III. Analyse des filtres numériques par la TZ

La transformée de Fourier est un outil précieux d'analyse et de traitement des signaux. Cependant, dans certains problèmes (comme le filtrage numérique), les limites de la TF sont vite atteintes. La transformée en Z, qui s'applique aux signaux discrets, généralise la TF et permet de dépasser ces limites [10]. Elle est tout-à-fait analogue à la transformée de Laplace, mais plus facile à utiliser. Ce type de transformée permet de décrire aisément les signaux à temps discret et la réponse des systèmes linéaires invariants soumis à des entrées diverses. C'est un outil qui permet de calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies. Elle permet l'interprétation directe des caractéristiques des signaux et des filtres dans le domaine des fréquences [9].

1. Transformée en Z

• Définition : La TZ est la généralisation de la TFTD ($X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f nTe}$).

Soit un signal discret x(n). Sa TZ est définie par:

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$ où z est une variable complexe définie partout où cette série converge.

<u>Exemples</u> :

- x(n) = δ(n)⇒ X(z) = 1,

- x(n) = δ(n-k) ⇒ X(z) = z^{-k}, si k>0 RDC=¢-{0} si k<0 RDC=¢-{∞}

- x(n)=(<u>1</u>,2,3,5,0,2) on peut écrire x(n)=δ(n)+2. δ(n-1)+3. δ(n-2)+5. δ(n-3)+ 2. δ(n-5)

$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^{-5}$ RDC=¢-{0}

La série des puissances introduite dans l'équation de définition de la TZ ne converge que pour un sous-ensemble du plan complexe. Ce sous-ensemble est appelé région de convergence (RDC) ou domaine de convergence. Une région de convergence correspond à l'ensemble des valeurs de z telles que X(z) soit définie et à valeurs finies. Spécifier le domaine de convergence de la transformée est tout aussi important que la transformée elle même [9].

• Condition d'existence : La transformée existe si la série converge. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy $\lim_{n\to\infty} |U_n|^{1/n} < 1$ sur la convergence des séries géométriques $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$

L'ensemble des valeurs de la variable complexe z pour lesquelles la série converge est appelée Région De Convergence (RDC):

$$RDC = \left\{ z \in C \,/\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n).z^{-n} \right| < +\infty \right\}$$

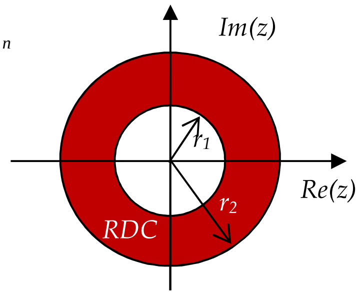
<u>Exemple</u> : TZ{u(n)}

$U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$, la limite est finie si $\left|z^{-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \;\Rightarrow U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ pour $|z| > 1$

De façon générale, on montre que la RDC est un anneau de convergence centré sur l'origine défini par :

$r_1 < |z| < r_2$ avec $r_1 = \lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n}$ et $r_2 = \lim_{n\to+\infty} |x(-n)|^{-1/n}$

où r_1 peut être réduit à 0 et r_2 peut être égal à l'∞.

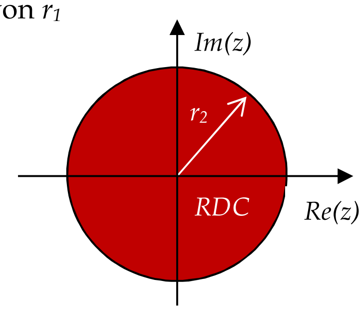


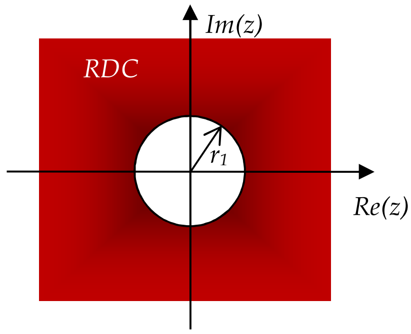
- x(n)=0 pour n<n_0 ⇒ r_2 = +∞,

RDC = région extérieure au cercle de rayon r_1

- x(n)=0 pour n>n_0 ⇒ r_1 = 0

RDC = disque de rayon r_2





⇒ système anti-causal : RDC cercle. système causal : RDC extérieure au cercle.

<u>Exemples</u>

- Soit $a > 0$, $x(n) = \begin{cases} a^n \; si\; n \geq 0 \\ 0 \; si\; non \end{cases}$ ⇒ X(z)= $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$, convergente pour $|z| > a$.

- Soit $b > 0$, $y(n) = \begin{cases} 0 \; si\; n \geq 0 \\ -b^n \; si\; n < 0 \end{cases}$ ⇒ Y(z)= $\sum_{n<0} -b^n z^{-n} = \frac{z}{z-b}$, convergente pour $|z| < b$.

- Soient $a > 0$, $b > 0$, $w(z) = \begin{cases} a^n \; si\; n \geq 0 \\ b^n \; si\; n < 0 \end{cases}$ ⇒ W(z)= $\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b}$, convergente pour $b > |z| > a$.

Remarque : La TZ de a^n pour n ∈]-∞, +∞[n'existe pas.

2. *Propriétés de la TZ*

Les propriétés qui nous sont les plus utilisées sont résumées comme suit :

Si on définit : $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$, $x_1(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z)$ et $x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_2(z)$

- Linéarité : $a.x_1(n) + b.x_2(n) \xrightarrow{TZ} a.X_1(z) + b.X_2(z)$ RDC intersection des deux RDC

- Théorème du retard : $x(n-k) \xrightarrow{TZ} z^{-k}.X(z)$ RDC : identique

- Théorème de l'avance : $x(n+k) \xrightarrow{TZ} z^{k}.X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{k-n}$ RDC : identique

- Multiplication par aⁿ : $a^n x(n) \xrightarrow{TZ} X\left(\frac{z}{a}\right)$ RDC : $a.r_1 < |z| < a.r_2$

- Retournement du temps : $x(-n) \xrightarrow{TZ} X(z^{-1})$ RDC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$

- Convolution : $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z).X_2(z)$ et RDC : identique

- Théorème de dérivation : $n.x(n) \xrightarrow{TZ} -z.\frac{dX(z)}{dz}$ RDC : identique

- Théorème de la valeur initiale : si x(n)=0 pour n<0 alors $x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$

- Théorème de la valeur finale : $\lim_{n \to +\infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z)$

<u>Exemples</u>

1. $x(n) = \cos(w_o n) U(n) = \frac{1}{2}(e^{jw0n} + e^{-jw0n}) U(n) \quad \Rightarrow$

$$X(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{jw0} z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-jw0} z^{-1}}\right) = \frac{1-\cos(w_0) z^{-1}}{1-2\cos(w_0) z^{-1} + z^{-2}} \quad \text{avec} \quad |z| > 1$$

2. Calculer la transformée en z des fonctions discrètes suivantes. Vérifier que les théorèmes de la valeur initiale et finale s'appliquent : $x(n) = 0,8^n\, u(n)$ et $y(n) = n 0,8^n u(n)$.

$$X(z) = \frac{z}{z-0.8} \quad Y(z) = -z \frac{d\left(\frac{z}{z-0.8}\right)}{dz} = \frac{0.8z}{(z-0.8)^2}$$

