

II. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Dans la réalité, les signaux n'ont pas toujours une forme simple en raison de la nature de l'information qu'ils portent. Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile. Pour cela, on fait appel à la transformée de Fourier. Elle a pour but de mettre en évidence des caractéristiques du signal non évidentes dans la représentation temporelle : les propriétés fréquentielles (spectrales). L'utilisation de cette description fréquentielle permet en outre de caractériser simplement les filtres linéaires, et faciliter leur étude.

Dans le but de calculer la transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$ à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille finie, on est amené à discrétiser le signal (échantillonnage), à tronquer temporellement ce signal et à discrétiser sa transformée de Fourier[1].

1. Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Lorsque le signal à traiter n'est plus analogique mais numérique, la relation de la TF devient :

$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$\Rightarrow X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) e^{-2\pi j f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f nT_e}$$

L'échantillonnage périodise le spectre du signal avec une période de répétition f_e ainsi $X_e(f) = X_e(f + f_e)$, par ailleurs, l'amplitude est multipliée par un facteur f_e . Sachant que tout signal périodique peut être décomposé en séries de Fourier, on a :

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-2\pi j n T_e f} \quad \text{Avec} \quad x(nT_e) = C_n = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X_e(f) e^{2\pi j n T_e f} df$$

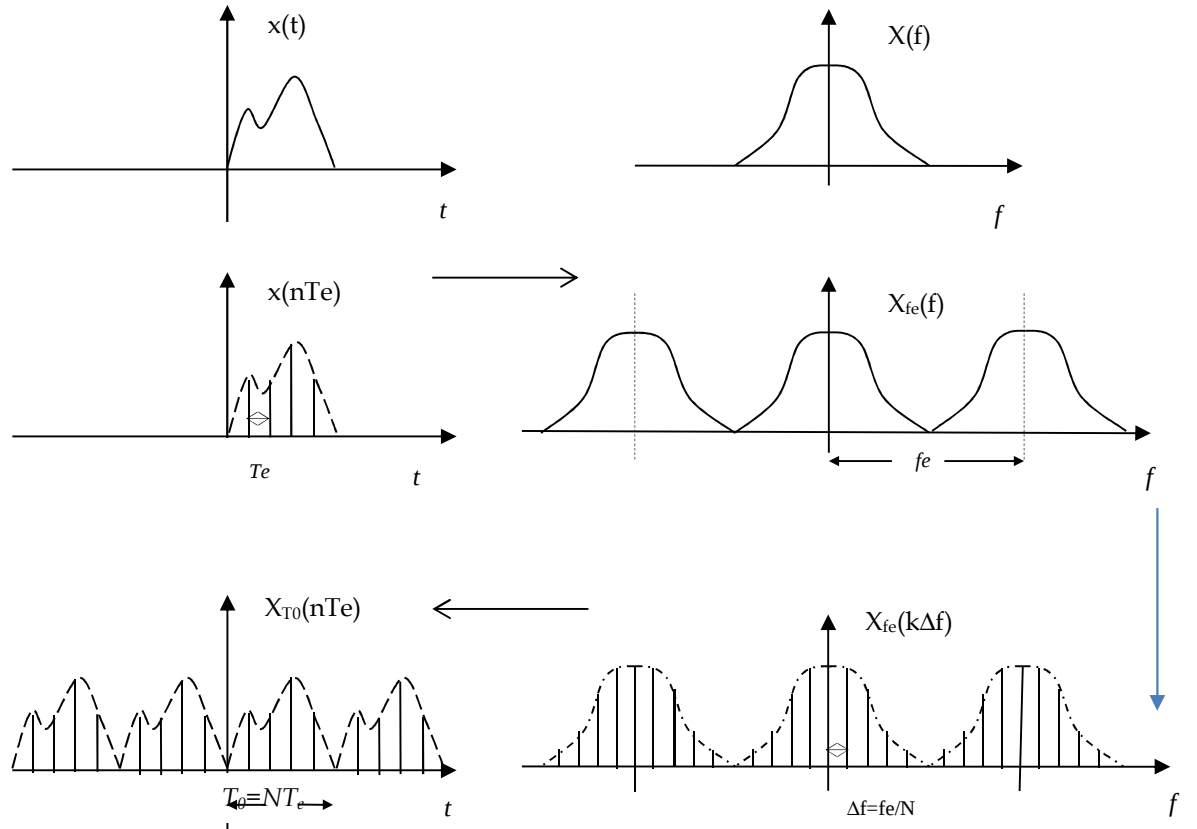
Cette transformée de Fourier appliquée aux signaux discrets est donc une fonction **à fréquence continue**, périodique de période f_e . Il est d'usage de la représenter sur un intervalle de longueur f_e , de $-f_e/2$ à $+f_e/2$.

Cependant, si on veut calculer la TF d'un signal discret à l'aide d'un calculateur, on se retrouve confronté aux problèmes suivants : Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures $x(n)$ (pas toujours possible dans la pratique : contraintes temps réel, etc.). En outre, le calculateur ne peut calculer une TFTD car sa réponse fréquentielle est forcément discrète = un nombre fini de points fréquentiel alors que f varie continûment [5]. La solution est de limiter la durée de $x(n)$ i.e. considérer un nombre fini N de points temporels et de discrétiser la fréquence (considérer un nombre fini L de points fréquentiels) d'où la TFD.

2. Transformée de Fourier discrète (TFD)

Cette transformée, popularisée par son calcul rapide (TFR ou FFT : Fast Fourier Transform), fait correspondre une suite de N valeurs à une autre de suite de N valeurs numériques également.

On considère un signal numérique $s(n)$ défini par N échantillons temporels, obtenus par échantillonnage avec la période T_e . La numérisation du signal $X(f)$ passe par l'échantillonnage de $X(f)$. On divise l'intervalle f_e par N , ainsi $X(f)$ est échantillonné à la cadence $\Delta f = f_e/N = 1/NT_e$. Ce dernier résultat entraîne une périodicité du signal temporel de $T_0 = 1/\Delta f = NT_e$.



Sachant que $f_e = N \cdot \Delta f$, f devient $k\Delta f$, les formules précédentes donnent:

$$X_e(kf_e / N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n T_e k f_e / N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n k / N} = X_e(k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi j n k / N} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_k e^{2\pi j n k / N} \end{cases}$$

Et $x(n) = \frac{1}{f_e} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_e(k) e^{2\pi j n k / N} \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_e(k) e^{2\pi j n k / N}$

Ce qui nous permet d'obtenir la TFD et la TFD inverse :

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n k / N} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{2\pi j n k / N} \end{cases}$$

On remarquer aisément que l'on perd toute notion de temps relatif aux échantillons. Nous obtenons au final une relation entre une suite indexée par une variable entière n et une suite indexée par k . Les N termes $X(k)$ correspondent à une approximation (à un facteur multiplicatif T_e près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $k \Delta f$, avec k entre 0 et $N-1$, c'est-à-dire f entre 0 et f_e .

Exemple

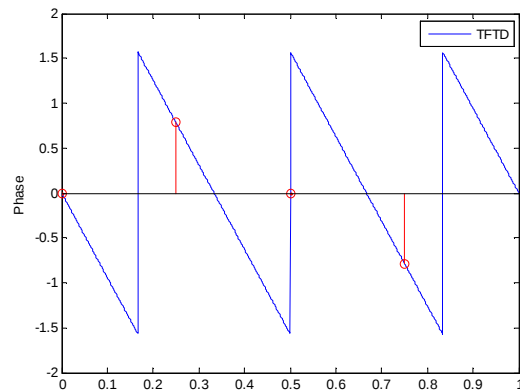
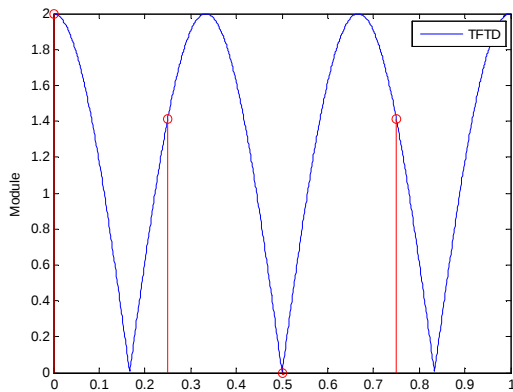
Soit le signal $x(n) = 1$ pour $n = 0$ et $n = 3$ et 0 ailleurs.

