méthodes semblables à celles utilisées pour les filtres analogiques.

1. Synthèse d'un filtre numérique par placement des pôles et zéros

Il s'agit de déterminer, grâce à la position des pôles et des zéros, la fonction de transfert, les coefficients d'un filtre et l'équation de récurrence d'un filtre numérique coupe-bande de second ordre qui a les caractéristiques suivantes :

- Fréquence à rejeter : 125 Hz
- Largeur de bande à 3 dB : ± 10 Hz
- Fréquence d'échantillonnage : 500 Hz

```
clear all; clc; close all;
fe=500; df=10; fc=125;
teta=360*fc/fe; tet=2*pi*fc/fe; R=1-df*pi/fe;
K=(exp(2*j*teta)-2*R*cos(teta)*exp(j*teta)+R*R)/(exp(2*j*teta)-1); K=abs(K);
a=[1 -2*R*cos(tet) R*R]; b=K*[1 0 -1];
dirac=[1; zeros(99,1)]; h=filter(b,a,dirac);
[H F] = freqz(b, a, 512, fe); [tau,f]=grpdelay(b,a,512,fe);
figure; subplot(2,2,1);hold on;plot(h,'red');
subplot(2,2,2);hold on; plot(F,abs(H),'red');
subplot(2,2,3);hold on; zplane(b,a);
subplot(2,2,4);hold on;plot(f,tau,'red');
```

1. Quelle est la nature de la bande passante créée
2. Modifier ce programme pour en faire un coupe-bande et commenter les graphes obtenus.
3. Reprendre ce programme pour filtrer le signal *ecg* ($f_e=500$ Hz et bruit à 50 Hz.).
 - Visualiser les TFD du signal avant et après filtrage.
 - Comparer avec la méthode de fenêtres (TP n°4), laquelle vous semble préférable (justifier)?

2. Synthèse d'un filtre numérique par transformation d'un filtre analogique

Pour déterminer les coefficients du filtre RII, il suffit de synthétiser chaque filtre en continu $H(p)$ puis de passer à $H(z)$ soit par transformation bilinéaire ou par invariance impulsionnelle

On veut, par exemple, synthétiser un filtre passe-bas avec les spécifications suivantes : $f_e=3000\text{Hz}$; $f_p=500\text{Hz}$ et une oscillation en bande passante $\delta_1 < 3\text{ db}$ et une atténuation en bande atténuée $\delta_2 > 40\text{ db}$.

I. On commence par choisir un filtre analogique normalisé $H_n(p)$ (en continu) d'ordre N puis on le dénormalise pour créer $H(p)$ continu. Ensuite, on utilise une des méthodes de transformation permettant trouver les paramètres du filtre numérique

```
clc; clear all; close all;

Fe=3000;fp=500; att_p=3; att_a=40; N=10;
wp=fp*2*pi; %transformation des fréquences en pulsations

%Création d'un filtre analogique normalisé (wc=1) passe-bas Hn(p) d'ordre N
[z,p,k] = cheb1ap(N,att_p); %cheb2ap(N,att_a); %ellipap(N,att_p,att_a) %besselap(N); %butterap(N);

%Dénormalisation passage de Hn(p) vers H(p)
[Bpn,Apn] = zp2tf(z,p,k);
[Bp,Ap] = lp2lp(Bpn,Apn,wp); %lp2hp %lp2bp %lp2bs

% Détermination du filtre numérique
[Bn,An] =impinvar(Bp,Ap,Fe);
figure; subplot(121); zplane(1,Ap); subplot(122); zplane(1,An);

% Calcul de la réponse impulsionnelle analogique et numérique
[r,p,k]=residue(Bp,Ap); t=0:1/(5*Fe):.02; ha=exp(t*(p.'))*r;
hn=filter(Bn,An,[1;zeros(49,1)]);
figure; subplot(1,2,1);plot(t,ha);hold on; stem(0:1/Fe:49/Fe, Fe*hn,'r.')

% Détermination de Ha(f) et H(f)
[Ha,W]=freqs(Bp,Ap,2*pi*(1:20:Fe/2)); [H,f]=freqz(Bn,An, 1:20:Fe/2,Fe);
subplot(1,2,2);plot(W/(2*pi),abs(Ha));hold on; stem(f,abs(H),'r.')
```

