Pré requis : TF, Echantillonnage, Filtrage analogique

Partie I : Analyse temporelle et fréquentielle des signaux numériques

Introduction et rappels divers (1 Séance)

- Rappels sur la TF
- Rappels sur l'échantillonnage
- Exercices d'application

I. Analyse temporelle des SLID (2 Séances)

- Signaux déterministes discrets usuels
- Energie et puissance
- Corrélation et auto-corrélation
- Systèmes linéaires et invariants discrets
- Stabilité, causalité
- Filtres RIF et RII
- Exercices

II. Analyse fréquentielle des SLID (3 Séances)

- Transformée de Fourier à temps discret
- Transformée de Fourier Discrète
- Calcul de la FFT (TFR)
- TFD des signaux de longueur illimitée
- Fenêtres de pondération
- Exercices

Partie II : Filtrage des signaux numériques

III. Analyse des filtres numériques par la transformée en Z (TZ) (3 Séances)

- Transformées en Z
- Propriétés de la TZ
- TZ rationnelles
- Détermination de la réponse en fréquence des FN
- Détermination de la réponse impulsionnelle des FN(TZ inverse)
- Caractéristiques des FN
- Exercices

IV. Synthèse des filtres numériques RIF (2 Séances)

- Synthèse des filtres RIF par la méthode des fenêtres
- Synthèse des filtres RIF par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel
- Constitution et réalisation de filtres RIF
- Exercices

V. Synthèse des filtres numériques RII (3 Séances)

- Synthèse des filtres RII par la méthode des pôles et des zéros
- Synthèse des filtres RII par la méthode de la réponse impulsionnelle
- Synthèse des filtres RII par la méthode de la transformation bilinéaire
- Constitution et réalisation de filtres numériques RII
- Exercices

Travaux Pratiques

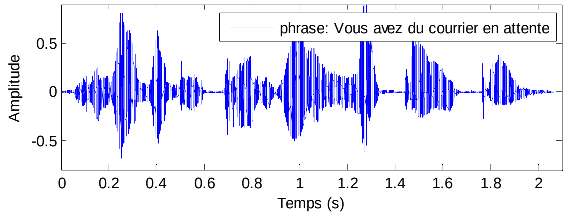
1. Analyse temporelle des filtres numériques (Corrélation, convolution, énergie, puissance)
2. Analyse fréquentielle des filtres numériques (TFD et propriétés) et Fenêtrage
3. Analyse des filtres numériques par la TZ
4. Conception de filtres numériques RIF
5. Conception de filtres numériques RII

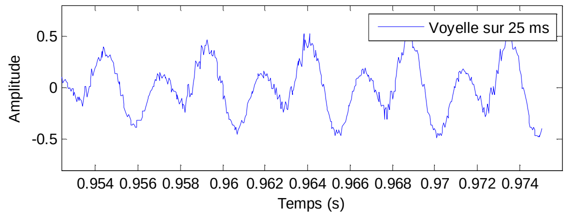
Introduction et rappels divers

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $x(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Sur le plan analytique : Un signal sera une fonction d'une variable réelle, en général le temps.

<u>Exemples :</u>

- Onde acoustique : délivré par un microphone (parole, musique, …)
- Signaux biologiques : EEG, ECG
- Tension aux bornes composant électronique
- Signaux géophysiques : vibrations sismiques
- Finances : cours du pétrole
- Images, Vidéos





<u>Remarque</u> : Tout signal physique comporte une *composante* aléatoire (perturbation externe, bruit, erreur de mesure, etc …). **Le bruit** est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différentiation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal utile pour les radioastronomes.

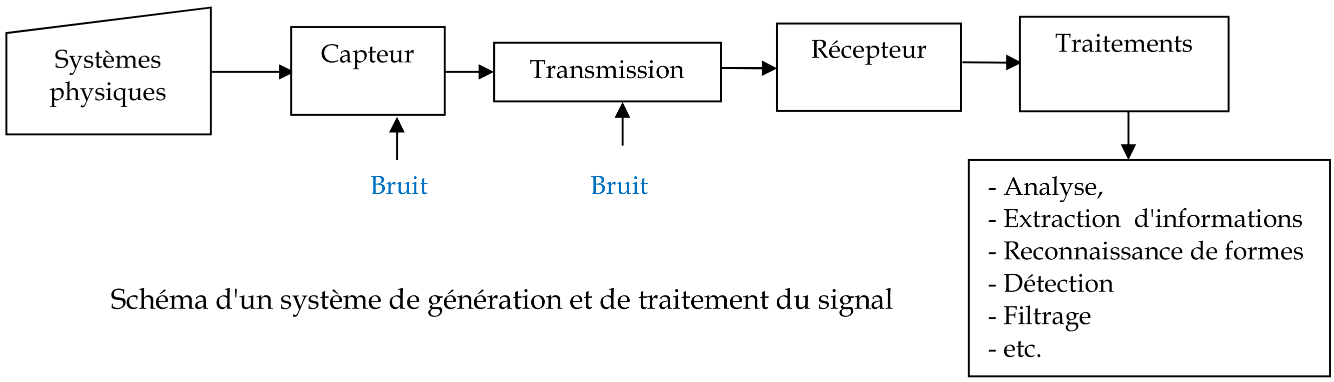


Schéma d'un système de génération et de traitement du signal

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes [1]:
Élaboration des signaux : synthèse, modulation, codage/compression, etc.
Interprétation des signaux : filtrage, détection, identification, analyse, mesure, etc.

1. *Rappels sur la Transformée de Fourier*

La transformée de Fourier est une technique mathématique permettant de déterminer le spectre de fréquences d'un signal (par exemple un son). La transformation de Fourier correspond à un changement de base dans l'espace des fonctions de carré sommable. La définition mathématique est la suivante :

$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi j f t}dt \qquad \text{et} \qquad x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2\pi j f t}df$$

x(t) et X(f) sont deux descriptions équivalentes du même signal. Ainsi, tous les signaux à énergie finie possède une transformée de Fourier. Cette dernière est une fonction complexe même si *x(t)* est réel

Si *X(f)* = fonction réel ⇔*x(t)* est *paire* *Si X(f)* = fonction imaginaire pure ⇔*x(t)* est im*paire*

<u>Remarques</u> :

X(f) pourra être exprimée sous la forme:

$$\begin{cases} |X(f)| = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)} \;\; et \;\; \varphi = \arg(X(f)) = arctg\dfrac{B(f)}{A(f)} \end{cases}$$

Où |*X(f)*| et φ sont respectivement le module et la phase de *X(f).*

La TF d'un signal périodique est divergente, mais on peut définir une TF au sens des distributions en utilisant la décomposition en Série de Fourier. Le résultat correspond à un spectre de raies (non continu):

sachant que: $C_n = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp(-2\pi j n f_0 t)dt$ *et* $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi j f t}dt$ alors $X(f) = \lim_{T\to+\infty}(T.C_n)$

Pour les signaux à énergie finie, la TF conserve l'énergie (relation de Parseval) : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2 df$

On peut donc définir une notion d'énergie par unité de fréquence, la densité spectrale d'énergie (DSE). La DES est la TF de l'autocorrélation (Thèorème de Wiener-Kintchine)

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-2\pi j f \tau}d\tau$$

Pour les signaux à puissance moyenne finie, on définit alors une densité spectrale de puissance (DSP):

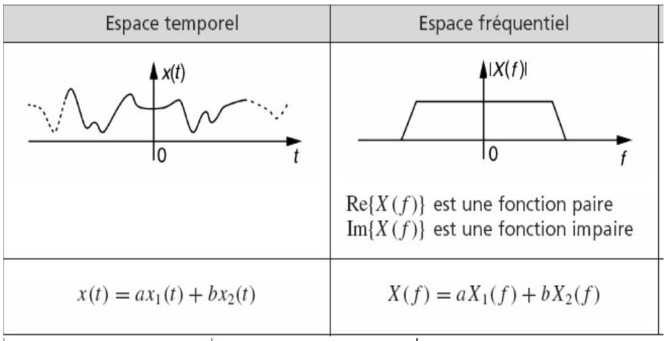
$$P_x(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{|X(f)|^2}{T}$$

- La propriété de changement d'échelle indique que plus le support temporel d'une fonction est étroit plus le support de sa TF est large.