- Calculons d'abord la TFTD, ce qui nous donne $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f n T_e} = 1 + e^{-6\pi j f T_e} = 2 \cos(3\pi f T_e) e^{-3\pi j f T_e}$

- Calcul maintenant la TFD sur $N=4$ échantillons (4 échantillons de la TFD à partir de 4 échantillons du signal)

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-2\pi j n k / 4} = \begin{cases} \sum_{n=0}^3 x(n) e^0 = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 2 \\ \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-\pi j k / 2} = x(0) + x(1) e^{-\pi j / 2} + x(2) e^{-\pi j} + x(3) e^{-3\pi j / 2} = 2 \cos(3\pi / 4) e^{-3\pi j / 4} \\ \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-\pi j n k} = 2 \cos(3\pi / 2) e^{-3\pi j / 2} \\ \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-3\pi j n k / 2} = 2 \cos(9\pi / 4) e^{-9\pi j / 4} \end{cases}$$

Modules des 4 échantillons de $X(k)$: $2, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

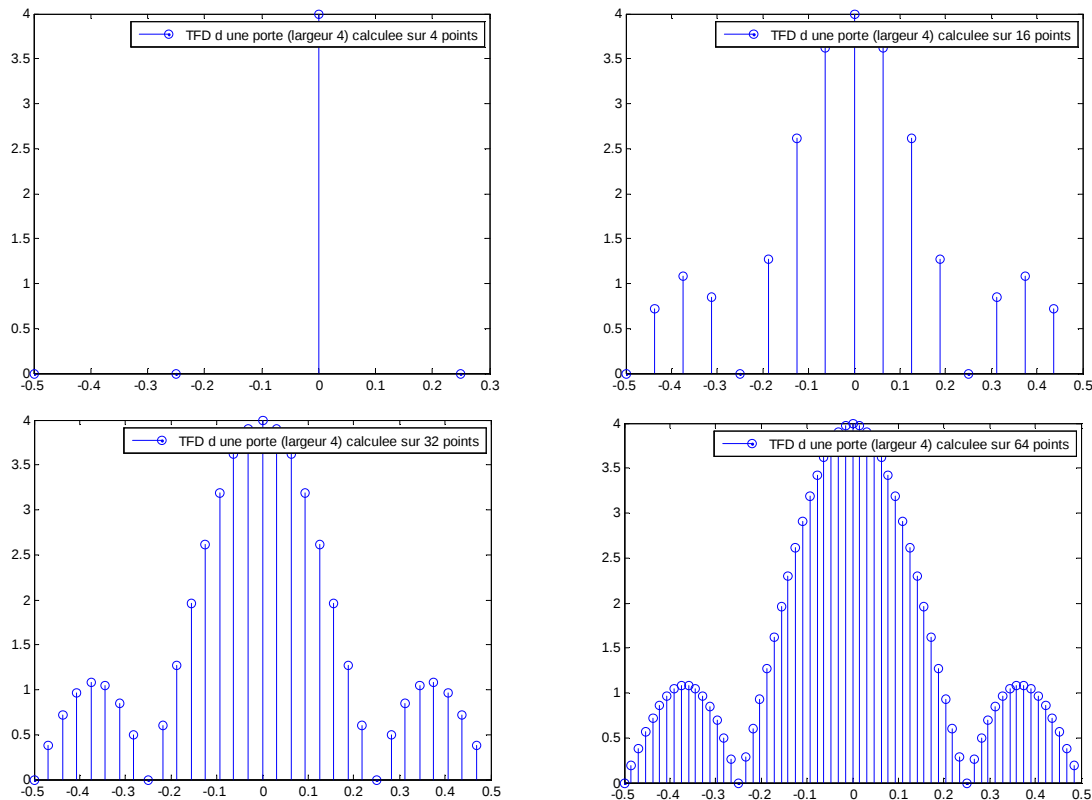


On peut observer que les quatre échantillons de la TFD (en rouge) se superposent à la courbe de la TFD (en bleu). On confirme que la TFD n'est que l'échantillonnage de la TFD limitée à N . On note en outre, que la précision fréquentielle est de $\Delta f = f_e / N$. Pour améliorer cette précision, il faudrait diminuer le pas en fréquence.

Remarque $x(n)$ est périodique de période N et $X(k)$ est aussi périodique de période N :

$$x(n+N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi(n+N)k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi n k}{N}} e^{j \frac{2\pi N k}{N}} = s_n$$

Sachant que $x(n)$ et $X(k)$ sont calculés sur le même nombre de points N , on peut augmenter la précision, par la technique du zéro-padding : on calcule la TFD sur un nombre NF pouvant être bien plus grand que le nombre de points N disponible du signal ($NF \gg N$). La figure suivante en donne un exemple (Voir TP n°2).



Autres propriétés : Toutes les propriétés se déduisent des propriétés de la transformée continue en se rappelant que chaque signal manipulé, de durée finie, doit être considéré comme une période d'un signal périodique, et cela en temps et en fréquence. La conséquence en est que la translation d'un signal (lors d'une convolution ou de corrélation) se traduit par un décalage circulaire [6]

o Linéarité : $ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{TFD} aX_1(k) + bX_2(k)$

o Décalage temporel : $x(n-m) \xrightarrow{TFD} X(f)e^{-\frac{2\pi j k m}{N}}$

o Décalage fréquentiel : $x(n)e^{\frac{2\pi j k_0 n}{N}} \xrightarrow{TFD} X(k-k_0)$

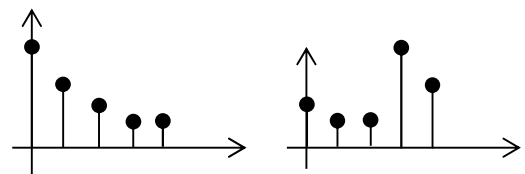
o Dualité temps-fréquence : $x(n) \xrightarrow{TFD} X(k) \Rightarrow X(n) \xrightarrow{TF} N.x(-k)$

o Changement d'échelle : $x(an) \xrightarrow{TFD} \frac{1}{|a|} X(k/a)$

o Convolution périodique : $x(n) * h(n) \xrightarrow{TFD} X(k).H(k)$

o $\delta(n) \xrightarrow{TFD} 1$ $\delta(n-m) \xrightarrow{TFD} e^{-2\pi j k m / N}$

o Par ailleurs, l'énergie se conserve: $\sum_0^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |X(k)|^2$



3. Calcul de la FFT ou TFR

La TFD est restée un outil peu utilisé jusqu'à l'apparition d'algorithmes « rapides » permettant son calcul. Le plus connu est dû à Cooley et Tuckey et date de 1965. Le calcul direct de la TFD sur N points nécessite N^2 opérations complexes. L'algorithme proposé réduit à $N \log_2(N)$ le nombre d'opérations. Ainsi, pour $N = 1024$, le temps de calcul de l'algorithme rapide peut être 100 fois plus court que le calcul utilisant la formule de définition de la TFD. Pour en donner un exemple, prenons le cas de $N=8$, il faut calculer :

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j \frac{2\pi n k}{N}} = \sum_{n=0}^7 s_n e^{-j \frac{2\pi n k}{8}}$$

Soit : $W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$ alors $S_k = \sum_{n=0}^7 s_n W_N^{nk}$

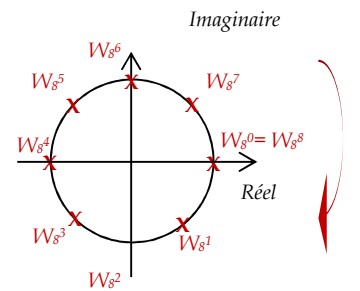
Pour $N=8$, explicitons la relation précédente :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix}$$