1. Que contiennent z , p et k , B_{pn}, A_{pn} , B_p, A_p ?
2. A partir du tracé des pôles, étudier la stabilité des 2 filtres.
3. Aidez vous du help pour expliquer les instructions `zp2tf(z,p,k)`; `lp2lp(Bpn,Apn,wp)`;
`[r,p,k]=residue(Bp,Ap)`; `t=0:1/(5*Fe):.02`; `ha=exp(t*(p.'))*r`; `freqs(N,D,2*pi*(1:20:Fe/2))`;
`plot(W/(2*pi),abs(Ha))`; `Fe*hn`
4. Commenter les réponses impulsionnelles et fréquentielles
5. Quelles sont les caractéristiques du filtre de Chebychev (avantage et inconvénient)
6. Que se passe-t-il si on augmente N ?
7. Tester les autres filtres analogiques et commenter les différences (oscillations, Δf , etc.).
8. Que faut-il modifier pour en faire un passe-haut? Quel est l'inconvénient principal de l'approche par invariance impulsionnelle?

II. On veut refaire le même travail en employant la transformation bilinéaire

```
[Bn,An] = bilinear(Bp,Ap,Fe,fp);
```

9. Comparer les 2 méthodes lorsque f_p est proche de la demi-fréquence d'échantillonnage $f_e/2$.
10. Tester la fonction `cheb1ord`

Références

- [1] F. Cottet. Aide-mémoire Traitement du Signal. Dunod, Paris, 2005.
- [2] L. Lecornu D. Le Roux. Mts 201 A Signaux Numeriques Telecom Bretagne
- [3] O. Français. Théorie de l'échantillonnage et de la quantification. ESIEE.
- [4]. Maurice Charbit, Gérard Blanchet. Eléments de base pour le Traitement Numérique du Signal et de l'Image. Telecom Paris.
- [5] https://moodle.insa-rouen.fr/pluginfile.php/6997/mod_resource/content/0/cours7.pdf
- [6] <http://chamilo2.grenet.fr/inp/courses/ENSE32A4EMAAAK0/document/html/toc1.htm>
- [7] <http://www.groupe.polymtl.ca/ele2700/TP/seance3-TP2-HIVER-2015.pdf>
- [8] Alexandre Renaux. Traitement Numérique Des Signaux. IFIPS / Université Paris Sud Orsay
- [9] Olivier Sentieys. Signaux et Systèmes Discrets. ENSSAT - Université de Rennes 1.
- [10] J.L. Zarader. Cours de Traitement du Signal. Ecole Polytechnique Universitaire de Paris
- [11] M. Frikel. Cours Traitement Numérique du Signal. ENSICAEN.
- [12] C. Doignon. Traitement Numérique du Signal Déterministe. Université Louis Pasteur de Strasbourg
- [13] <http://fr.audiofanzine.com/techniques-du-son/forums/t.392548,plug-ins-d-eq-sonnent-ils-differemment-pourquoi,p.18.html>
- [14] http://perso.iut-nimes.fr/flouchet/syst%20ech/T_en_z.pdf
- [15] <http://pageperso.univ-lr.fr/pierre.courtellemont/TD4.pdf>
- [16] https://perso.univ-rennes1.fr/laurent.albera/alberasiteweb/cours/tp_filtrage.pdf
- [17] Joel Leroux. Techniques numériques pour le traitement du signal. Polytech, Nice-Sofia.
- [18] http://www.eaeeie.org/sites/all/themes/eaeeie/tnprojects/theiere_signal/theiere_signal_fr/frame.htm
- [19] J. Prado, G. Blanchet. Méthodes Numérique pour le traitement du signal.