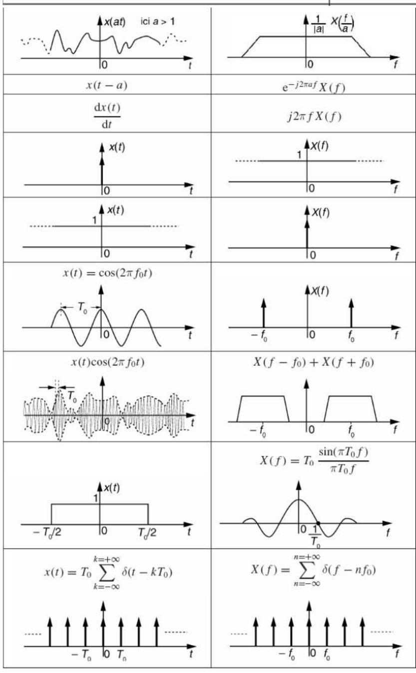
- La translation d'un signal temporel se traduit par un déphasage en fréquence. Une translation en fréquence équivaut à une modulation temporelle.

- La propriété de dualité permet d’obtenir facilement de nouvelles paires de transformées de FOURIER à partir des paires déjà connues.

<u>*Principales propriétés de la TF*</u>



- Linéarité : $ax_1(t)+bx_2(t)\xrightarrow{TF}aX_1(f)+bX_2(f)$
- Décalage temporel : $x(t-t_0)\xrightarrow{TF}X(f)e^{-2\pi jft0}$
- Décalage fréquentiel : $x(t)e^{2\pi jf0t}\xrightarrow{TF}X(f-f_0)$ (MA)
- Dualité temps-fréq : $x(t)\xrightarrow{TF}X(f)\Rightarrow X(t)\xrightarrow{TF}x(-f)$
- Changement d'échelle : $x(at)\xrightarrow{TF}\dfrac{1}{|a|}X(f/a)$
- Dérivation : $\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}\xrightarrow{TF}(2\pi jf)^n X(f)$
- Inversion et conjugaison : $x(-t)\xrightarrow{TF}X(-f)$; $x^*(t)\xrightarrow{TF}X^*(-f)$
- Convolution : $x(t)*h(t)\xrightarrow{TF}X(f).H(f)$



<u>*TF au sens des distributions*</u>

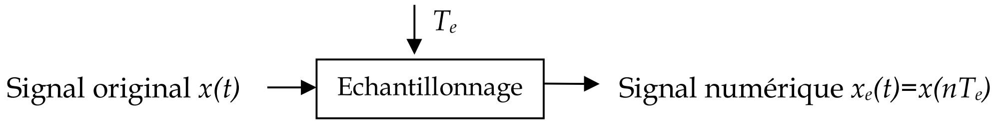
Pour les signaux à puissance moyenne finie (Dirac, Echellon, signaux périodiques, etc.), on peut définir une TF au sens des distributions.

- Dirac : $\delta(t-t_0)\xrightarrow{TF}e^{-2\pi jft_0}\quad\Rightarrow\quad\delta(t)\xrightarrow{TF}1$
- Echelon et signe: $U(t)\xrightarrow{TF}\dfrac{1}{2\pi jf}+\dfrac{1}{2}\delta(f)\qquad Sgn(f)=\dfrac{1}{\pi jf}$
- Périodiques : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\exp(2\pi jnf_0t)\xrightarrow{TF}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\delta(f-nf_0)$
- Peigne de Dirac : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\xrightarrow{TF}X(f)=\dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_0)$
- $\cos(2\pi f_0t)\xrightarrow{TF}\dfrac{1}{2}\delta(f-f_0)+\dfrac{1}{2}\delta(f+f_0)$
- $\sin(2\pi f_0t)\xrightarrow{TF}\dfrac{1}{2j}\delta(f-f_0)-\dfrac{1}{2j}\delta(f+f_0)$

$y(t)=\int_{u=-\infty}^{u=+\infty}h(u)x(t-u)\mathrm{d}u = x(t)*h(t)$	$Y(f)=H(f)X(f)$
$y(t)=h(t)x(t)$	$Y(f)=H(f)*X(f)$

2. *Quelques rappels sur l'échantillonnage*

L'échantillonnage est un élément important en traitement numérique de signaux. Il constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N). Il est conditionné , principalement, par deux contraintes majeures : Ne pas détériorer le signal (conserver l'information utile) tout en limitant l'espace mémoire nécessaire au stockage. On s'attachera dans une chaîne d'acquisition à minimiser cette valeur tout en ne détériorant pas le signal [3]. Ainsi, pour transformer un signal analogique en un signal numérique, on va donc prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret et permettre, ainsi, sa numérisation.

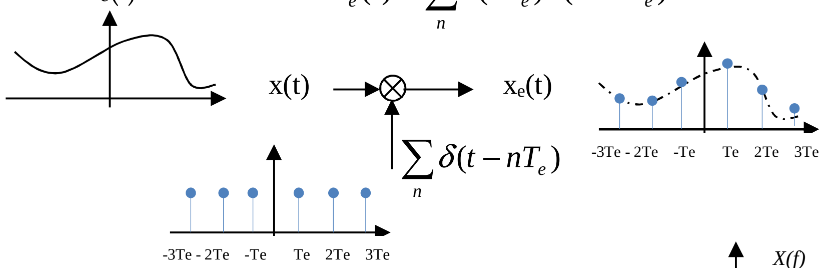


Echantillonnage idéal

Soit x(t) un signal analogique de transformée de Fourier X(f). Echantillonner le signal x(t) consiste à choisir une fréquence Fe et de construire un nouveau signal avec les $x(nT_e)$ avec n un entier et $T_e=1/f_e$.

On peut écrire le signal échantillonné $x_e(t)$ sous la forme : $x_e(t)=\sum_n x(nT_e)\delta(t-nT_e)$

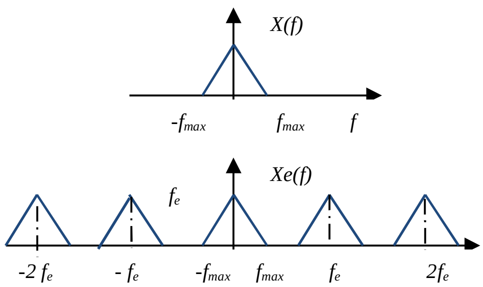
que l'on peut schématiser :



$$x_e(t)=x(t).\sum_n \delta(t-nT_e),$$

$$\Rightarrow X_e(f)=f_e\sum_n X(f-nf_e)$$

Cette expression montre que le spectre $X_e(f)$ est périodique de période f_e et qu'il est la somme des répliques (copies) du spectre original X(f) décalées de nf_e . L'échantillonnage dans le domaine temporel se traduit par une "périodisation" de période f_e dans le domaine fréquentiel.

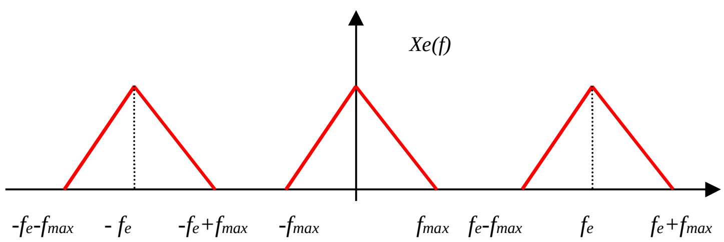


Théorème de Shannon

On considère que x(t) est un signal réel dont le spectre est borné en fréquence, de fréquence maximale f_{max} soit $\forall |f| > f_{\max}$ $X(f)=0$2 c

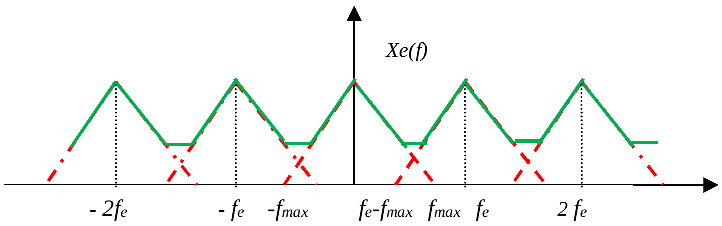
as se présentent alors : - $f_e > 2 f_{max}$

Les motifs étant disjoints, on peut extraire X(f) grâce à un filtre passe-bas idéal et donc reconstituer parfaitement le signal x(t) à partir des $x_e(t)$.



- $f_e < 2\, f_{max}$

Les motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ se recouvrent (Repliement de spectres). Il n'est plus possible de récupérer le spectre X(f) par un filtrage approprié.



Remarques : Si le support du spectre X(f) n'est pas borné (s'étale sur l'axe réel) il y a un repliement du spectre des échantillons (aliasing), on ne peut pas isoler le spectre original à partir de celui des échantillons. Dans la pratique, on ne peut pas se contenter de prendre une fréquence d´échantillonnage égale à la fréquence de Nyquist ($2f_{max}$), mais en prendre une supérieure car on ne peut réaliser un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure très nette. Par exemple, pour numériser la parole dans le réseau téléphonique, on utilise une fréquence d'échantillonnage 8kHz alors que le spectre de la voix est compris entre 300Hz et 3400Hz.