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} \left| \frac{z}{z-0.8} = 1 \qquad y(0) = \lim_{z \to \infty} \left| \frac{0.8z}{(z-0.8)^2} = 0 \right.\right.$$

$$x(\infty) = \lim_{z \to \infty} \left| \frac{z(z-1)}{z-0.8} = 0 \qquad y(\infty) = \lim_{z \to \infty} \left| \frac{0.8z(z-1)}{(z-0.8)^2} = 0 \right.\right.$$

Quelques TZ

x(n)	*X(z)*	*Région de convergence*
$\delta(n)$	*1*	$\forall z$
$U(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n U(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$n\,a^n U(n)$	$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n U(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)U(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)U(n)$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)U(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n\sin(\omega_0 n)U(n)$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

3. TZ rationnelles (correspondant aux SLID)

Les systèmes linéaires invariants décrits par une équation aux différences finies possèdent une transformée en Z rationnelle c'est ainsi que celles-ci vont s'écrire comme le rapport de deux polynômes en z^{-1}.

$$\sum_{i=0}^{M} a_i\, y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} b_i\, x(n-i) \xrightarrow{TZ} \sum_{i=0}^{M} a_i . z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i . z^{-i} X(z)$$

On peut caractériser un système LI par h(n) ou par la transformée en Z (H(z)) de sa réponse impulsionnelle h(n), encore appelée fonction de transfert du système.

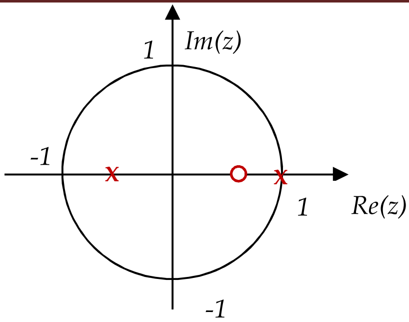
$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i . z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M} a_i . z^{-i}} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^{N}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{M}(z-p_i)} = K\, z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^{N}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{M}(z-p_i)}$$

On appelle zéros, les valeurs de z pour lesquelles H(z)=0 et on appelle pôles, les valeurs de z pour lesquelles H(z) est infini (annule le dénominateur). C'est ainsi que H(z) possède N zéros (z_i), M pôles (p_i). Si M>N, elle possède (M-N) zéros en 0, sinon (N-M) pôles en 0.

Ainsi, la position de ses pôles et de ses zéros (+ le facteur d'amplitude $K=b_0/a_0$) va nous fournir une description complète de H(z) (par conséquent de h(n) et H(f)) donc du comportement du système. H(z) peut donc être représentée sous la forme d'un cercle modélisant la position des pôles et des zéros dans le plan complexe.

<u>Exemple</u>

$$H(z) = \frac{3z-2}{(z-1)(z+0.5)}$$



Un zéro en 2/3 et deux pôles p_1= -0.5 et p_2= 1

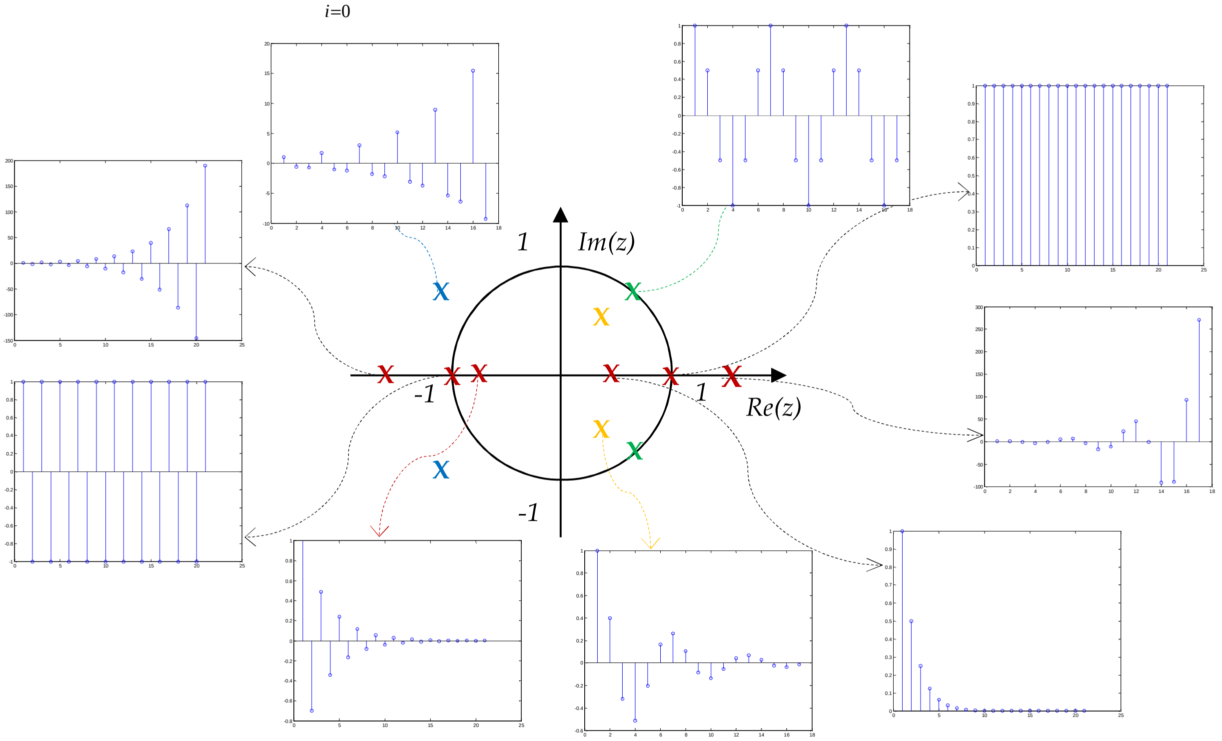
<u>Remarques</u>

- Dans la plupart des systèmes, les ai et le bi sont réels ⇒les pôles et les zéros sont soient réels soient des paires de complexes conjuguées.

- Rappelons que le rayon d'un système causal se trouve à l'extérieur d'un cercle. Par ailleurs, s'il est stable : $\sum_n |h(n)| < \infty$, puisque $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n).z^{-n}$, il suffit donc que z=1 fasse partie de la RDC.

- Pour un système causal et stable, tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité (|pi|<1, ∀i). Le domaine de convergence ne peut contenir de pôles puisque la TZ ne converge pas aux pôles. S'il est anti-causal, il sera stable si les pôles sont à l'extérieur du cercle unité.

- Si le filtre est non-récursif $H(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i .z^{-i}$. Un filtre RIF a tous ses pôles à l'origine et sera donc toujours stable.



- A un pôle p_i simple ou multiple va correspondre une réponse impulsionnelle qui converge si $|p_i|<1$. Elle divergera dans le cas contraire, soit si $|p_i|>1$.

- Sachant qu'à chaque pôle complexe est associé un pôle conjugué cela donnera une réponse impulsionnelle h(n) oscillante (cosinus ou sinus) amortie si $|p_{i=1,2}| < 1$ ou divergente si $|p_{i=1,2}| > 1$.

- Dans un système à phase minimale, tous les zéros sont à l'intérieur du cercle unité (|zi|<1, ∀i).

4. Détermination de la réponse fréquentielle des filtres numériques

On suppose que le cercle unité ($|z|=1$) $\in$ RDC de X (z). On restreint le calcul de X(z) au cercle unité en posant $z = e^{2\pi j f\ Te}$.

Lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z, la réponse fréquentielle sera de 0 au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic au point correspondant. Plus les pôles ou les zéros sont proches du cercle unité, plus ils influencent la réponse en fréquence [11].