Les facteurs W_n présentent un certain nombre de propriétés dont certaines sont mises à profit dans l'algorithme :

$$W_N^{nN} = 1, W_N^{N/2} = -1, W_N^{n+N} = W_N^n$$

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix}$$



L'algorithme suppose que N est pair : posons $N=2P$. Introduisons les 2 sous-suites de s_n en fonction de la parité de n.

$$u_n = \{s_{2n}\}_{n=0, \dots, P-1}$$

$$v_n = \{s_{2n+1}\}_{n=0, \dots, P-1}$$

On obtient ainsi :

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n W_N^{nk} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_{2P}^{2ik} + \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_{2P}^{(2i+1)k}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_P^{ik} + W_N^k \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_P^{ik}$$

$$S_k = U_k + W_N^k V_k$$

Par ailleurs,

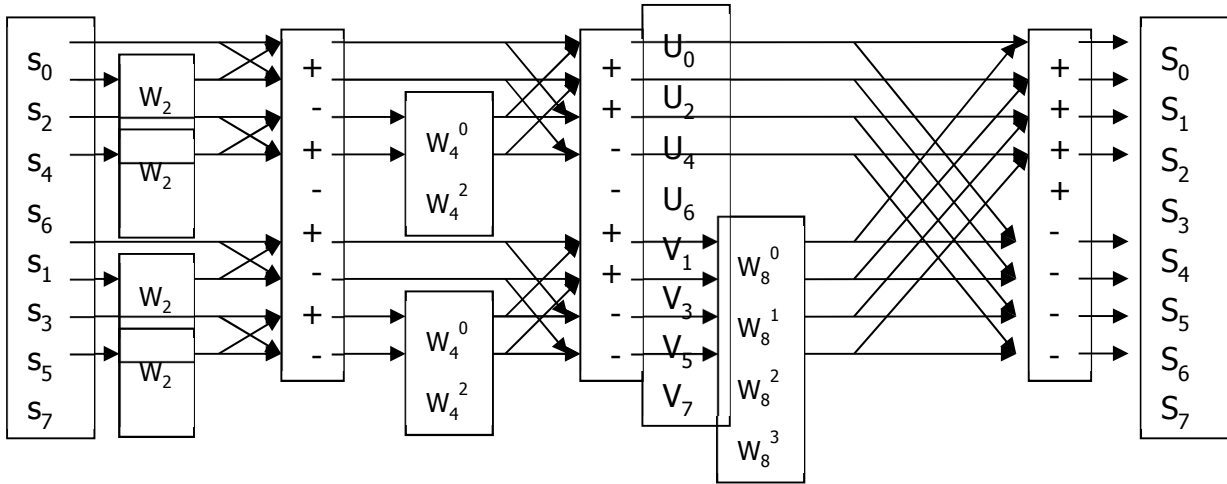
$$S_{(k+P)} = \sum_{n=0}^{N-1} s_n W_N^{(k+P)n} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_{2P}^{2i(k+P)} + \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_{2P}^{(2i+1)(k+P)}$$

$$S_{(k+P)} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_P^{ik} W_P^{iP} + W_N^k W_N^P \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_P^{ik} W_P^{iP}$$

$$S_{(k+P)} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_P^{ik} \cdot 1 + W_N^k (-1) \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_P^{ik} \cdot 1$$

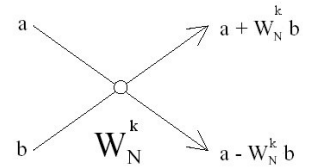
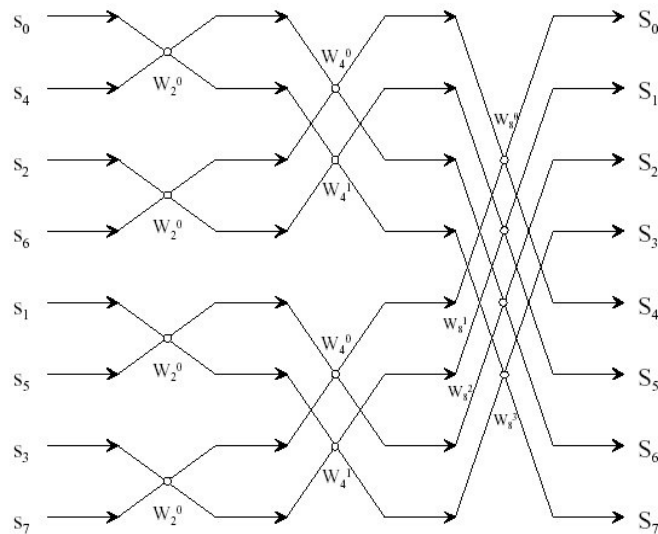
$$S_{(k+P)} = U_k - W_N^k V_k$$

Le calcul de la FFT revient donc à calculer U_k et V_k qui sont les TFD sur P points des suites de termes de rang pair et impair. On s'aperçoit qu'il ne reste qu'à exprimer les U_k et V_k .



Or, ce sont des TFD sur P points, qui peuvent subir le même schéma que précédemment à condition que P soit pair. On peut réitérer le processus à chaque sous-niveau si N est une puissance de 2 (Dans le cas contraire, on rajoute autant de 0 que nécessaire pour obtenir une puissance de 2).

Avec cette représentation, l'algorithme FFT se représente par :



L'algorithme papillon de FFT dit aussi à entrelacement temporel peut s'écrire sous forme matricielle. On obtient :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_8^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W_8^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W_4^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -W_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}$$

En opérant de la même façon sur la TFD⁻¹, on arrive à réduire considérablement le coût.

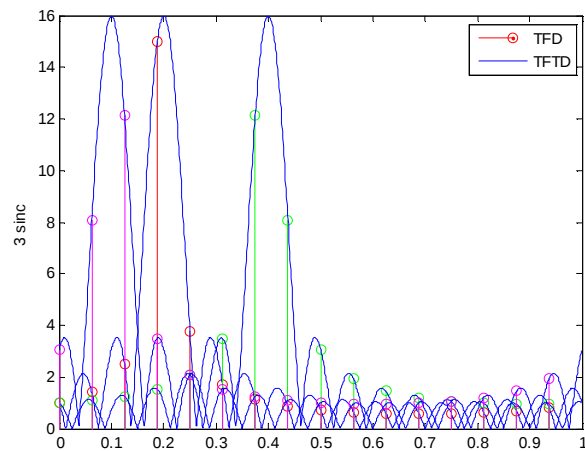
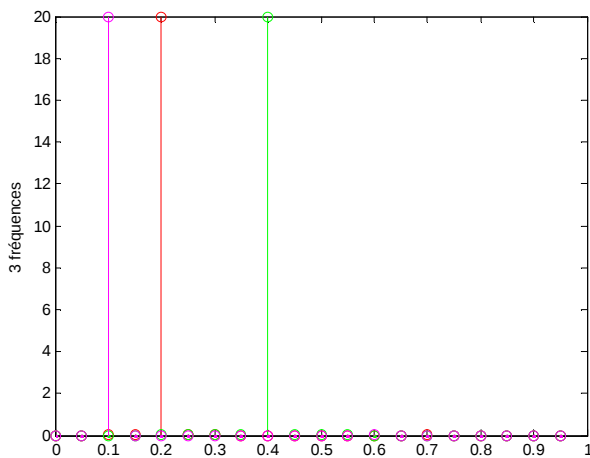
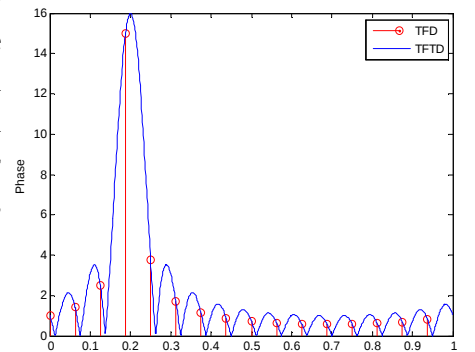
4. TFD des signaux de longueur illimitée