Filtre anti-repliement Les signaux étudiés en réalité sont rarement à support fréquentiel borné, c'est-à-dire que f_{max} = infinie. C'est par exemple le cas d'un signal rectangulaire périodique dont les raies fréquentielles s'étendent à l'infini ou encore un signal bruité. Ceci implique que quelle que soit la fréquence d'échantillonnage il y aura repliement de spectre puisque $f_e > 2\, f_{max} = \infty$ est une condition impossible à réaliser. Pour remédier à ce problème, on utilise à l'entrée d'un système numérique un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement ou anti-aliasing. Ce filtre est analogique, idéalisé il doit avoir un gain de 1 sur une bande de fréquence Fe, centrée en zéro. Son rôle va être de limiter le contenu spectral du signal à la partie utile. Il va participer aussi à limiter l'influence du bruit [3].

3. Exercices d'application

1.Soient x(t)= A $\prod_{\theta}(t)$ et y(t) = A $\Lambda_{\theta/2}(t)$ signal porte et signal triangulaire d'amplitude A>0 et de largeur θ.

- Tracer x(t) et y(t) sur le même graphe
- Utiliser les dérivées pour trouver X(f) et Y(f) qui seront représentés sur le même graphe puis commenter et interpréter les deux graphes pour A=1 et θ=20.
- Soit z(t)=cos ($2\pi f_0 t$), tracer Z(f), $Z_1(f)$ la TF de x(t).z(t) et $Z_2(f)$ la TF de y(t).z(t) sur le même graphe et comparer Z(f) et $Z_1(f)$ puis Z(f) et $Z_2(f)$.

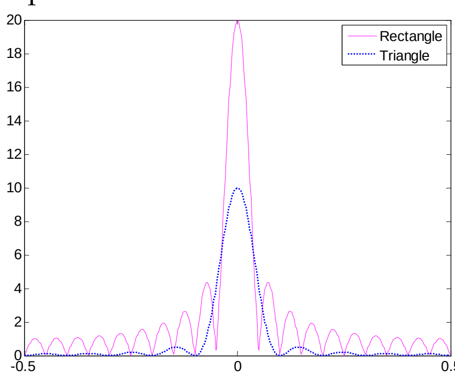
2. Soit le signal $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$, montrer que : $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n\, t/T} = T \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ et déterminer la TF de x(t)

3. On échantillonne un signal sinusoïdal de fréquence 200Hz avec une fréquence d'échantillonnage f_e = 500Hz puis avec f_e = 300Hz. Quel signal obtient-on lors d'une reconstruction parfaite dans les deux cas ?

Solutions :

1. $X(f) = A\theta \sin c(f\theta)$ $\quad Y(f) = A\frac{\theta}{2} \sin c^2(f\theta/2)$

$$Z(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$



$$Z_1(f)=\frac{A}{2}\theta \sin c(\theta(f-f_0))+\frac{A}{2}\theta \sin c(\theta(f+f_0)) \quad Z_2(f)=\frac{A}{4}\theta \sin c^2(\theta(f-f_0))+\frac{A}{4}\theta \sin c^2(\theta(f+f_0))$$

3. fe=500Hz $\Rightarrow x_r(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ avec f_0=200Hz

fe=300Hz $\Rightarrow x_r(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ avec f_0=100Hz

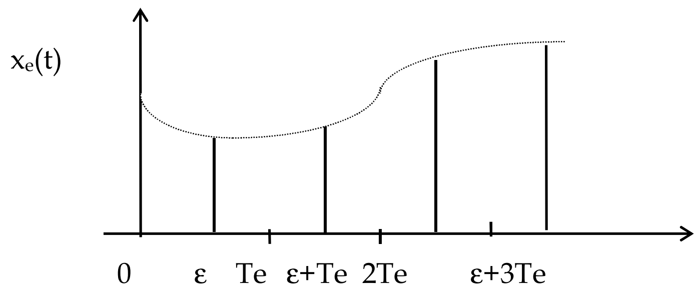
Exercices supplémentaires

1. Soit $h(t)=\begin{cases}2+\cos(2\pi t)\dots\dots\dots\dots |t|\le 1/2\\ 0\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ailleurs\end{cases}$

- Déterminer H(f), la transformée de Fourier de h(t)
- Esquisser H(f) pour l'intervalle 0 <= f <= 3 et Donner la valeur numérique de H(f) pour f = 2.5

Solution $H(f)=2\sin c(f)+\frac{1}{2}\sin c(f-1)+\frac{1}{2}\sin c(f+1)$

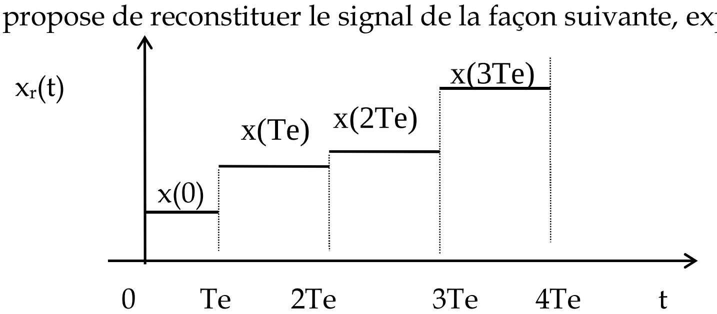
2. On considère un signal de parole de durée 1mn et ayant une bande passante de 10 kHz échantillonne comme suit :



- Calculer le nombre minimal d'échantillons nécessaires pour représenter ce signal.
- Exprimer le signal échantillonné $x_e(t)$ où ε est un retard puis calculer sa TF

On suppose que l'échantillonnage se fait sans retard (ε = 0)
- Exprimer le signal échantillonné et montrer que l'on peut reconstituer théoriquement le signal x(t) à partir des échantillons x(nTe).

On se propose de reconstituer le signal de la façon suivante, exprimer $x_r(t)$.



Solution

D=60s et f_{max}=5kHz $\Rightarrow N_{min}=D/T_{emin}$=6.10^5

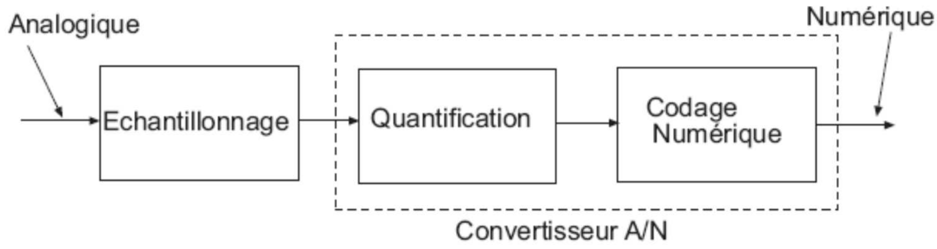
$$x_e(t)=\sum_n x(nT_e-\xi)\,\delta(t-nT_e-\xi)\Rightarrow X_e(f)=f_e\sum_n e^{-2\pi jf\xi}X(f-nf_e)\ \xi=0\Rightarrow x_e(t)=\sum_n x(nT_e)\,\delta(t-nT_e)$$

Reconstruction théorique $\Rightarrow X_R(f)=X_e(f)\frac{1}{f_e}\pi_{fe}(f)\Rightarrow x_R(t)=\sum_n x(nT_e)*sinc(f_e(t-nT_e))$

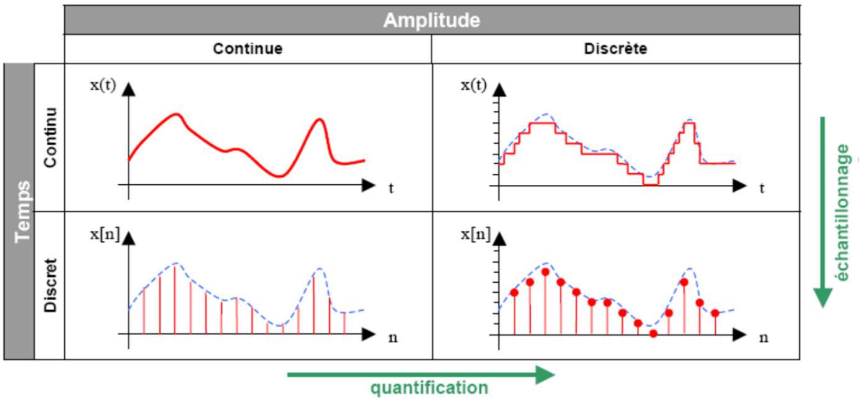
Bloqueur d'ordre 0 $\Rightarrow x_R(t)=\sum_n x(nT_e)\,\pi_{Te}(t-nT_e-T_e/2)$

I. Analyse temporelle des systèmes linéaires et invariants discrets

La numérisation d'un signal est l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets. Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales : échantillonnage et quantification.