– un zéro ou un pôle à l'origine n'influent pas sur le module de la réponse fréquentielle.

– un zéro sur le cercle unité introduit une annulation du module pour la fréquence correspondant

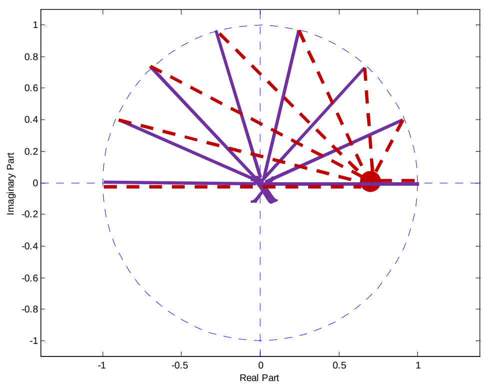
– Un zéro au voisinage du cercle unité introduit une atténuation dans le module de la réponse en fréquence. Atténuation d'autant plus importante que le zéro est proche du cercle unité.

– Un pôle sur le cercle unité introduit une résonance infinie dans le module de la réponse en fréquence pour la fréquence correspondante.

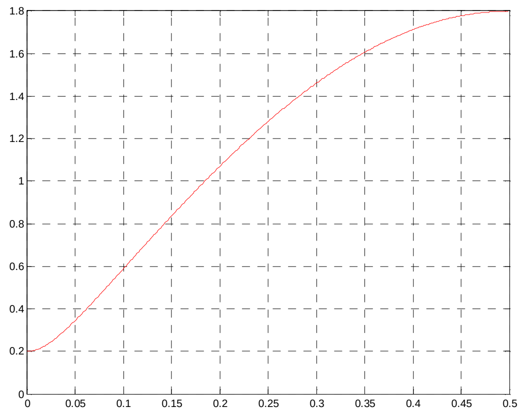
– Un pôle au voisinage du cercle unité introduit une résonance d'autant plus importante dans le module de la réponse en fréquence que le pôle est proche du cercle unité.

<u>*Exemples:*</u> 1 pôle en 0 et un zéro en 0.7. Pour obtenir l'allure de H(f), on divise le vecteur du numérateur (en rouge) sur celui du dénominateur (en mauve). Et pour le suivant un pôle 0.8 et un zéro en -0.5

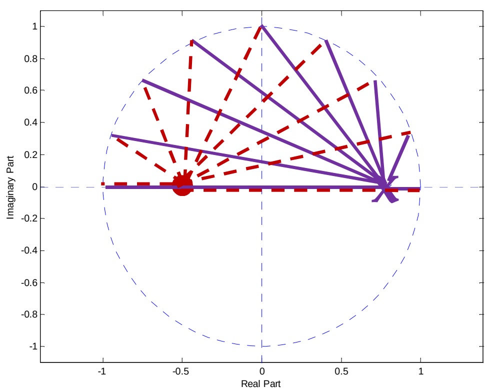
f=fe /4



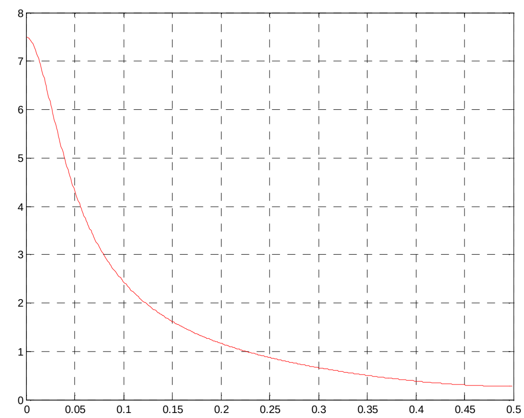
f=0 $\Rightarrow$ *H(f)*



f=fe

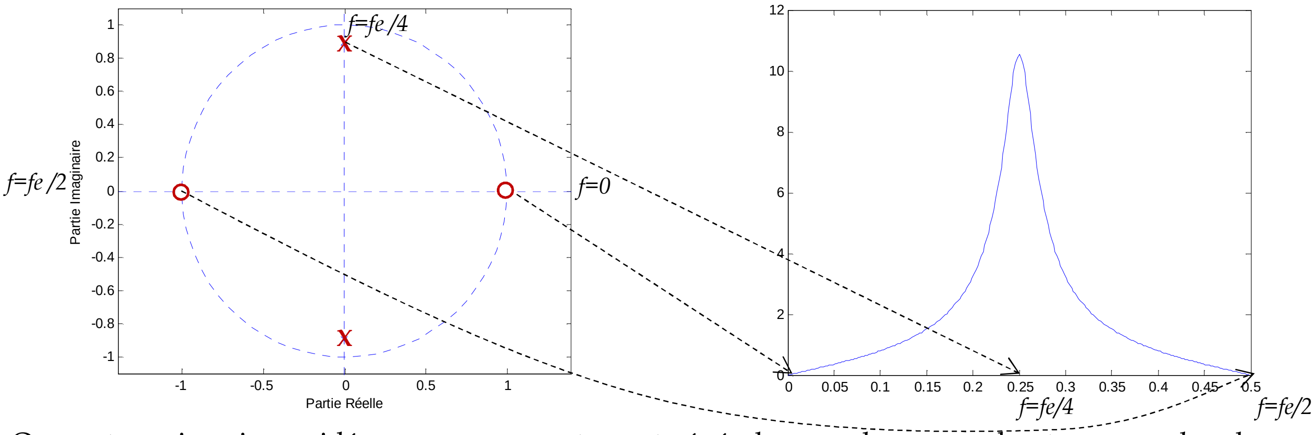


f=0 $\Rightarrow$ *H(f)*



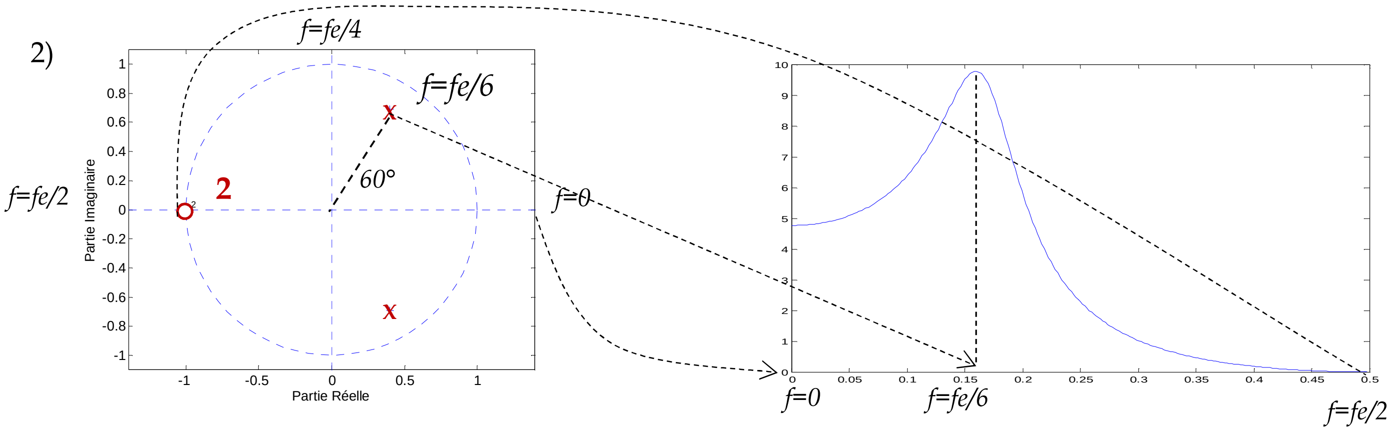
Autres Exemples

1) Sur la figure ci-dessous le cercle complet correspond à une fréquence d'échantillonnage *fe*. Des pôles proches du cercle unité sont à l'origine de larges pics tandis que des zéros proches ou sur le cercle unité produisent des minima. Ce tracé nous permettra d'identifier la nature du filtre.