Le nombre d'éléments d'une séquence transformée par la TFD est implicitement limité, la fenêtre intrinsèque à la transformée discrète de Fourier est donc la fenêtre rectangulaire de durée $T_0 = NT_e$.

$$\left| TFD \left\{ x(n) \cdot \text{Rect}(n) \right\}_{T_0=NT_e} \right| \approx |X(f) * N \text{sinc}(fT_0)|$$

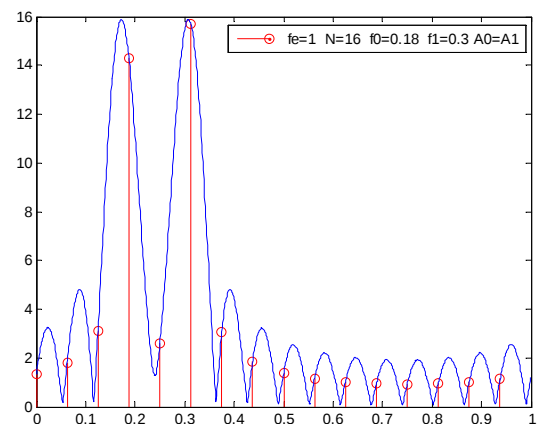
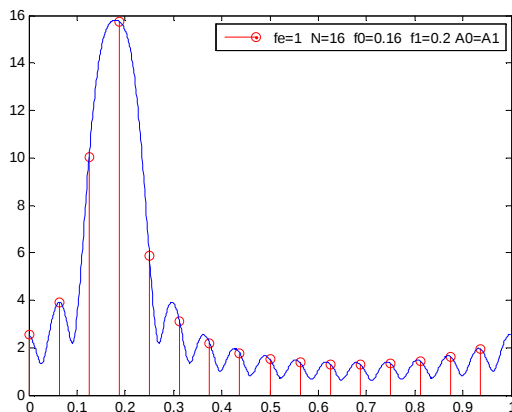
La troncation du signal échantillonné par une fenêtre de largeur T_0 a pour effet de convoluer le spectre avec un sinus cardinal qui s'annule tous les $1/T_0$ avec $T_0 = NT_e$ soit tous les f_e/N .

Exemple : En rouge est illustré $X(k)$ le module de la TFD de $\{x(n) = e^{2\pi j f_0 n}\}$, pour $n = \{0, \dots, N-1\}$, avec $N = 16$ et $f_0 = 0.2$. En bleu $X(f)$, le module de la TFD de $x(n)$. L'allure de $X(f)$ fait apparaître un lobe principal de largeur $2/N$ (ou $2f_e/N$) autour de la fréquence f_0 et des lobes secondaires de largeur $1/N$ (ou f_e/N). Dans le cas général, le spectre, obtenu par transformée de Fourier discrète, est donc un ensemble de fonctions $\text{sinc}(T_0 f)$ centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial.



Exemple : Considérons l'exemple suivant: $x(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_0 e^{2\pi j f_1 n}$ pour $n (0:N-1)$ où f_0 et $f_1 \in [-f_e/2, f_e/2]$

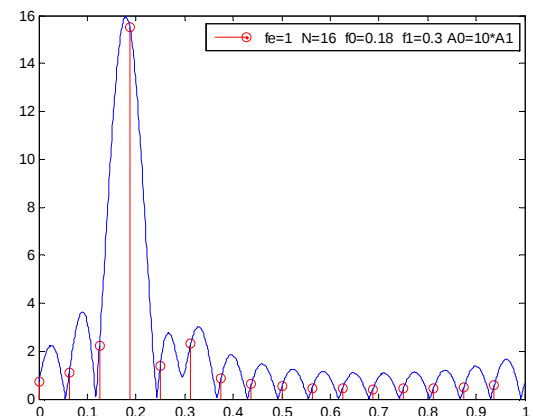
Le tracé du spectre par TFD montre que si l'écart en valeur absolue entre f_0 et f_1 est supérieur à f_c/N , il sera possible de distinguer les deux fréquences sur le tracé. Cette résolution en fréquence est liée au nombre de points N du signal (voir les 2 figure ci-dessous)



On considère maintenant l'exemple suivant (figure ci-dessus, à droite):

$$s(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_1 e^{2\pi j f_1 n} \quad \text{pour } n(0:N-1) \quad \text{où } A_0 > A_1$$

Un masquage du lobe principal de la composante en f_1 peut survenir en raison des ondulations présentes dans le spectre de $A_0 \exp(2j\pi f_0 n)$. Une « fréquence » d'amplitude faible au voisinage d'une d'amplitude plus élevée sera masquée par le premier lobe secondaire. Ce phénomène se révélera gênant lorsque le spectre est composé de nombreuses raies, proches les unes des autres. L'importance des lobes secondaires peut être réduite par l'emploi d'autres fenêtres.

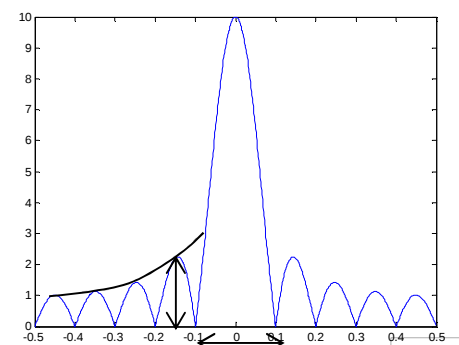


Mais cela se fera au détriment de la séparation de « fréquences » très voisines mais d'amplitude semblables car les 2 raies seront confondues dans un lobe principal plus large (la fenêtre rectangulaire possède le lobe principal le plus étroit).

5. Fenêtres de pondération

Lors de l'analyse spectrale d'un signal de longue durée, nous n'avons accès, en pratique, qu'à une portion limitée de ce signal. Le spectre obtenu correspond donc au spectre du signal à analyser auquel une *fenêtre* a été préalablement multipliée [7]. Pour ne pas altérer le spectre original, il faudrait que $W(f)$ (spectre de la fenêtre) se rapproche le plus possible d'une distribution de Dirac. La distribution de Dirac étant l'élément neutre du produit de convolution. Il y a deux éléments importants pour se rapprocher de la distribution de Dirac. La finesse du lobe principale et la hauteur des lobes secondaires.

En effet, plus la largeur du pic principal est fine, plus la résolution est grande, c'est-à-dire que l'on peut séparer des raies proches. Et plus les lobes secondaires sont élevés plus on dégrade la forme du spectre et la détection d'un signal d'amplitude faible en présence d'un signal d'amplitude élevée sera ardue [8].

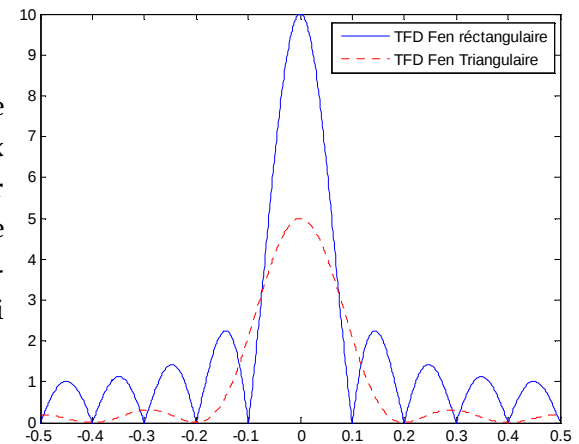


- Fenêtre Rectangulaire

Pour la fenêtre rectangulaire, on voit que la finesse du lobe principale ($2 f_e/N$), peut être réglée par le nombre d'échantillons N . Ainsi, plus on observe le signal longtemps, plus la résolution du spectre augmente ce qui paraît logique. Par contre, λ_R varie très peu en fonction de N (-13dB) donc toujours une distorsion de spectre.