La restitution (ou l'interpolation) constitue le processus inverse qui intervient lors du passage du signal numérique au signal analogique : commande d'un actionneur. Ces trois étapes sont indissociables. En effet, le signal, étant le support physique d'une information, doit conserver au cours de ces modifications tout le contenu informatif initial. Cette condition, ajoutée à la notion de coût limite d'un système, va être à la base de la numérisation des signaux et de l'étude du traitement numérique [1].



Les traitements numériques sont aisément réalisés grâce à des additionneurs, des multiplieurs numériques, et des mémoires. En outre, les systèmes numériques possèdent de nombreux avantages comparées à ceux analogiques, entre autres [2]:

- Simplicité: Les systèmes numériques sont intrinsèquement plus simples à analyser (et donc à synthétiser) que les systèmes analogiques

- Possibilités de traitement accrues: Il est possible de réaliser, en numérique, des opérations beaucoup plus complexes qu'en analogique, notamment des opérations non-linéaires.

- Robustesse aux bruits. Les systèmes numériques sont par essence insensibles aux bruits parasites électromagnétiques. Le transcodage de l'information sous forme numérique joue un peu le rôle de « firewall ».

- Précision et stabilité. Puisque les seuls « bruits » sont liés à la précision des calculs, cette dernière dépend uniquement du calculateur utilisé ; elle est insensible à la température et ne varie pas avec l'âge du système.

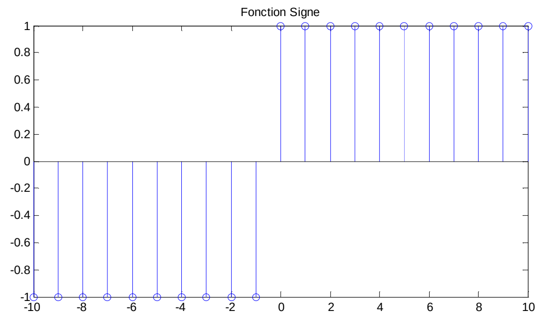
- Flexibilité. Dans un grand nombre de systèmes numériques, le traitement est défini par un logiciel chargé en mémoire. Il est dès lors très facile de modifier ce traitement, sans devoir modifier la machine qui le réalise.

1. Signaux déterministes à temps discret usuels

Rappelons que les signaux déterministes renferment une information dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique (au contraire des signaux aléatoires/stochastiques). Nous présentons dans cette section quelques fonctions mathématiques supports de signaux élémentaires et utilisées tout au long du cours de traitement du signal numérique. Rappelons qu'un signal à temps discret provient souvent de l'échantillonnage à la cadence $f_e = 1/T_e$, d'un signal x(t) déterministe à temps continu qui est supposé à bande limitée $(-f_e/2, f_e/2)$. Nous noterons x(n) = x(nT$_e$).

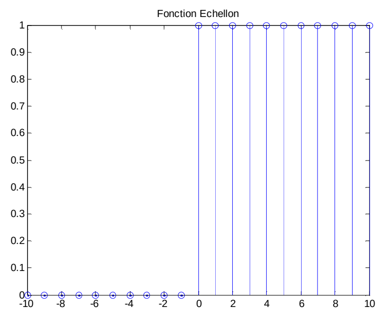
- Fonction signe

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$



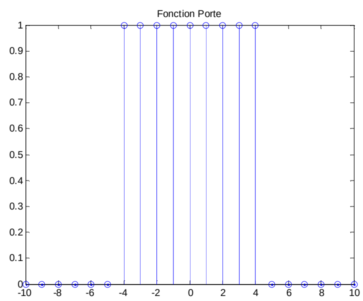
- Fonction échelon (unité)

$$U(n) = \Gamma(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



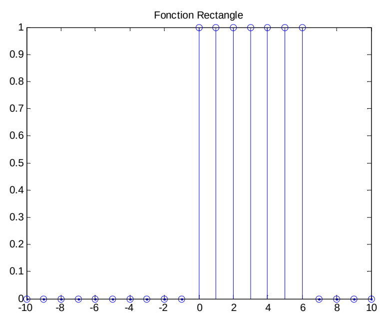
- Fonction porte

$$\underset{N+1}{\Pi}(n) = \begin{cases} 1 & -N/2 \leq n \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

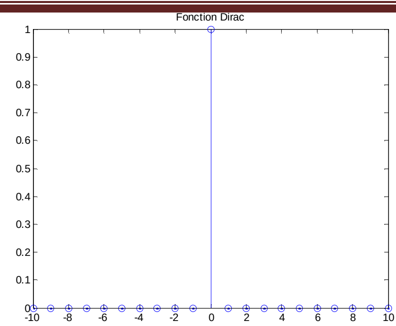


- Fonction rectangle causal

$$rect(n/N) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



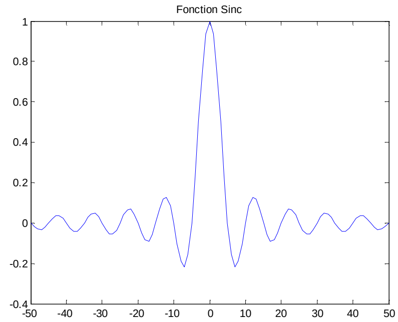
- Fonction Dirac (impulsion unité)



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad = U(n) - U(n-1)$$

- $x(n).\ \delta(n-n_0)=x(n_0)$
- $x(n) * \delta(n-n_0)=x(n-n_0)$

- Fonction sinus cardinal



$$\sin c(\theta n) = \frac{\sin(\pi\theta n)}{\pi\theta n}$$

2. *Energie et puissance*

Toute transmission d'information s'accompagne de transferts d'énergie. En effet, les signaux continus ou discrets sont essentiellement caractérisés par l'énergie ou la puissance qu'ils véhiculent. Ce sont les seules grandeurs physiques auxquelles sont sensibles les détecteurs. Beaucoup de capteurs physiques mesurent une énergie ou une quantité quadratique. Par exemple, les capteurs optiques mesurent une intensité, les compteurs d'électricité mesurent une énergie, etc. Compte tenu de la définition fondamentale, l'énergie du signal entre les instants t et t+dt est : $|x(t)|^2$ dt (puissance instantanée multipliée par le temps).

Soit un signal x(n) à temps discret, tel que $\sum_{-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2$ existe et converge. Alors le signal est dit à énergie finie et la valeur de cette somme est appelée énergie du signal : $E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2$

<u>*Exemples:*</u> x(n) = Rect(n/N) énergie finie. x(n) = a (constante) et x(n) = A $\sin(2\pi f_0 n)$ ne sont pas à énergie finie

Pour un signal périodique, cette somme ne converge pas. On peut néanmoins définir la puissance d'un signal x(n) périodique de période N par :

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{-N/2}^{N/2-1}|x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \frac{1}{2.N}\sum_{-N}^{N-1}|x(n)|^2$$

Dans le cas général, on parle de signaux à puissance moyenne finie définie par:

$$P_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{-N/2}^{N/2-1}|x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2.N}\sum_{-N}^{N-1}|x(n)|^2$$

<u>*Exemples:*</u> signal continu x(t)=a, A $\sin(2\pi f_0 t)$, signaux périodiques, échelon unité, peigne de Dirac.

Il existe des signaux ni périodiques, ni d'énergie finie, pour lesquels la puissance ne peut être définie, comme par exemple la rampe x(n)=n. Il s'agit là de définitions mathématiques, en pratique, un signal mesuré ne l'est jamais sur un intervalle de temps infini. On peut commencer à visualiser un signal à un instant qu'on prendra comme origine des temps, et dans ce cas on arrêtera son examen au bout d'un temps T_{obs} :

$$E_x = \sum_{n=0}^{Nobs} |x(n)|^2$$

<u>Remarques</u> Signal à énergie finie ⇒ puissance nulle Signal à puissance finie ⇒ énergie infinie

Le calcul de l'énergie ou la puissance permet d'obtenir une première caractérisation du signal. Par ailleurs, la théorie du signal a largement développé des méthodes d'étude basées sur la corrélation pour caractériser le comportement temporel du signal.

<u>Exercice d'application</u> : Calculer l'énergie et la puissance des signaux : $\Pi_7(n)$, A cos(2πf₀n) .