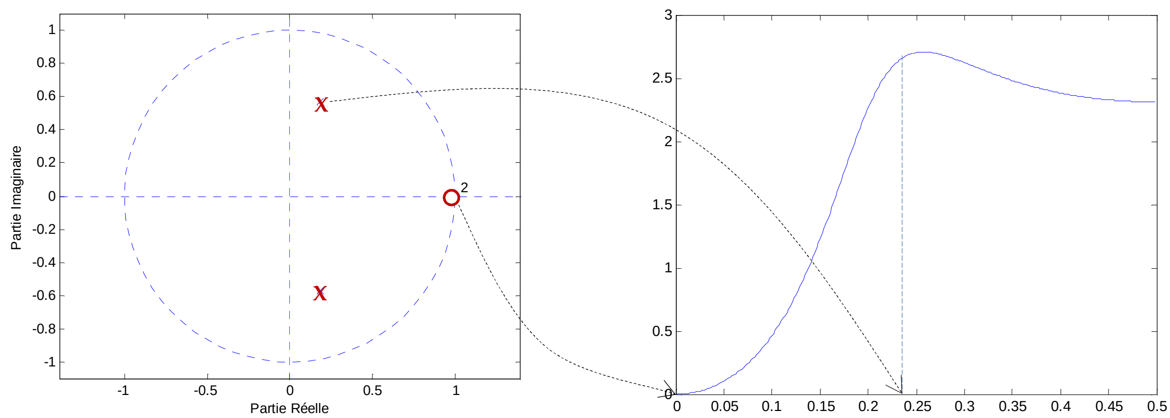
On peut aussi avoir une idée sur son comportement général : passe-bas, passe-haut ou passe-bande, connaître sa ou ses fréquences de coupure.

2)



3) $H(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.371z + 0.36} \Rightarrow$ Zéros double en z=-1, pôles $p_{12} = \pm 0.6e^{j72°}$

- Un zéro double en z = 1 $\Rightarrow$ |H(f)| = 0 pour f = 0 - Des pôles proches du cercle unité $\Rightarrow$ maxima.



Remarque : Puisque les coefficients du filtre sont réels, les pôles et zéros sont réels (sur l'axe des réels) ou paires de complexes conjugués.

5. Détermination de la réponse impulsionnelle des FN (TZ inverse)

Le passage de la TZ vers h(n) peut se faire par le biais de la transformées en Z de signaux élémentaires connus à condition qu'il soit possible d'écrire H(z) comme la combinaison de transformées élémentaires. Dans le cas contraire, on peut employer l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus, ou le développement en puissance de z et de z^{-1}, ou encore le développement en fractions élémentaires [12].

1. La relation générale de la transformée en *z* inverse est donnée par l'équation donnée par l'intégrale de Cauchy : $x(n)=\frac{1}{2.\pi.j}\oint_C X(z).z^{n-1}.dz$, où C est un contour fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre contenant l'origine.

En pratique, on utilise le théorème des résidus: $x(n)=\sum_{p_i\ poles\ de z^{n-1}X(z)} \mathrm{Re}\,s\left[z^{n-1}X(z)\right]_{z=pi}$

$$\mathrm{Re}\,s[z^{n-1}X(z)]_{z=pi}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-p_i)^m z^{n-1}X(z)\right]_{z=pi}$$

Exemple : $X(z)=\frac{z}{z-e^a}\Rightarrow p_i=e^a\Rightarrow \mathrm{Re}\,s[z^{n-1}X(z)]_{z=e^a}=\left[z^n\right]_{z=e^a}=e^{an}.u(n)$

2. Transformée inverse par division polynômiale :Il est possible de calculer la transformée en Z inverse selon les puissances croissantes de z^{-1} (système causal) ou selon les puissances décroissantes de z (système anti-causal).

Exemples

$$X(z)=\sum_n C_n z^{-n}\xrightarrow{TZ^{-1}}x(n)=C_n$$

- y(n)=y(n-3)+x(n) $\Rightarrow H(z)=\frac{1}{1-z^{-3}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-k}\right)^3=1+z^{-3}+z^{-6}+............\Rightarrow h(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-3k)$

- $X(z)=\frac{1}{1-a.z^{-1}}$ pour $|z|>a$

Domaine de convergence extérieur à un cercle → signal causal → division pour avoir une série en z^{-1}.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-a.z^{-1} \\
\underline{-1+a.z^{-1}} & \overline{1+a.z^{-1}+a^2.z^{-2}+......} \\
0+a.z^{-1} & \\
\underline{-a.z^{-1}+a^2.z^{-2}} & \quad x[0] \quad x[1] \quad x[2] \\
\quad 0 \quad +a^2.z^{-2} & \quad ......
\end{array}$$

On obtient : $\frac{1}{1-a.z^{-1}}=1+a.z^{-1}+a^2.z^{-2}\ \Rightarrow\ \ x(n)=a^n.u(n)$

- $X(z)=\frac{1}{1-a.z^{-1}}$ pour $|z|<a$

Région de convergence intérieure à un cercle → signal anti-causal → division pour avoir une série en z.

z	$-a+z$
$-z+a^{-1}.z^2$	$-a^{-1}.z - a^{-2}.z^2 - a^{-3}.z^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots$
$0 + a^{-1}.z^2$	x[-1] x[-∞]
$-a^{-1}.z^2+a^{-2}.z^3$	
$0 + a^{-2}.z^3$	
……	

On obtient : $\dfrac{1}{1-a.z^{-1}} = -a^{-1}.z - a^{-2}.z^2 - \ldots \quad \Rightarrow \quad x(n) = -a^n.u(-n-1)$

Notons que la division peut se réaliser sans faire apparaître une expression analytique générale.

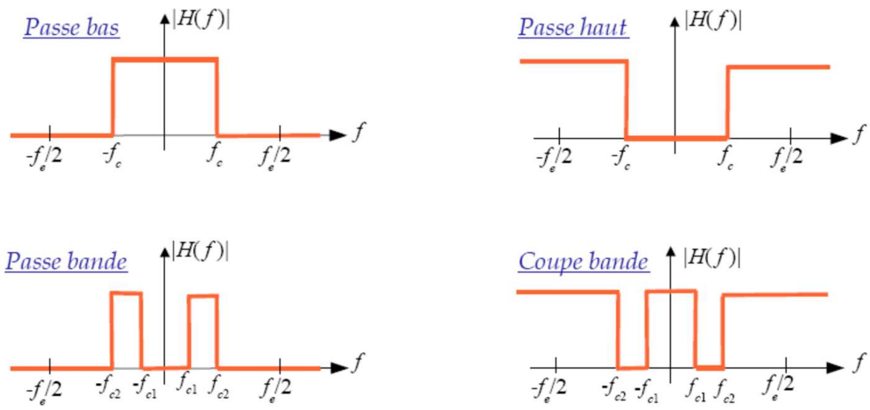
3. L'idée générale de cette approche consiste à trouver pour une fonction X(z) complexe un développement en fonctions en Z plus simples et pour lesquelles une transformée inverse est connue:

$$X(z) = \sum_i X_i(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = \sum_i x_i(n)$$