- Fenêtre Triangulaire

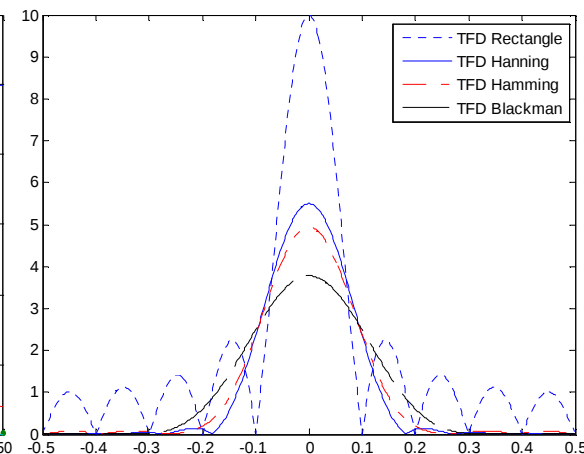
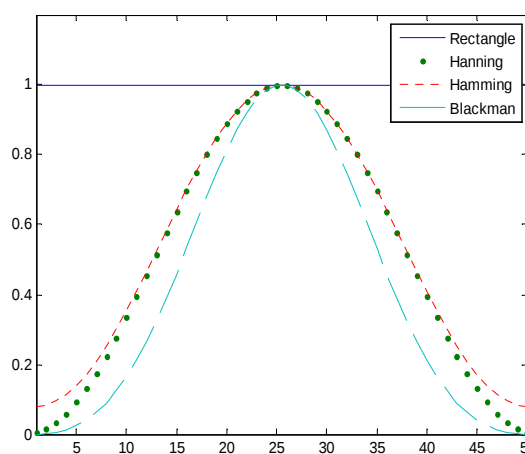
Pour obtenir la transformée de Fourier de la fenêtre triangulaire de largeur N , rappelons que la convolution de deux signaux rectangulaires donne un signal triangulaire. Ainsi, on peut exprimer cette fenêtre sous la forme d'une convolution de deux rectangles de largeur $N/2$. On observe une atténuation des lobes secondaires (-24dB) par rapport à la fenêtre rectangulaire[8]. Malheureusement, ceci se fait au prix de l'élargissement du pic central ($4 f_e/N$).



- Autres fenêtres

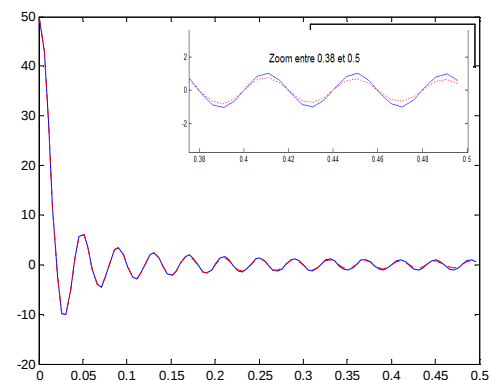
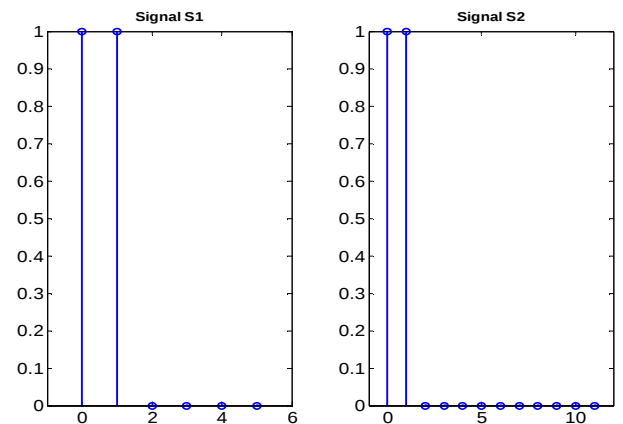
Fenêtres		Largeur de Transition : Δf	Lobe Principale/Secondaire
Rectangle	$w_{\text{Rect}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$2 f_e / N$	-13 db
Triangulaire	$w_{\text{Trian}}(n) = \begin{cases} 1 - 2 n /(N-1) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e / N$	-25 db
Hanning	$w_{\text{Han}}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e / N$	-31 db
Hamming	$w_{\text{Ham}}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e / N$	-41 db
Blackman	$w_{\text{Black}}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$6 f_e / N$	-57 db

Dans un problème d'analyse spectrale, on utilise généralement plusieurs fenêtres l'une après l'autre afin d'obtenir un bon compromis résolution/déformation.



Série n°2 (A)

1. Calculer la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de $x(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$
2. Soit $x(n) = 1/N$ pour $0 \leq n \leq N-1$ et 0 ailleurs.
 - Calculer et tracer la TFTD
 - Calculer sa TFD $X(k)$ pour N quelconque puis pour $N=4$ et tracer la.
3. On a le signal suivant $x(n) = e^{-an}U(n)$, avec $U(n)$ l'échelon unité, échantillonné à $T_e = 1$.
 - Calculer la TFTD
 - Calculer la TFD pour N et comparer si $N \rightarrow \infty$
4. La figure ci-contre représente 2 signaux discrets. Le signal S1 est obtenu avec un échantillonnage à la fréquence $f_e = 1200\text{Hz}$.
 - Calculer l'énergie du signal.
 - Déterminer et tracer l'auto-corrélation du signal S1.
 - On décale le signal S1 de 2 vers la droite, sans faire de calcul, tracer son auto-corrélation.
 - Déterminer la TFTD de S1 et tracer son module.
 - Calculer la TFD pour tout N . Tracer la TFD pour $N=6$.
 - Le signal S2 est obtenu à partir du signal S1, comment ?
 - Tracer approximativement la TFD de S2 ($N=12$).
5. Calculer la TFD du signal $s(n) = n$ pour $N=2, 3, 4, 8$.
6. Calculer la transformée de Fourier discrète (TFD) de la suite $x(n)$ formée de $N = 8$ points ($n \in [0,7]$), obtenue en échantillonnant à la fréquence $f_e = 16\text{ Hz}$ le signal $s(t) = 2\sin(8\pi t) + 8\cos(4\pi t)$
7. Etant donné les signaux $s(n) = \{1, -2, 3, 2\}$ et $v(n) = \{-2, 1, 2, 3\}$, déterminer $w(n) = s(n) * v(n)$ par
 - la méthode directe
 - la méthode de la TFD

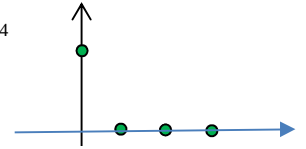


Solutions

$$1. X(f) = 1 + 6e^{-2\pi j f T_e} + 3e^{-4\pi j f T_e}$$

$$2. X(f) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi N f T_e)}{\sin(\pi f T_e)} e^{-\pi j (N-1) f T_e} \approx \text{sinc}(N f T_e) e^{-\pi j (N-1) f T_e}$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / N)} e^{-\pi j k (N-1) / N} \approx \text{sinc}(k) e^{-\pi j k (N-1) / N} \quad X(k) = \frac{1}{4} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / 4)} e^{-3 \pi j k / 4}$$



$$3. \text{TFTD } X(f) = \frac{1}{1 - e^{-a - 2\pi j f T_e}}$$

$$\text{TFD } X(k) = \frac{1 - e^{-aN}}{1 - e^{-a - 2\pi j k / N}}$$

$$4. E=3, R_{S1}(0)=2, R_{S1}(1)=R_{S1}(-1)=1, \text{ identique, } S_{S1}(f)=2\cos(\pi f T_e) e^{-\pi j f T_e}, S_{S1}(k)=2\cos(\pi k / N) e^{-\pi j k / N}$$

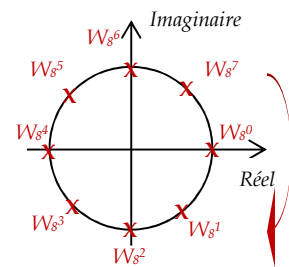
$S_{S1}=[2, 1.73, 1, 0, 1, 1.73]$, zéro padding, Rajouter des points entre la TFD de $N=6$.