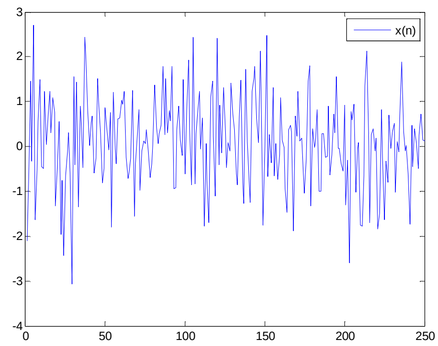
3. Corrélation et auto-corrélation

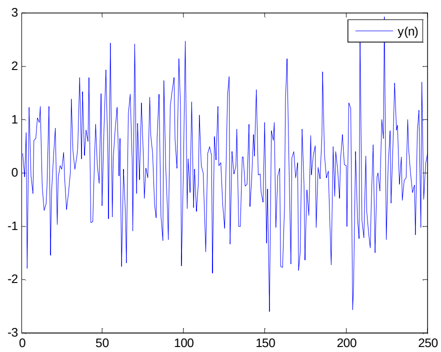
La fonction de corrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage. Considérons x(n) et y (n) deux signaux d'énergie finie, la fonction d'intercorrélation $R_{x,y}(k)$ est définie par: $R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n-k)$

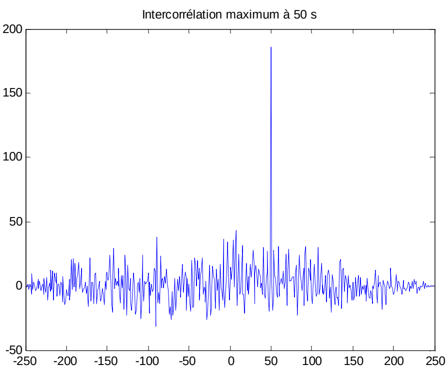
L'inter-corrélation entre x(t) et y(t) atteint un maximum pour un retard k si x(n)=y(n-k)

Pour des signaux à puissance moyenne finie, elle vaut : $R_{xy}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N} x(n)\, y^*(n-k)$

<u>Exemples :</u> Soient un signal aléatoire et sa version décalée de 50s. On remarque que les signaux se ressemblent le plus quand y(n) est décalé de 50 secondes.







Pour l'auto-corrélation, on remplace y(n) par x(n) on obtient l'expression de l'auto-corrélation pour les signaux à énergie finie: $R_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n-k)$

L'auto-corrélation permet de détecter des régularités, des profils répétés dans un signal comme un signal périodique perturbé par beaucoup de bruit (Voir TP n°1)

Propriétés :

- Pour k= 0, on retrouve l'énergie du signal $R_{xx}(0) = E_x$ et $R_{xx}(k)$ est maximale en k=0

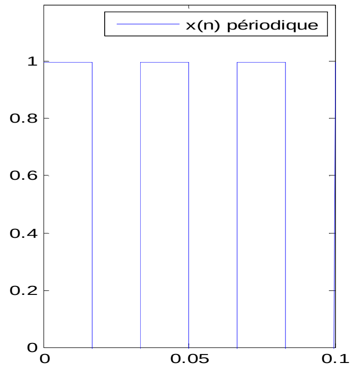
- Si x(n) est réel, l'auto-corrélation est réelle et paire.

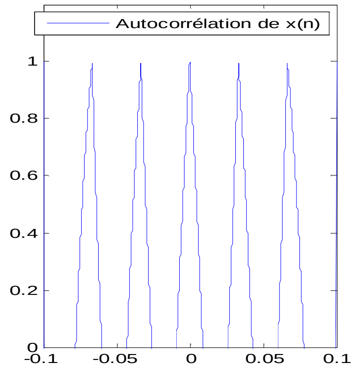
- L'auto-corrélation d'un signal de durée N aura une taille 2*N-1

Auto-corrélation des signaux périodiques : Le calcul sur une seule période suffit. L'auto-corrélation d'un signal périodique est-elle même périodique. Par définition, le signal périodique ressemble parfaitement à lui-même, décalé d'une ou plusieurs périodes.

- signaux périodiques

$$R_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-n} x(n)\, x^*(n-k)$$

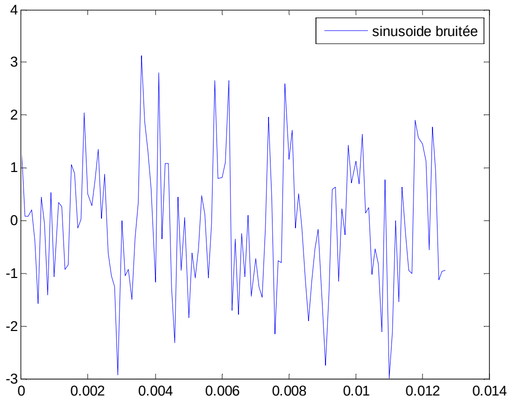


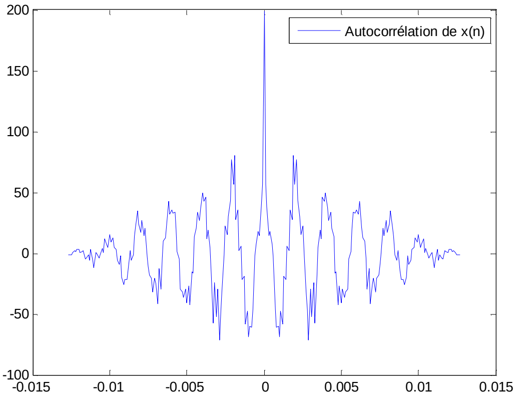


Exercice d'application Soit le signal x(n)=(n+1) pour n=0 à 3

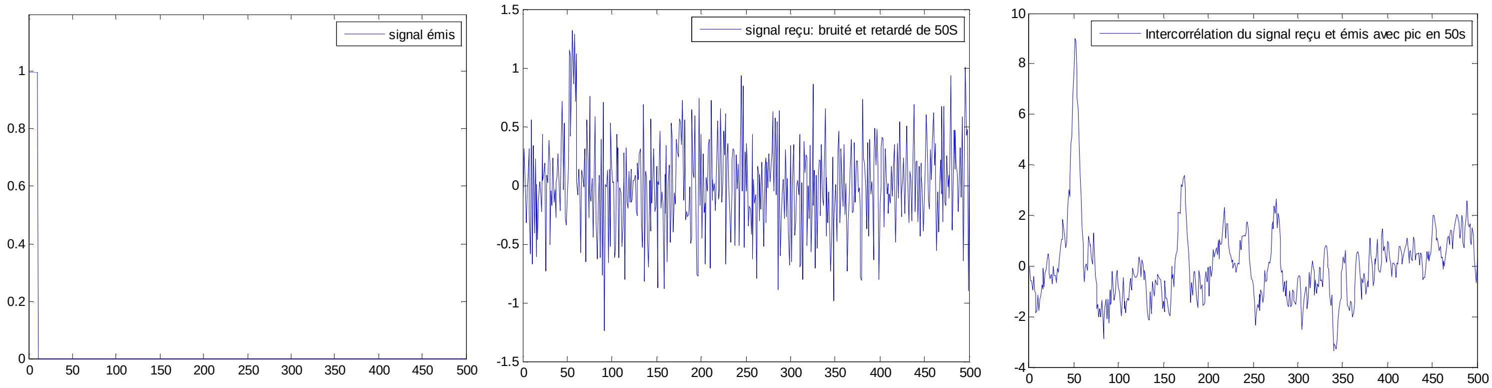
Calculer l'auto-corrélation de x et déduire son énergie

Exemples d'application : Extraction d'un signal noyé dans du bruit, mesure d'un temps ou retard, détection d'un signal périodique (Voir TP n° 1). L'exemple ci-dessous illustre l'auto-corrélation d'un signal sinusoïdal d'amplitude 1 noyé dans du bruit Gaussien de variance 1.



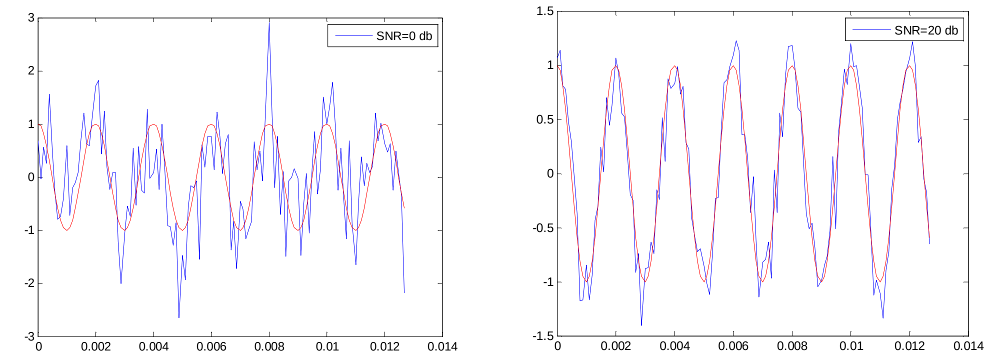


La corrélation est largement utilisée dans les systèmes radar. Ainsi, pour détecter un avion, on envoie une impulsion, puis on reçoit une version retardée, atténuée et bruitée de cette impulsion . L'intercorrélation su signal reçu et émis présentera un pic à l'instant correspondant au retard.