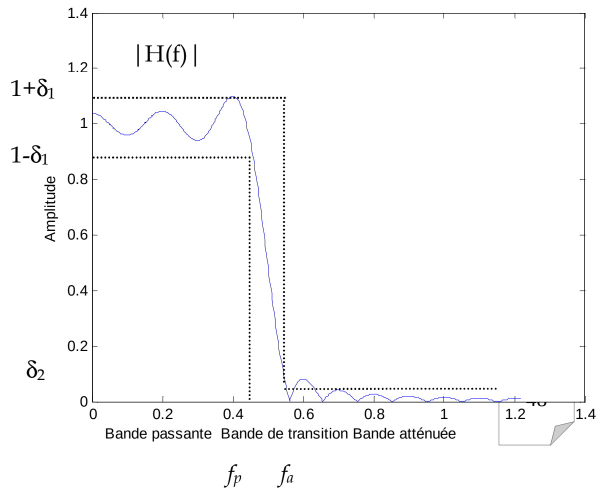
où les $X_i(z)$ sont des fonctions dont les TZ^{-1} sont connues (Voir page 38).

6. Caractéristiques des filtres numériques

Un filtre numérique est constitué d'un groupement de circuits logiques astreints à un processus de calcul (ou algorithme) qui confère à ce filtre une fonction déterminée (passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande, intégrateur[y(n)=(x(n)+x(n-1))/2], différentiateur[y(n)=(x(n)-x(n-1))/2], ...). Il faut souligner que certains filtres ne sont pas conçus pour arrêter une fréquence, mais pour modifier légèrement le gain à différentes fréquences, comme les égaliseurs. Ce sont tous des systèmes linéaires, discrets, invariants dans le temps et unidimensionnels. De plus, pour qu'ils soient physiquement réalisables, il faut qu'ils soient nécessairement causaux.



Les filtres représentés ci-dessus sont idéaux. Dans un cas réel il n'est pas possible d'obtenir une fréquence de coupure aussi raide. Le passage entre zones passantes et zones atténuées se fait par des zones dites "de transition" f_p-f_a dont la largeur va exprimer la sélectivité du filtre. Par ailleurs, les bandes passantes et atténuées ne sont également pas idéales, elles contiennent des ondulations



FEI,USTHB [assiakourgli@gmail.com

dont l'amplitude est exprimée par les paramètres d'ondulation en bande passante δ_1 et bande atténuée δ_2 [9].

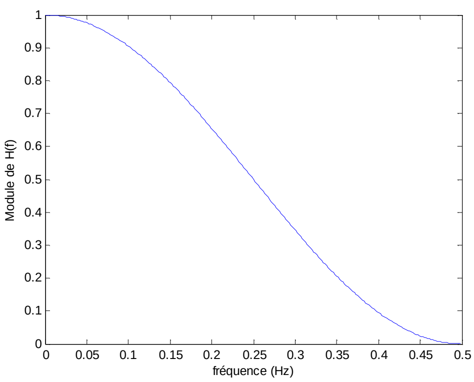
<u>Remarque</u> : Idéalement, il et souhaitable qu'un filtre possède une phase linéaire dans la bande passante. Une phase linéaire assurera un même déphasage pour toutes les fréquences (pas de distorsion). Les filtres FIR peuvent générer des filtres à phase linéaire. Si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme : $H(f) = R(f)e^{-j\phi(f)}$ avec $\phi(f) = \phi_0 + 2\pi f\tau$

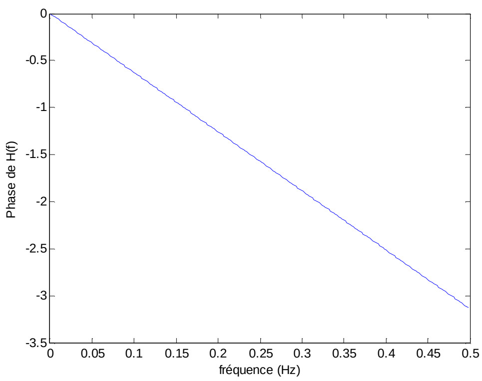
- Retard de groupe : C'est une caractéristique important des filtres est le retard de groupe qui est défini comme

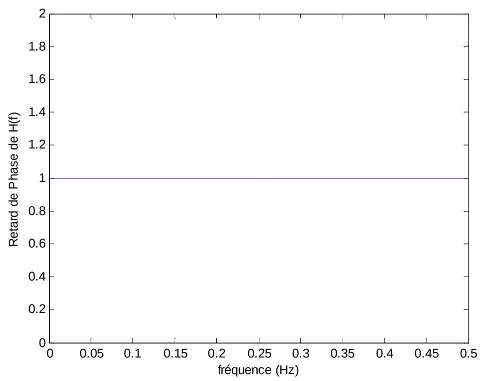
$$\beta = -\frac{d\phi(f)}{df}$$

et qui correspond intuitivement au retard qui est souffert par l'enveloppe du signal après être passé par un filtre. Si la phase est linéaire et symétrique (filtres RIF), le retard est constante et le signal à la sortie aura donc une distorsion minimale puisque l'effet de la phase sur le signal sera un simple décalage temporel (primordial dans un système audio)

<u>Exemple</u> $y(n) = \frac{1}{4}\left(x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)\right) \Rightarrow h(n) = \frac{1}{4}\left(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)\right)$ et $H(f) = e^{-2\pi j f}\cos^2(\pi f)$







RII ou RIF ?

- Les filtres RII, on l'avantage qu'ils sont efficaces. Avec très peu de pôles et zéros on peut assurer la plupart des réponses fréquentielles dont on peut avoir besoin dans les applications audio. Cependant, le filtre étant rétro-activé, les erreurs de précision numérique deviennent une question d'importance, car ils peuvent s'amplifier et devenir hors de contrôle, d'abord dans la forme de bruit, mais éventuellement dans la forme d'instabilité. La forme de la réponse impulsionnelle n'est pas facile à déterminer, non plus, car elle est définie indirectement par les pôles et zéros de H(f).

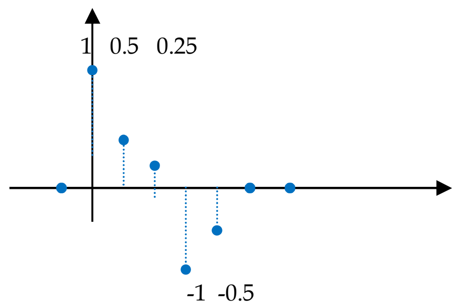
- Par contre, les filtres RIF n'ont jamais des problèmes d'instabilité, car la sortie n'est qu'un somme finie échantillons de l'entrée. Cependant, quand la réponse impulsionnelle est longue, le numéro d'opérations peut devenir un facteur décisif quand il faut choisir entre RIF ou RII. Un autre avantage des RIF est le retard de groupe constant, qui permet d'avoir une distorsion de phase minimale sur le signal traité. La réponse impulsionelle dans le cas RIF est parfaitement contrôlable [13]

Série n°3

1. Une séquence finie *x(n)* est définie par : $x(n) = \begin{cases} \neq 0 & N_1 \leq n \leq N_2 \\ = 0 & ailleurs \end{cases}$

Déterminer le ROC suivant les différentes valeurs de N.