$$5. N=2, X(k)=[1, -1]$$

$$N=3, X(k) = \left[3, \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{3}j), \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{3}j) \right]$$

$$N=4, X(k)=[6, 2j-2, -2, -2-2j]$$

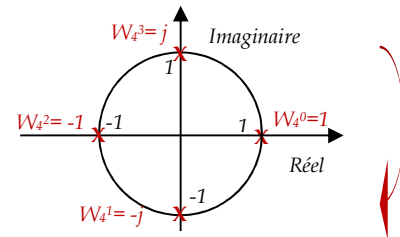
$$6. \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix}$$



$$s_n = \begin{bmatrix} 8 & 2+4\sqrt{2} & 0 & -2-4\sqrt{2} & -8 & 2-4\sqrt{2} & 0 & -2+4\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } W_8^k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) & -j & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) & j & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \end{bmatrix}$$

$$7. \text{Convolution circulaire } w(n)=s(n)*v(n)=[0, 18, 0, -2]$$

$$\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$



$$S_k=[4, 4j-2, 4, -2-4j]$$

$$V_k=[4, -4+2j, -4, -4-2j]$$

$$W_k=[16, -20j, -16, 20j] \Rightarrow w(n)=[0, 18, 0, -2]$$

Convolution Normale

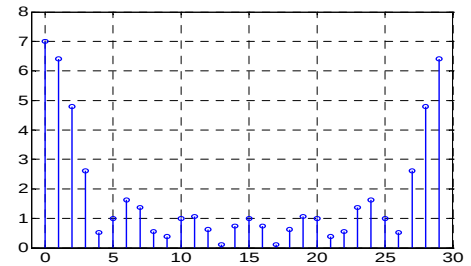
Convolution Circulaire

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & -2 & 3 & 2 \\ \times & -2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & -2 & 4 & -6 & -4 \\ & & 1 & -2 & 3 & 2 \\ & & & 2 & -4 & 6 & 4 \\ + & & & & 3 & -6 & 9 & 6 \\ \hline & -2 & 5 & -6 & -2 & 2 & 13 & 6 \\ + & 2 & 13 & 6 & & & & \\ \hline & 0 & 18 & 0 & -2 & & & \end{array}$$

Exercices supplémentaires

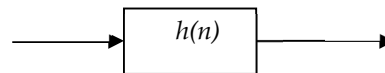
1. Calculer la TFD du signal $x(n)=1$ pour $0 \leq n \leq 6$ et $x(n)=0$ pour $7 \leq n \leq 29$

$$X(0)=7 \quad X(k \neq 0) = \frac{\sin(\pi k 7/30)}{\sin(\pi k/30)} e^{-6\pi j k/30}$$



2. Calculer la TFD de la suite $x=[2,3,-1,1]$ sur $N=4$ pts **Solution** $X=[5, 3-2j, -3, 3+2j]$

3. On considère le système suivant :

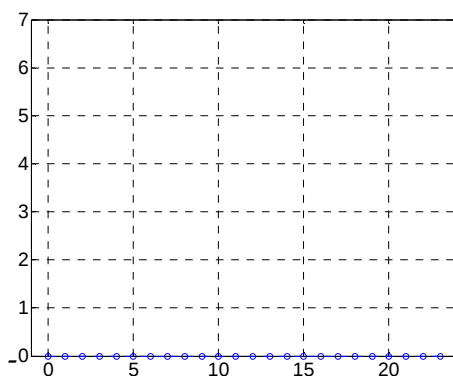
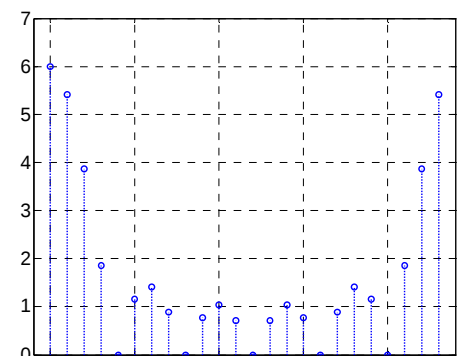


On suppose que $H(0)=H(1)=1$ et $H(2)=H(3)=0$.

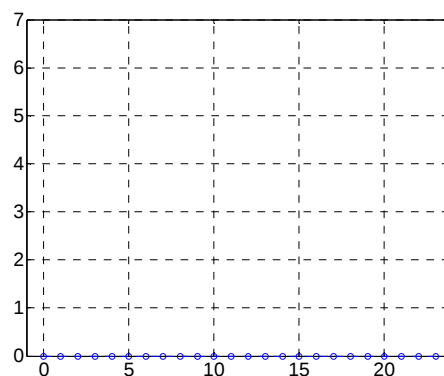
- Déterminer et tracer $h(n)$ pour $0 \leq n \leq 3$
- On pose $H(4)=H(5)=\dots=H(N-1)=0$. Donner le nom de cette technique.
- Quelle est le but de cette opération ? Donner, alors, l'allure approximative de $h(n)$ pour N assez grand.

4. Le signal suivant représente la TFD $X(k)$ d'un signal $x(n)$ calculée sur 24 points

- Représenter la TTFD $X(f)$ du signal $x(n)$.
- Représenter sa TFD sur 6 points.
- Sans calcul, identifier $x(n)$: _____



TTFD



TFD

TP n°2 : TFD et fenêtrage

Rappels

1. Transformée de Fourier Discrète

La TFD d'ordre N d'un signal numérique $s(kT_e)$, $k=0\dots N-1$ est définie par :

$$X(k) = X\left(\frac{k}{N} f_e\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2\pi j k n / N}, k = -N/2, \dots, N/2$$

Sa transformée inverse est donnée par:

$$x(n) = x(nT_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(kf_e / N) e^{2\pi j k n / N}, n = 0, \dots, N-1$$

Matlab fournit la fonction **y=fft(x)** pour calculer la transformée de Fourier complexe d'un vecteur de longueur N .

- La fonction **fft(x)** (respectivement **ifft(X)**) permettra de calculer la TFD (respectivement la TFD⁻¹) sur les N points, soit de 0 à $N-1$ correspondant à l'intervalle $[0, f_e]$ (respectivement $[0, NT_e]$). Le spectre obtenu sera un vecteur complexe que l'on pourra représenter en coordonnées cartésiennes (partie réelle et imaginaire fonction **real** et **imag**), ou en coordonnées polaires (module et phase, fonction matlab **abs** et **angle** ou **unwrap**).

- Pour une représentation entre $-f_e/2$ et $f_e/2$ de la TFD, il suffira d'écrire **X=fftshift(X)**

- Pour augmenter la précision, il suffit d'écrire **fft(x,NF)** où $NF > N$. La transformée inverse est donnée alors par **ifft(x,NF)**.

2. Exemple d'utilisation de la FFT sous matlab

```
clc; clear all
N=100; fo=1000; Fe=8000; Te=1/Fe;
n=0:1:N-1;
x=sin(2*pi*fo*n*Te);
t=Te*[0:1:N-1];
subplot(2,2,1); plot(t,x,'gx:'); grid;
y=fft(x);
axe_FF=Fe*(0:1/N:1-(1/N));
subplot(2,2,2); plot(axe_FF,abs(y/N),'b.:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète par FFT du signal entre 0 et fe')
xlabel('fréquence'); ylabel('Module du spectre');
y_dec=fftshift(y);
axe_freq=Fe*(-1/2:1/N:1/2-(1/N));
subplot(2,2,3); plot(axe_freq,abs(y_dec/N),'b.:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète par FFT du signal entre -fe/2 et fe/2')
xlabel('fréquence'); ylabel('Module du spectre');
%FFT inverse %
FFT_INV=ifft(y);
subplot(2,2,4); plot(t,FFT_INV,'bx:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète inverse du signal N=100')
xlabel('temps'); ylabel('Amplitude');
```

3. Programmes à réaliser

I. Reprendre l'exemple vu en cours $x(n) = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$, calculer, afficher et visualiser sa TFD pour $NF=4$ puis $NF=32$ et commenter.