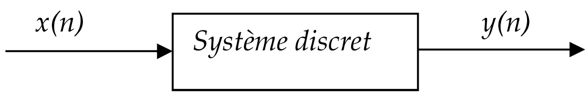
__Remarques__ : La notion de bruit est relative, elle dépend du contexte. Le rapport signal/bruit désigne la qualité de la transmission d'une information par rapport aux parasites. Il est défini par:

$SNR_{db}=20 \, Log(P_S/P_B)$

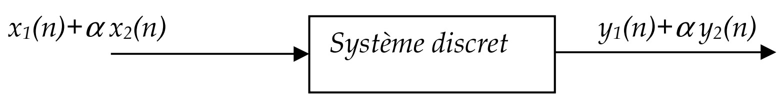


4. Théorie des systèmes linéaires et invariants discrets (SLID)

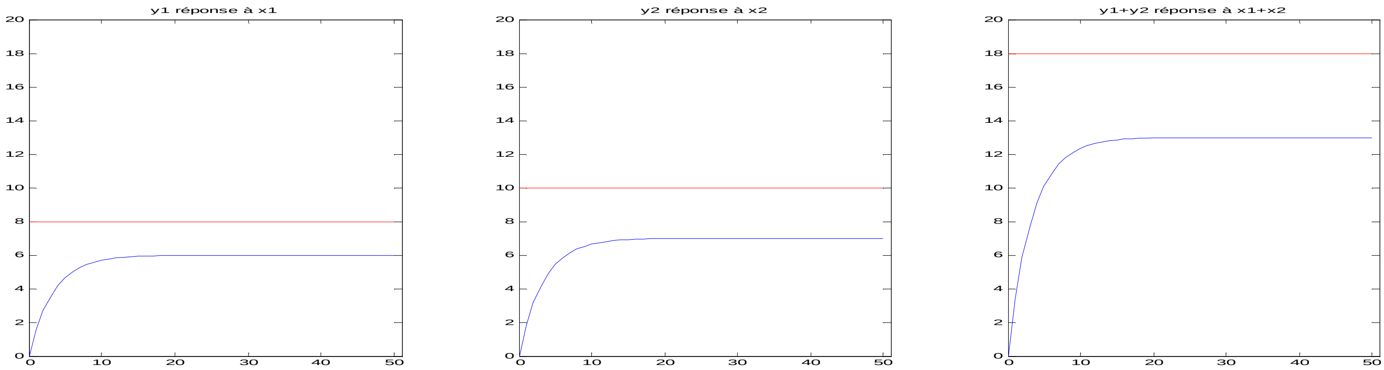
Un système linéaire est un modèle de système qui applique un opérateur linéaire à un signal d'entrée. C'est une abstraction mathématique très utile en automatique, traitement du signal, mécanique et télécommunications. Les systèmes linéaires sont ainsi fréquemment utilisés pour décrire un système non linéaire en ignorant les petites non-linéarités. Un système est *discret*, si à la suite d'entrée discrète *x(n)* correspond une suite de sortie discrète *y(n).*



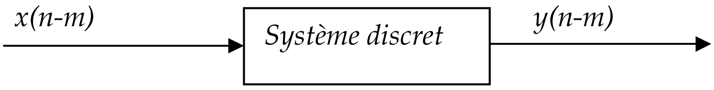
- Si l'entrée x(n) produit une sortie y(n), quand on applique une entrée k.x(n) , la sortie sera k.y(n). Si deux entrées $x_1(n)$ et $x_2(n)$ engendrent deux sorties $y_1(n)$ et $y_2(n)$ alors $x_1(n) + x_2(n)$ engendrera $y_1(n) + y_2(n)$



Exemple



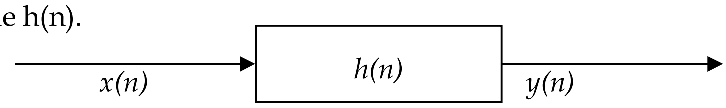
- S'il y a invariance dans le temps, une translation de l'entrée $(x(n) \Rightarrow x(n-m))$ se traduira par une même translation dans le temps de la sortie $(y(n) \Rightarrow y(n-m))$.



Si le système est invariant, cela implique que le système réagit de la même façon quel que soit l'instant auquel nous appliquons ses excitations. Cette propriété exprime que la caractéristique du système ne dépend pas de l'origine du temps, on parle encore de stationnarité.

Convolution

Si les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionnelle h(n).



On peut en déduire l'effet d'une entrée quelconque sous la forme d'une convolution. Cette dernière est l'opération de traitement de signal la plus fondamentale. Elle indique que la valeur du signal de sortie à l'instant n est obtenue par la sommation (intégrale) pondérée des valeurs passées du signal d'excitation x(n). La fonction de pondération est précisément la réponse impulsionnelle h(n):

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

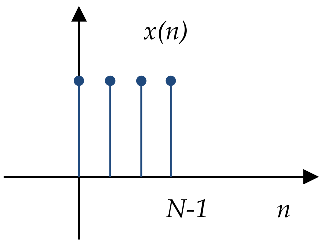
La réponse impulsionnelle h(n) est le signal qu'on obtient en sortie y(n)=h(n) si on applique en entrée une impulsion "de Dirac" $x(n)=\delta(n)$. Le Dirac est l'élément neutre de l'opération de convolution:

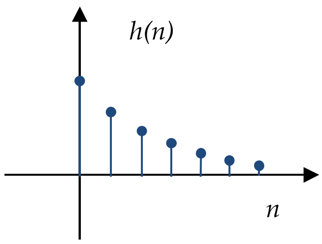
$$\delta(n) * x(n) = x(n)$$

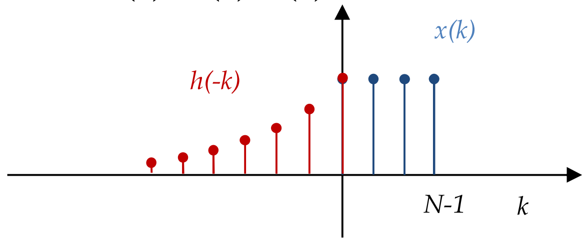
Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la somme du produit x(m)h(n -m). Le signal h(n-m) est simplement le signal initial h(m), retourné dans le temps pour donner h(-m) puis translaté de n. En calculant alors l'ensemble des produits obtenus en faisant « glisser » h, c'est-à-dire pour tous les décalages de n, on obtient le produit de convolution pour tout n.

<u>*Exemple 1:*</u>

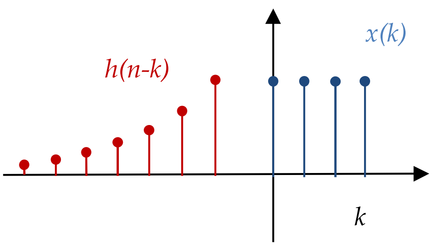
$x(n) = rect_N(n)$ $h(n) = a^n U(n)$ $0 < a < 1$ $z(n) = x(n) * h(n)$

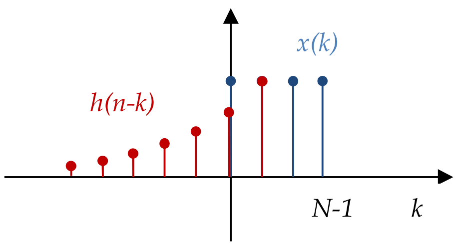


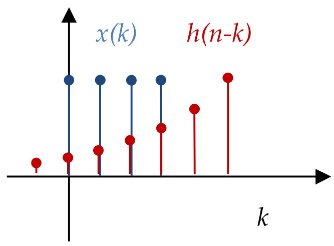




On distingue 3 cas :