2. Donner la transformée en z de la fonction numérique discrète x(n) représentée par le graphique ci-contre.



3. Calculer la transformée en z, X(z), et esquisser la carte des pôles et zéros ainsi que la ROC pour chacune des séquences suivantes :

$x(n) = (0.5)^n u(n) + (0.25)^n u(n)$, $y(n) = (0.25)^n u(n) + (0.5)^n u(-n-1)$, $z(n) = (0.5)^n u(n) + (0.25)^n u(-n-1)$

4. Calculer la Transformée en Z du signal $x(n) = rect_N(n)$,
- en appliquant la définition de la TZ directement,
- en utilisant le signal échelon et le théorème du retard.

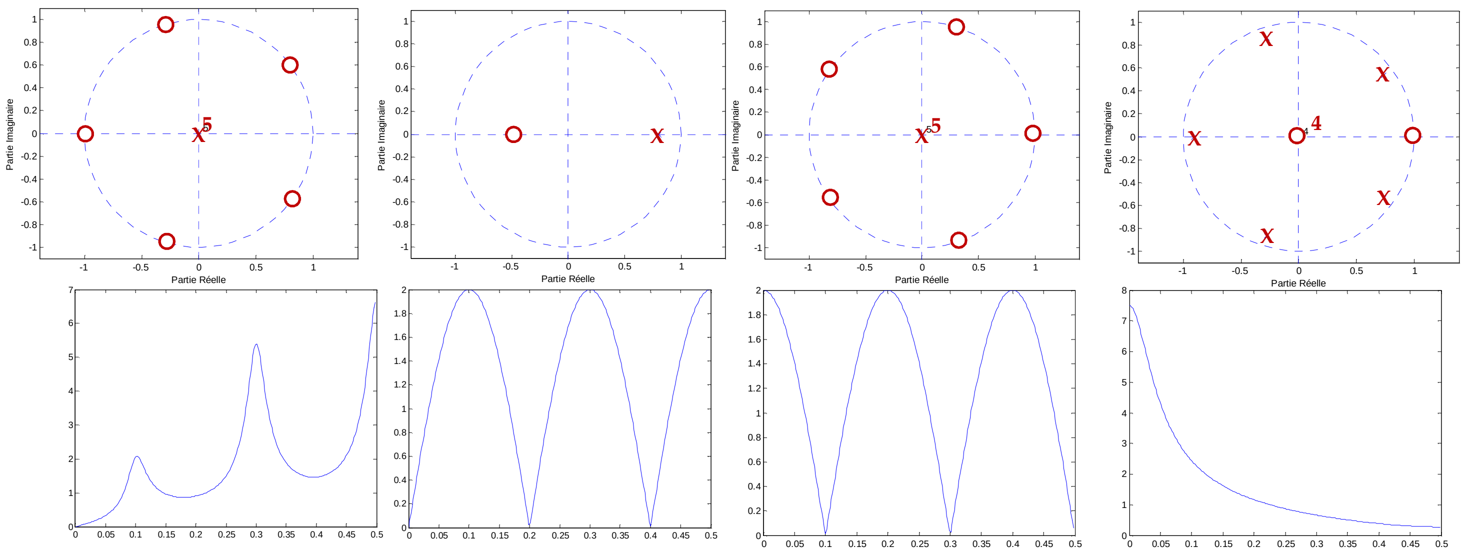
5. Soit $H(z)$ la fonction de transfert d'un SLIT causal avec : $H(z) = \dfrac{az-1}{z-a}$ avec a réel

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $H(z)$ correspond à un système stable. Prendre une valeur de a =0.5. Représenter alors les pôles et zéros de la fonction, la région de convergence. Donner et tracer $|H(f)|$.

6. Soit les SLIT décrits par les équations suivantes :
- $y(n) = 3y(n-1) - 2\,y(n-2) + x(n)$
- $y(n) = 0.3y(n-1) + 0.3y(n+1) - 0.3x(n)$

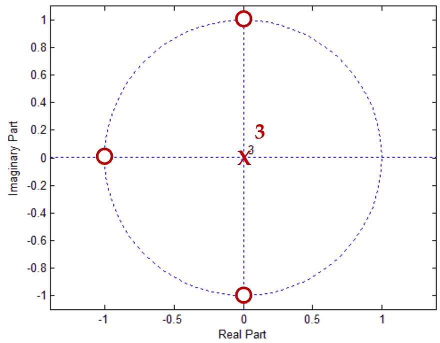
Pour chaque cas, déterminer la fonction de transfert du système. Etudier la stabilité et la causalité et calculer la réponse impulsionnelle.

7. Etablir les correspondances entre les diagrammes pôles zéros et les réponses en fréquence pour une fréquence d'échantillonnage *fe*=1 en justifiant vos choix :



8. On suppose que le tracé des pôles et des zéros de ce système est le suivant :

- Est-ce un filtre RIF ou RII ? (Justifier votre réponse)
- Donner l'allure approximative de H(f)
- Déterminer H(z) puis déterminer et tracer h(n)
- A partir de h(n), étudier la stabilité, la causalité et l'invariance de ce filtre.
- Calculer et tracer H(f) pour au moins 3 valeurs
- Ce filtre possède-t-il un retard de groupe constant (justifier)
- Déterminer sa réponse pour une entrée échelon x(n)=U(n).



9. Trouver la séquence $y(n)$ qui a comme transformée en z : $Y(z)=\dfrac{1}{6-5z^{-1}+z^{-2}}$.

10. De quelle fonction $x(n)$, la fonction: $X(z)=\dfrac{\sqrt{2}/2\,z^2}{z^2-0.8\sqrt{2}z+0.64}$ est la transformée en Z

11. Trouver h(n) correspondant à la transformée en z suivante : $H(z)=\dfrac{z^{-2}-2z^{-1}+1}{a^2z^{-2}-2az^{-1}+1}$

Solutions

1. Si $N_1 \geq 0$ RDC=ℂ-{0} Si $N_2 \leq 0$ RDC=ℂ-{∞} Si $N_1 \leq 0 \leq N_2$ RDC=ℂ-{0, ∞}

2. $X(z) = 1 + 0{,}5\, z^{-1} + 0{,}25\, z^{-2} - 1\, z^{-3} - 0{,}5\, z^{-4}$ RDC=ℂ-{0}

3. $X(z)=\dfrac{z(2z-0.75)}{(z-0.5)(z-0.25)}$ $|z|>0.5$ $Y(z)=\dfrac{-0.25z}{(z-0.5)(z-0.25)}$ $0.25<|z|<0.5$ N'existe pas

4. $(1-z^{-N})/(1-z^{-1})$ **5.** Pôle z=a, stable si $|a|<1$. Le module vaut toujours 1 (cellule passe-tout).

6. $H(z)=z^2/(z^2-3z+2)$ causal pour $|z|>2$ mais instable avec $x(n)=(2^{n+1}-1)U(n)$
$H(z)=0.375\,(1/(3z-1)+1/(0.33z-1))$ causal pour $|z|>3$ instable avec $x(n)=0.375(3^n-0.33^n)U(n)$

8. Tous les pôles en 0 alors RIF, $H(z)=z^{-3}+z^{-2}+z^{-1}+1$, $h(n)=\delta(n-3)+\delta(n-2)+\delta(n-1)+1$,
$H(f)=2(\cos(3\pi fTe)+\cos(\pi fTe))e^{-3\pi jfTe}$, Retard de groupe cst, x(n)=U(n) alors y(n)= U(n-3)+U(n-2)+U(n-1)+U(n)

9. $y(n)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n U(n)-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n U(n)$ **10.** $x(n)=0.8^n\cos\left[\dfrac{\pi}{4}(n-1)\right]U(n)$

11. $x(n)=(n+1)a^nU(n+1)-2na^{n-1}U(n)+(n-1)a^{n-2}U(n-1)$

Exercices supplémentaires

1. Soit un système linéaire invariant dans le temps (SLID) dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ est telle que : $h(n)=1$ pour $0 \leq n \leq 3$ et 0 ailleurs
Calculer la réponse $y(n)$ à la suite $x(n)$ définie par :
- $x(n)=a^n$ pour $0 \leq n \leq 5$, avec $a=0.7$ et $x(n)=0$ ailleurs.
- $x(n)=\cos(2\pi n/8)$ pour $0 \leq n \leq 7$ et $x(n)=0$ ailleurs.