II. TFD d'une porte

```

clc; clear all; close all;
N=6; Fe=1 ; Te=1/Fe;
n=Te*(1:N); x=ones(1,N);
subplot(2,1,1); stem(n,abs(x), 'bx:'); grid;
NF=6; y=fft(x,NF); y_dec=fftshift(y);
subplot(2,1,2); axe_freq=Fe*(-1/2:1/NF:1/2-(1/NF));
stem(axe_freq,abs(y_dec/N), 'r.:'); grid;

```

- Expliquer par un dessin le rôle de fftshift.
- Calculer la TFD théorique et comparer avec celle obtenue par ce programme.
- Prendre NF = 12 puis 24 puis encore 128 et commenter.
- Vérifier que l'énergie se conserve $\sum_0^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |X(k)|^2$
- Illustrer la propriété de décalage fréquentiel de la TF en calculant (théoriquement) et en représentant le module de la TFD de $x(n) \times e^{2\pi j f_0 n}$ avec $f_0=0.2$ Hz.
- Reprendre le signal original et mesurer la largeur Δf du lobe principal à partir de sa TF. Sa taille est-elle fonction de N ou NF?
- Afficher le module de la transformée de Fourier en décibels en écrivant `stem(axe_freq, 20*log10(abs(y_dec/N)), 'r.:');` grid;
puis vérifier que l'on a bien environ 13 dB entre le max du lobe principal et le max du lobe secondaire pour tout N (prendre N=10 et N=40).

III. TFD d'un signal illimité et Effet du fenêtrage

-Déterminer la TTFD théorique de $s(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n}$

- Que se passe-t-il si l'on calcule cette TTFD sur N ?

On calcule maintenant la TFD comme illustré par le programme suivant :

```

clc; clear all; close all;
N=50; NF=1024; Fe=8000; Te=1/Fe; f0=1680;
n=(0:N-1)*Te; x=exp(2*pi*j*f0*n);
y=fft(x,NF); yy=fftshift(y/N); axe_f=Fe*(-1/2:1/NF:1/2-(1/NF));
plot(axe_f,abs(yy)); grid; title('TFD Fenêtre Rectangulaire'); hold on;

```

- Pourquoi parle-t-on de fenêtre rectangulaire ? A-t-on vraiment multiplié par une fenêtre ?
- Que se passe-t-il si l'on remplace f_0 par 1600?
- On remet f_0 à 1680 et on rajoute au programme les lignes suivantes

```

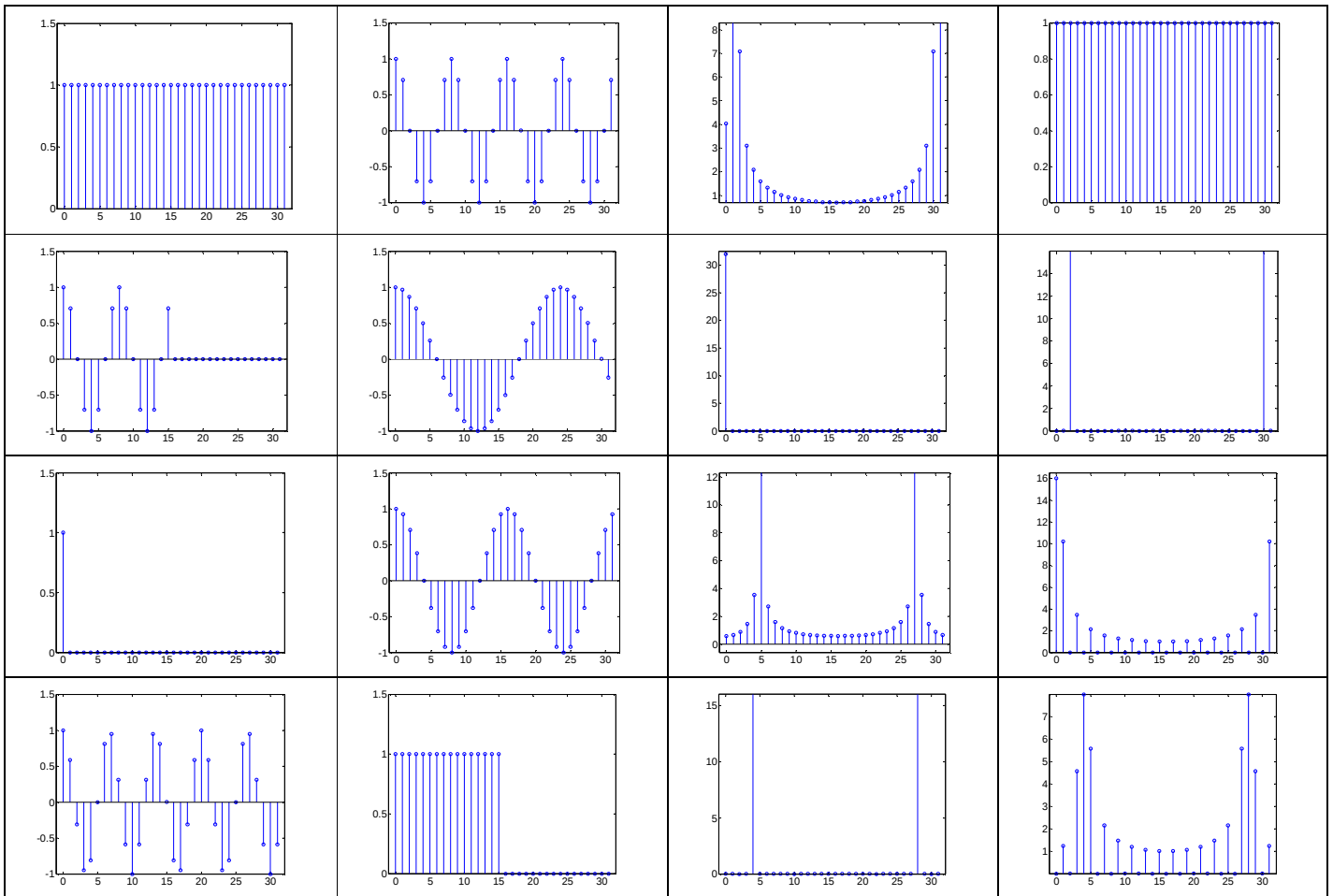
fen=hanning(N);
xx=x.*fen; y=fft(xx,NF); yy=fftshift(y/N);
plot(axe_f,abs(yy), 'r'); grid; title('TFD Fenêtre Hanning');

```
- Calculer la largeur du lobe principale pour chaque fenêtre en fonction de f_0 et N.
- Comparer les fenêtres (amplitude principale, largeur des lobes, amplitudes des lobes).
- Tester d'autres fenêtres (Hamming, Blackman, Triangulaire)
- Modifier ce programme pour calculer la TFD de la somme de 2 exponentielles de fréquences $f_0=1680$ Hz et $f_1=1800$ de même amplitude 1. Comparer alors les résolutions fréquentielles théoriques et pratiques des différentes fenêtres
- Refaire le même travail avec $f_0=1680$ Hz et $f_1=2100$ avec des amplitudes différentes ($A_0=1$ et $A_1=0.2$) et commenter.

Remarque Deux raies d'un spectre sont considérées comme séparables, si le maximum de l'une correspond au premier minimum nul de l'autre soit $|f_1-f_2| > \text{Largeur du lobe principal}/2 = L\Delta f/2$ (Voir tableau page 31) .

Série n°2 (B)

1. Etablir la correspondance entre chaque signal et sa TFD



2. Un signal analogique est échantillonné à une fréquence $f_e = 7500$ Hz et N échantillons sont collectés.

- Quelle est la résolution fréquentielle pour $N=1250$?
- Déterminer N permettant d'atteindre une résolution fréquentielle de 4.5 Hz.

3. Un signal analogique est échantillonné à une fréquence $f_e = 500$ Hz et $N=980$ échantillons sont collectés.

On veut connaître la valeur du spectre à 120 Hz.

- Quel indice k de la TFD est le plus proche de 120 Hz?
- Quel est le nombre minimum de 0 à rajouter obtenir une valeur de la TFD à 120 Hz exactement?
- Donner alors la valeur de l'indice k correspondant.