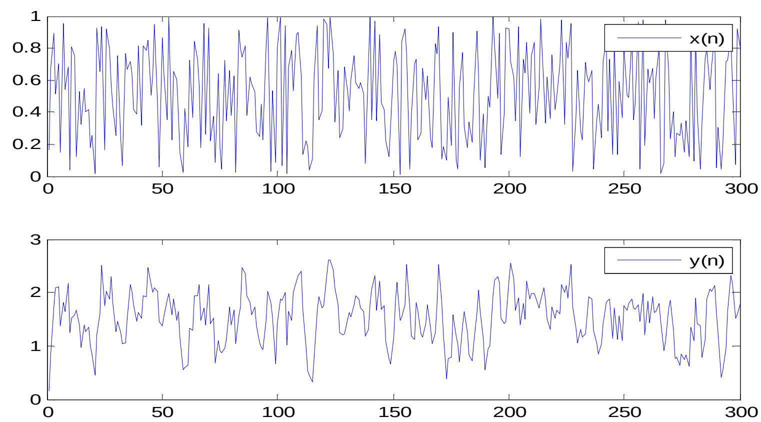


n<0 $\Rightarrow$ *z(n)=0* $0 \le n \le N-1 \Rightarrow z(n)=(a^{n+1}-1)/(a-1)$ $n>N-1 \Rightarrow z(n)=a^n(1-a^{-N})/(1-a^{-1})$

<u>*Exemple 2 :*</u>

$$h(n) = \frac{1}{N+1}\Pi_{N+1}(n) \Rightarrow y(n) = \frac{1}{N+1}\sum_{m=-N/2}^{N/2} x(n+m)$$

(Voir TP n°1)



<u>*Exemple 3:*</u> Soit le signal x(n) = {2, -1, 3} et h(n) = {1, 2, 2, 3}

Calculer y(n)=x(n)*h(n)

Pour des séquences finies, on peut utiliser la méthode des colonnes

Y(n)={2, 3, 5, 10, 3, 9}

h[n]	=	1	2	2	3		
x[n]	=	2	-1	3			
		2	4	4	6		
			-1	-2	-2	-3	
				3	6	6	9
		2	3	5	10	3	9

<u>*Remarques*</u>:

- Les opérations de corrélation et convolution sont liées. Mathématiquement, on peut écrire une relation qui permet d'exprimer la fonction de corrélation comme un produit de convolution (et réciproquement).

En effet: $R_{xy}(k) = x(n) * y^*(-n)$

On peut donc considérer l'opération d'un SLI comme une mesure de la corrélation entre deux signaux ($x^*(-n)$ et $h(n)$). En fait, le signal de sortie est "construit" à partir des composantes fréquentielles communes au signal d'entrée et à la réponse impulsionnelle.

- Si on applique à un SLIT une entrée sinusoïdale réelle ou complexe de fréquence f_0, alors, la sortie sera une sinusoïde dont l'amplitude et la phase pourront être modifiées mais qui conservera la même forme (une sinusoïde) et la même fréquence f_0. On dit que les sinusoïdes sont les fonctions propres des SLIT.

- Un système linéaire invariant est un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par une équation aux différences : $\sum_{i=0}^{M} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i)$,

5. Stabilité et causalité d'un SLID

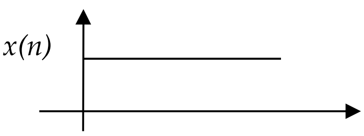
Une contrainte importante pour la formalisation de nombreux problèmes est de respecter la notion de *causalité* (les effets ne peuvent pas précéder la cause). Dans le cas des SLIT, cette causalité se traduit par le fait que pour: $h(n) = 0$ pour $n<0$.

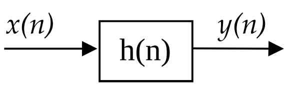
$x(n)=0,\ n<n_0$ alors $y(n)=0,\ n<n_0$ $\Rightarrow$ $h(n)=0,\ n<0$, $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{+\infty} x(n-m)h(m)$,

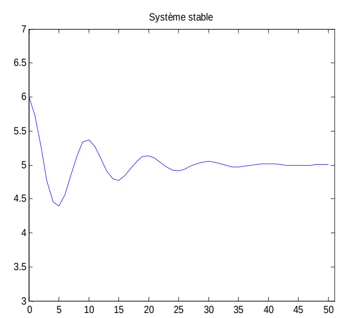
- si h et x sont causaux $y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)x(m)$

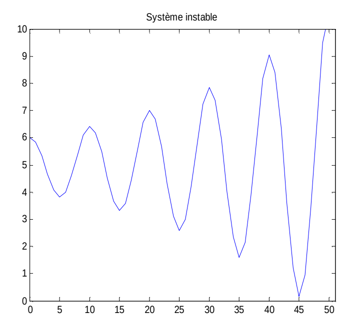
<u>*Remarque*</u> : Nous pouvons envisager mémoriser les signaux d'entrée et faire un traitement de ceux-ci en temps différé, les systèmes utilisés ne sont plus alors nécessairement causaux car pour élaborer la sortie à l'instant n_i, nous disposons en mémoire des entrées aux instants suivants. C'est souvent le cas en traitement d'image, en traitement de parole effectué après mémorisation du signal à traiter.

Une autre notion fondamentale est la *stabilité* des systèmes. La propriété de stabilité des systèmes bouclés est non seulement une performance mais une exigence pour le bon fonctionnement d'une boucle d'asservissement ou de régulation. Une boucle instable est une boucle inutilisable. La définition la plus courante de cette stabilité est la suivante :









On dit qu'un système est stable si, en lui appliquant une entrée bornée quelconque, la sortie reste bornée, ce qui implique dans le cas des SLIT: $\sum_{n} |h(n)| < \infty$

6. Filtres RIF et RII

- Si les a_i sont ≠ de 0, le système est dit récursif (RII), il est non récursif s'il ne dépend que des *x(n-i)* (RIF)

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée finie (RIF), alors : $y(n)=\sum_{m=0}^{K}h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, le système numérique est une fenêtre centrée sur les K plus récents échantillons.

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII) : $y(n)=\sum_{m=0}^{+\infty}h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, il est nécessaire de connaître tous les échantillons présents et passés, le système à une mémoire de longueur infinie.

<u>*Exemple* </u>1 $y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+.......+a_kx(n-k)$ est l'équation aux différence finies d'un filtre RIF

avec comme réponse impulsionnelle $h(n)=\delta(n)+a_1\delta(n-1)+a_2\delta(n-2)+.......+a_k\delta(n-k)$ qui, on peut le constater, est bien finie.

<u>*Exemple 2*</u> $y(n)=x(n)+a_1y(n-1)$ est l'équation aux différence finies d'un filtre RII

avec $y(n-1)=x(n-1)+a_1y(n-2) \Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2y(n-2)$

de même $y(n-2)=x(n-2)+a_1y(n-3) \Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2x(n-2))+a_1^3y(n-3)$

$\Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2x(n-2))+a_1^3x(n-3)+a_1^4x(n-3)+.....+a_1^my(n-m)$

En poursuivant le procédé à l'infini *y(n)* dépend d'une infinité de *x(n-k)* ce qui en fait un filtre RII.

<u>*Exemple d'application*</u>

Les séquences $x(n)$ (réel) et $y(n)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie d'un système discret. Pour chaque cas, identifiez celles représentant
a) des systèmes linéaires, b) des systèmes causals, c) des systèmes invariants aux translations de n,
d) des systèmes assurément ou possiblement stables (en fonctions des constantes)

1. $y(n) = x(n) + bx(n-1)$ 2. $y(n) = x(n) + bx(n+1)$ 6. $y(n) = b^{x(n)}$ b : constante réelle
3. $y(n) = nx(n)$ 5. $y(n) = x(n)e^n$ 7. $y(n) = |x(n)|$
4. $y(n) = x(n)\sin(2\pi f_0 n)$ N : constante entière

a) Tous sauf 6 et 7 b) Tous sauf 2

c) Les systèmes 1, 2, 6 et 7 d) 1 (b finie), 2 (b finie), 4, 6 (b finie) et 7.

Série 1

1. Donner l'expression du signal échelon U(n) en fonction du signal signe Sgn(n).

2. Donner l'expression du signal x(n) = Arect[(n-n_0)/N+1]=A $\prod_{N+1}(n-n_0)$ à l'aide du signal signe seulement. Justifier graphiquement la solution trouvée (N supposé pair).

3. Les signaux suivants sont-ils à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un, ni l'autre ? Calculer, dans chaque cas, l'énergie totale et la puissance moyenne totale (a>0).

- Arect(n/N+1) Asin(2πf_0n) Asin(2πf_0n).U(n) U(n)
- n.U(n) Ae^{-an}u(n) Ae^{-an} Atri(n/N)

4. Calculer l'autocorrélation des signaux suivants (devoir à rendre)

- Arect(n/N) Asin(2πf_0n) 5 δ_N(n) Bcos(2πf_0n)

5. Calculer la sortie y(n) lorsque : x(n) =δ (n–n_0) +δ(n–n_1) et h(n) = e^{-an}

6. Soit le signal échelon f(n)= E_0 U(n), d'amplitude E_0. Représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de f(n) par lui-même (auto-convolution).