Solution $y(0) = 1$ $y(1) = 1+a = 1.7$ $y(2) = 1+a+a^2 = 2.19$ $y(3) = 1+a+a^2+a^3 = 2.533$ $y(4) = a+a^2+a^3+a^4 = 1.7731$ $y(5) = a^2+a^3+a^4+a^5 = 1.24117$ $y(6) = a^3+a^4+a^5 = 0.75117$ $y(7) = a^4+a^5 = 0.40817$ $y(8) = a^5 = 0.16807$

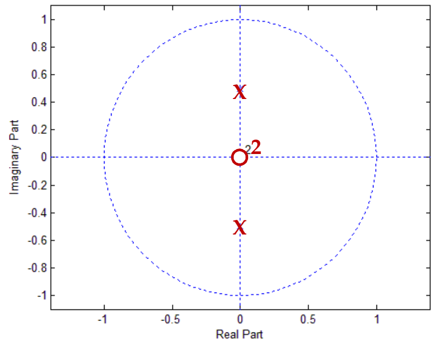
$y(0) = 1$ $y(1) = 1+\cos(p/4) = 1.707$ $y(2) = 1.707$ $y(3) = 1$ $y(4) = -1$ $y(5) = -2.414$ $y(6) = -2.414$ $y(7) = -1$ $y(8) = 0$ $y(9) = 0.707$ $y(10) = 0.707$

2. Soit $y(n) = x(n) + ax(n-1) + by(n-1)$, l'équation aux différences d'un système discret causal.
a) Trouvez $h(n)$, la réponse impulsionnelle de ce système ; pour quelles valeurs de a et b le système est- il stable
b) Trouvez la réponse impulsionnelle du système formé par la mise en série de deux systèmes $h(n)$.
c) Même question pour la mise en parallèle de deux systèmes $h(n)$.

Réponses : a) $h(n) = b^n u(n) + ab^{n-1} u(n-1)$; stable pour a finie et $|b|<1$.
b) $h(n)*h(n) = (n+1)b^n u(n) + (2nab^{n-1} + (n-1)a^2 b^{n-2})u(n-1)$ c) $2h(n) = 2b^n u(n) + 2ab^{n-1} u(n-1)$

3. On considère un système linéaire régi par l'équation aux différences suivante :
$y(n) = (x(n+m) + x(n+m-1) + x(n+m-2))/3$ où m est un paramètre entier.
-Montrer que ce système est linéaire invariant dans le temps. Etudier la causalité et la stabilité selon les valeurs de m.
-Calculer la fonction de transfert $H(z)$ de ce système pour m=0 et m=1.
-En déduire la réponse fréquentielle.
Réponses Le système est causal si m<1 et toujours stable. Pour m=0, $H(z)=1/3(1+z^{-1}+z^{-2})$,
$H(f) = 0.33(1+2\cos(2\pi fTe))e^{-2j\pi fTe}$ (filtre RIF passe-bas à phase linéaire). Pour m=1, de même filtre moyenneur

4. On suppose donné le tracé des pôles et des zéros du système suivant :
- Est-ce un filtre RIF ou RII ? (Justifier votre réponse)
- Donner l'allure approximative de H(f)
- Déterminer H(z) puis déterminer l'équation de récurrence
- Déterminer et tracer h(n)
- A partir de h(n), étudier la stabilité, la causalité et l'invariance du filtre



5. Déterminer en utilisant la décomposition en éléments simples, la forme du signal $x(n)$ dont la TZ est donnée par :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \quad avec \quad |z| > 2 \qquad \text{et} \qquad X(z) = \frac{z^2}{z^2 - (a+1)z + a} \quad avec \quad |a| < 1$$

Réponses : $x(n) = (2^{n+1} - 1)u(n)$ $x(n) = 1/(1-a) + a^n a/(a-1) = (1-a^{n+1})/(1-a)$

6. On considère la transformée : $X(z) = \dfrac{z}{z-z_0} + \dfrac{z}{z-z^*_0}$ *on pose* $z_0 = e^{(r+j\theta)}$, déterminer $x(n)$.

Réponse $x(n) = 2e^{rn}\cos(n\theta)U(n)$

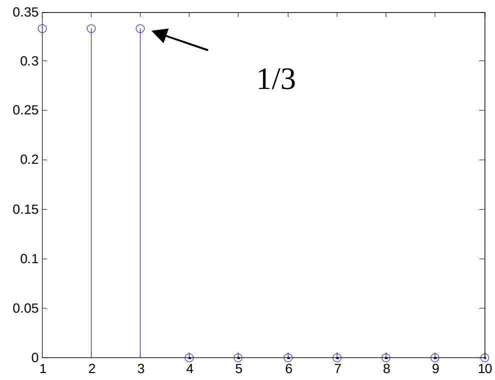
7. En utilisant la méthode des résidus puis celle de décompositions en éléments dans la TZ est connue, déterminer h(n) dont la transformée est : $H(z) = \dfrac{z - z_0}{(z-p_0)(z-p_0^*)}$ z_0 : *réel* , $p_0 = \rho e^{j\theta}$

Réponse $h(n) = \dfrac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}\left[\left(1 - \dfrac{z_0}{\rho}\cos\theta\right)\sin(n\theta) + \dfrac{z_0}{\rho}\sin\theta\cos(n\theta)\right]U(n-1)$

$$y(n) = x(n-1) - z_0 x(n-2) + 2\rho\cos\theta\, y(n-1) - \rho^2 y(n-2)$$

Certains exercices sont inspirés des références suivantes [14][15]

8. On considère le système suivant : $x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)$



On suppose que h(n) est donné comme ci-contre.

- Calculer et tracer son auto corrélation et en déduire son énergie
- Tracer son auto corrélation si l'on suppose qu'il est périodique de période 9.
- Etudier la causalité
- Est ce un filtre RIF ou RII
- A partir de l'expression de h(n), déduire le rôle de ce filtre :
- Déterminer l'équation aux récurrences du système :
- Déterminer les pôles et zéros de ce filtre puis donner leur tracé. En déduire un tracé approximative de |H(f)|
- Calculer et tracer |H(f)| puis en déduire le tracé du module de la TFD pour N=6.