4. Soit $x(n) = \sin(2\pi f_1 n) + 0.5 \sin(2\pi f_2 n)$ avec $0 \leq n \leq 127$, $f_1 = 0.223$, $f_2 = 0.240$

- On veut employer un fenêtrage, calculer la largeur du lobe principale de chaque fenêtre
- Déterminer alors le fenêtrage permettant de visualiser les 2 sinusoides.

5. Soit $x(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_0 e^{2\pi j f_1 n}$ pour $n (0:N-1)$ où $f_0=0.25$, et $f_1=0.70$ et $f_e=2$ $N=20$.

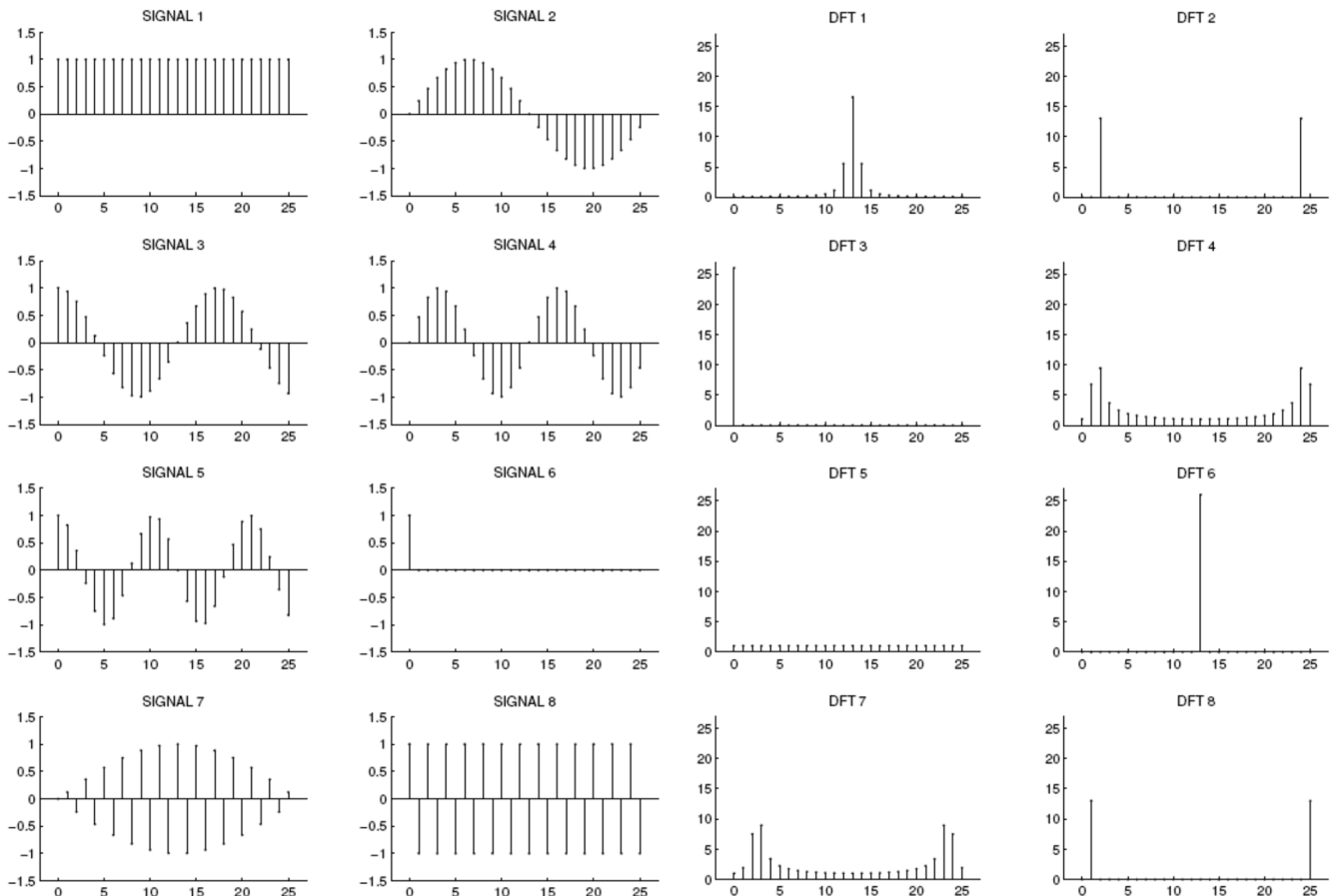
- Donner l'allure de la TFD et de la TFD.
- Quel est le but du fenêtrage ?
- Quelle est la meilleure fenêtre à utiliser pour ce signal ? Justifier.

Solutions

1. 1-3, 2-5, 3-6, 4-1, 5-2, 6-4, 7-7, 8-6
2. $\Delta f=6$ N=1667 3. $k=235$, Rajouter 20 zéros et prendre $k=240$
4. Rect=0.0156 Tri, Han, Ham= 0.03125 Black=0.0469 $f_1-f_2=0.017 \Rightarrow$ Rectangle ou Hamming
5. 2 sinc l'un en f_0 et l'autre en f_1 s'annulant tous les $f_c/N=0.1$, Atténuation des lobes secondaires, Blackman.

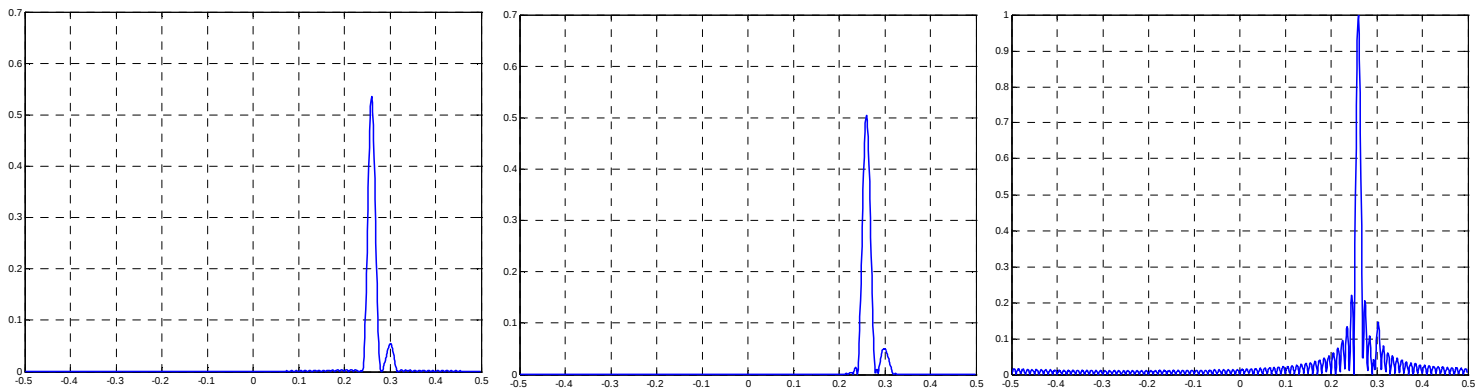
Exercices supplémentaires

1. On donne les signaux et les TFD suivantes, associer chaque signal à sa TFD



2. On souhaite calculer la TFD du signal suivant : $e^{2\pi j f_0 n} + 0.1 e^{2\pi j f_1 n}$ avec $f_0=0.26$, $f_1=0.3$, $N=100$ ($f_c=1$) et $NF=1024$. A cette fin, on teste différentes fenêtres (Rectangulaire, Hamming et Hanning). Les TFD obtenues sont illustrées ci-dessous.

- Identifier les fenêtre utilisées (en justifiant vos réponses)
- Quelle est la meilleure fenêtre pour ce signal ? Justifier.



Solutions:

1. (1,3), (2,8), (3,4), (4,2), (5,7), (6,5), (7,1) et (8,6)
2. Hamming, Hanning, Rectangulaire, Meilleure : Hamming.

3. L'analyse par la TFTD d'un signal $x(n)$ illimité a donné le signal $X(f)$ ci-contre

1. Tracer sa TFTD (on supposera que $T_e=1$ et $N=10$).
2. Tracer sa TFTD si on utilise un fenêtrage de Hamming.
3. Quelle fenêtre choisir ? (Justifier) : _____