7. La fonction triangulaire est définie de la manière suivante: $E^2N.\Lambda_N(n)=\begin{cases} E^2(n+1+N) & -N\le n\le 0 \\ -E^2(n-1-N) & 0\le n\le N \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

Vérifier analytiquement et graphiquement la relation E^2N. Λ_N(n) = E.Π_{N+1}(n) * E.Π_{N+1} (n), en déduire l'auto-corrélation du signal et son énergie (devoir à rendre)

Solutions

1. U(n)=1/2(sgn(n)+1)
2. x(n)= A/2 [sgn(n-(n_0-N/2))- sgn(n-(n_0+N/2+1))]
3. E=A^2.(N+1) Pm=0, E=∞ Pm=A^2/2, E=∞ Pm=A^2/4, E=∞ Pm=1/2
E=∞ Pm=∞, E=A^2/(1-e^{-2a}) Pm=0 , E=∞ Pm=∞, E=2A^2N(1+N) Pm=0
4. A^2N.Λ_N(k) A^2/2.cos(2πf_0k) 25δ_N(k) B^2/2.cos(2πf_0k)
5. $x(n)=e^{-a(n-n0)}+e^{-a(n-n1)}$
6. f(n)*f(n)= E_0^2.(n+1) pour n≥0 et 0 ailleurs

Exercices supplémentaires

1. Représenter les signaux suivants:
$\prod_N(n-1)$, n.U(n), (n-2).U(n-3), (-n+3)U(n-2)U(-n+3), $e^{-an.}$U(n-1)

2. Soient $x_1(n)=e^{-a.n}.U(n)$ $x_2(n)=e^{-b.n}.U(n)$

Calculer $x_1(n)*x_2(n)$ avec(a,b)∈ $\Re^+$ *et* a > b

Solution:

$$x(n)=\begin{cases} 0 & n<0 \\ e^{-bn}\dfrac{1-e^{(b-a)n+1}}{1-e^{(b-a)}} & n>0 \end{cases}$$

3. Calculer et esquisser graphiquement pour les cas n_0< n_1 et n_0> n_1 le produit de convolution z(n) = x(n)*y(n) pour les cas suivants :

- X(n) = A[δ(n+n_0) + δ(n-n_0)] et Y(n) = B δ(n) + 1/2B[δ(n+n_1) + δ(n-n_1)]

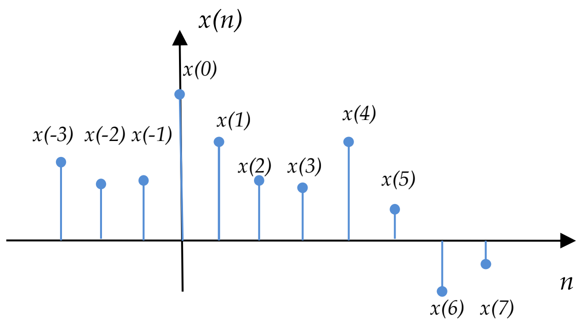
Solution : X(n)*Y_1(n)=AB[δ(n+n_0) + δ(n-n_0)]+AB/2[δ(n+n_0+n_1) + δ(n-n_0-n_1)+ δ(n-n_0+n_1) + δ(n-n_0-n_1)]

TP n°1 : Analyse temporelle des SLID

Convolution, Energie, Puissance et Corrélation

I. Rappels

Un signal discret s(n) est une suite de N échantillons régulièrement espacés de Te secondes: x(0),x(Te),x(2Te),………., x((N-1)Te) où Fe=1/Te est la fréquence d'échantillonnage. Le tracé graphique d'un signal discrétisé en temps peut s'effectuer simplement à l'aide de la fonction stem sous matlab.



- L'énergie d'un signal x(n) est fournie sous matlab par **sum(x.^2).** Concernant la puissance moyenne, il faut diviser l'énergie par le nombre d'éléments de x(n).
- Pour la corrélation et la convolution, on utilisera, respectivement, les fonctions **xcorr** et **conv.** A noter que la convolution ou la corrélation de x et h de durée respective N et M est un signal y(n) de durée (N+M-1)
- La fonction **b=m+ s*randn(N,1)** permet de générer un vecteur bruit b de distribution pseudo normale (Gaussienne) de taille N de moyenne m et de variance s^2 dont la puissance est $P_s = m^2 + s^2$.

II. Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : δ(n) =1 pour n=0 et vaut 0 ailleurs

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-10:10;
x=[zeros(1,10),1,zeros(1,10)];
stem(t,x);
axis([-10 10 -0.5 1.5]);
title('Dirac');
xlabel('n'); ylabel('Amplitude');
```

2. Le programme suivant permet de générer un échelon U(n)=1 pour n≥0 et 0 pour n<0

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-20:20;
x=[zeros(1,20),ones(1,21)];
stem(t,x);
title('Echelon unite');
xlabel('n'); ylabel('Amplitude');
```

3. Pour générer N=128 échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0=1000, on peut procéder de la façon suivante, choisir une fréquence d'échantillonnage : Fe = 8000 (le pas de temps Te=1/Fe) Créer le vecteur des temps : t = (0:N-1)Te. Te. Calculer les échantillons: x = cos(2*pi*t*f_0) ; Puis, regarder le résultat : plot(x) ou plot(t,x).
Ce qui nous donne :

```
clc ; clear all ; close all ;
N=128;  fo=1000; Fe=8000; Te=1/Fe;
t=(0:N-1)*Te;  x=cos(2*pi*fo*t);
plot(t,x) ;
figure; plot(x);
figure; stem(t,x)
```

III. Programmes à réaliser

1. Le programme suivant permet de créer une porte de largeur 2s, centrée en 3 s, d'amplitude 4, échantillonnée avec Te=0.1s avec N=40 et de calculer son auto-corrélation et son énergie.

```
clc; clear all; close all;
Te=0.1; N=50; A=4;
t=(0:1:N-1)*Te;
porte=A*[zeros(1,15),ones(1,20),zeros(1,15)];
subplot(2,2,1); plot(t,porte);
subplot(2,2,2);stem(t,porte);
y1= xcorr(porte); tt=(-N+1:1:N-1)*Te;
subplot(2,2,3); plot(tt,y1);
y2=Te* xcorr(porte);
subplot(2,2,4); plot(tt,y2));
Energie1=sum(porte.^2)
Energie2=sum(porte.^2)*Te
```

- Quelle est la différence entre plot(x) et plot(t,x)?
- Quelle est la différence entre plot et stem?
- Utiliser le workspace pour visualiser la taille et le contenu des vecteurs t, tt, porte et y. Commenter
- Calculer l'auto-corrélation théorique. Comparer y1 et y2.
- Retrouve-t-on les propriétés de l'auto-corrélation?
- Calculer l'énergie théorique et comparer avec Energie 1 et Energie2.

2. Commenter le programme suivant :

```
clear all; close all; clc;
N=500; x=zeros(N,1); x(1:10)=1;
figure; plot(x); axis([0 N 0 1.2]); legend('signal émis');
y=circshift(x,50);
y=y+0.4*randn(N,1);
figure; plot(y); legend('signal reçu: bruité et retardé de 50s')
z=xcorr(y,x); z=z(N:end);
figure; plot(z);
```

- Induire un autre retard et observer.
- Changer la puissance du bruit et commenter.
- Donner un exemple d'application de ce programme.

3. Soit le programme ci-dessous

```
clear all; close all; clc;
 N=300; T=3;Te=1;
 X=rand(N,1); t_x=(0:N-1)*Te;
 h=(1/T)*ones(T,1);t_h=(0:T-1)*Te;
 subplot(3,1,1);  plot(t_x,X);  subplot(3,1,2);  stem(t_h,h,'r');
 Y=conv(X,h);  t_y=(1-T:N-1)*Te;
 subplot(3,1,3); plot(t_y,Y);  axis([0 N min(Y) max(Y)]);
```

- Commenter le programme. Changer la valeur de T et observer.
- Comment nomme-t-on le signal h? Quel est son rôle?

4. Générer et visualiser le signal *x* composé de 50 échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0 =0.1 avec fe=10.f_0
- Calculer et afficher son auto-corrélation et comparer avec l'auto-corrélation théorique.
- Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence) à partir de l'auto-corrélation.
- Générer le signal z=x+b ou b est un bruit avec (m=0 , s=0.5) .
- Calculer et visualiser l'auto-corrélation de z pour s=0.5, s=1 puis s=2 en commentant.
- Retrouver dans chacun des cas précédents la fréquence du signal à partir de l'auto-corrélation de *z*.