9. On considère que l'équation aux récurrences du système suivant est donnée comme suit :

$y(n)=0.9\, y(n-1) - 0.81\, y(n-2) + x(n) + 2\, x(n-1) + x(n-2)$

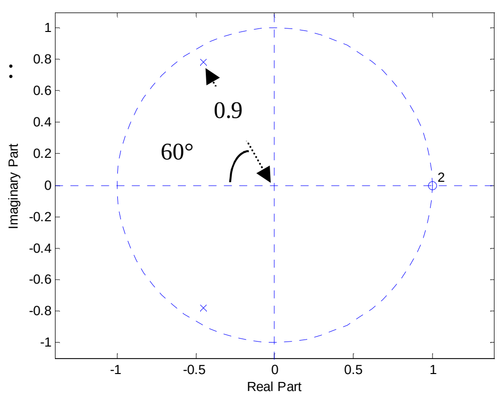
- Etudier la causalité et l'invariance de ce système
- Est ce un filtre RIF ou RII ?
- Déterminer H(z) et donner le tracé des pôles et zéros, en déduire le rôle de ce filtre :
- Donner les allures approximatives de h(n) et | H(f) |
- Déterminer h(n) et tracer la pour les 3 premières valeurs
- On suppose que fe= 6 kHz, quelle sera la sortie du filtre si l'on donne en entrée : un signal bruité par une sinusoïde de 500 Hz puis un signal composé de 2 sinusoïdes l'une de 500 Hz et l'autre de 3000Hz

10. On considère le système LIT décrit par l'équation aux récurrences suivantes :

$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+4\delta(n-3)$ et $h(n)=9\delta(n)+7\delta(n-1)+4\delta(n-2)+\delta(n-3)$

- Ce système est-il invariant ? Justifier.
- Etudier la stabilité et la causalité de x(n), h(n) et y(n).
- Les signaux x(n), h(n) et y(n) sont-ils à énergie finie (ou infinie) ? Justifier
- Déterminer y(n) directement et tracer le.
- Déterminer y(n) en passant par la TZ de x(n) et h(n)
- On considère que x(n) et h(n) sont périodiques de période 4, déterminer y(n) de 2 façons.
- Quelle est lien entre la convolution et l'autocorrélation ?

11. On suppose que le tracé des pôles et des zéros d'un système est le suivant :



- Donner les allures approximatives de h(n) et | H(f) | puis en déduire le rôle du filtre
- Déterminer H(z) (On supposera un gain de 1 en z= -1)
- Déterminer les coefficients du filtre
- On suppose que fe= 3 kHz, quelle sera la sortie du filtre si l'on donne en entrée :

  un signal bruité par une sinusoïde de 500 Hz :

  un signal composé de 2 sinusoïdes l'une de 1100 Hz et l'autre de 1300Hz

TP n°3: Analyse des filtres numériques par la TZ

Rappel : Soit $H(z)$ la transformée en z d'un filtre numérique donné dont la décomposition sous forme fraction rationnelle est donnée par :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_M z^{-M}}$$

Grâce à la seule connaissance du vecteur b et du vecteur a, on peut analyser tout filtre et :

- Déterminer les pôles et les zéros du filtre (et étudier sa stabilité)
- Déterminer la réponde impulsionnelle ou indicielle
- Déterminer la réponse fréquentielle et le retard de groupe (dérivée de la phase), etc.

Quelques fonctions utiles [16]

s = filter(*b*, *a*, *e*) : filtre numériquement les données stockées dans le vecteur *e* avec le filtre décrit à la fois par le vecteur *b* (coefficients du numérateur de $h(z)$) et le vecteur *a* (coefficients du dénominateur de $H(z)$) pour une entrée e. Il faut normaliser l'équation de telle sorte que $a_0 = 1$.

Pour déterminer la réponse indicielle e sera un dirac, pour la réponse indicielle e sera un échelon.

[*H*, f] = freqz((*b*, *a*, *N*, *fe*) : retourne *N* valeurs du gain complexe (Réponse fréquentielle TFD) du filtre numérique échantillonné à la fréquence *fe* (Hertz), décrit par *b* et *a*. Ces valeurs sont stockées dans *H*et calculées pour *N* fréquences mises dans f. Les fréquences sont equi-espacées sur l'intervalle [0,fe/2].

[b,a]=invfreqz(H,f, nb, na): retourne le numérateur b (d'ordre nb) et le dénominateur a (d'ordre na) à partir de la réponse fréquentielle donnée par H et f.

[*h*, *n*] = impz(*b*, *a*, *N*, *fe*) : retourne la réponse impulsionnelle du filtre numérique décrit par *b* et *a*. La réponse impulsionnelle est calculée en *N* instants stockés dansnet espacés de 1/*fe*, les valeurs de réponse correspondante sont stockées dans *h*.

[tau,f]=grpdelay(b,a,N,fe) : retourne le retard de groupe (dérivée de la phase) du filtre numérique décrit par *b* et *a*. La réponse impulsionnelle est calculée en *N* fréquences mises dans f.

zplane(b,a) : permet de tracer les pôles et les zéros dans le plan complexe.

I. Analyse d'un filtre RII

Soit le filtre h(n) décrit par l'équation aux différences suivantes :

y(n)=1.2 y(n-1)-0.516 y(n-2)+ 0.079 x(n) +2*0.079 x(n-1)+0.079 x(n-2)

- La première étape consiste à déterminer les vecteurs a et b. On calcule H(z) (coefficients en z^{-1}) et on trouve :

Numérateur : b = [0.079 2*0.079 0.079] et Dénominateur: a = [1 -1.2 0.516]

- Puis, par programme on peut : déterminer et tracer la réponse impulsionnelle, la réponse fréquentielle (module et phase), le retard de groupe, les pôles et les zéros, étudier la stabilité, la nature du filtre, etc.

```
clc ; clear all ; close all;
b = [0.079 2*0.079 0.079]; %Numérateur
a = [1 -1.2 0.516]; %Dénominateur
figure (1); zplane(b,a);
N = 32; n=0:N-1; delta = [1; zeros(N-1,1)];
h = filter(b, a, delta);figure(2); stem(n,h);
echelon=ones(1,N); h_ind=filter(b,a,echelon);
figure(3); stem(n,h_ind);
L = 256;fe=1; [H,f] = freqz(b,a,L,fe);
module = abs(H); figure (4); plot(f,module);
% phase = angle(H); figure (5); plot(f,phase);
% [tau,f]=grpdelay(b,a,L,fe);figure (6); plot(f,tau);
% [num,den]=invfreqz(H,f, 2,2)
```

1. Calculer les pôles et zéros de ce filtre (à préparer), correspondent-ils à ceux de la figure 1 ?
2. A partir du tracé des pôles et des zéros, esquisser l'allure de h(n) et H(f) en justifiant vos réponses (à préparer). Confirmer avec les figures 2 et 4.
3. Etudier la stabilité du filtre (à partir du tracé des pôles et de h(n)). Quel est le rôle de ce filtre?
4. Quelle valeur de *b* faut-il changer pour faire de ce filtre un passe-haut?
5. Modifier les valeurs de *a* pour avoir une réponse impulsionnelle divergente. Le filtre obtenu est-il stable?
6. Enlever les commentaires et comparer les figures 5 et 6. Quel lien les relie ?
7. Quel retard de groupe souhaite-t-on avoir dans la bande passante du filtre ?
8. Rétablir les valeurs par défaut et rajouter les lignes suivantes

```
nom_fich = uigetfile('*.wav', 'Selectionner le fichier son');
[x,fe]=wavread(nom_fich);
sound(x,fe); N=length(x); t=(0:N-1)/fe;
figure;subplot(2,1,1);plot(t,x);
legend('Son original');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude'); axis([0 N/fe  -1 1.5]);
y = filter(b, a, x);sound(y,fe)
subplot(2,1,2);plot(t,y);
legend('Son filtré');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude'); axis([0 N/fe  -1 1.5]);
```

9. Comparer les deux signaux en utilisant le zoom et commenter.
10. Prendre une petite portion du signal et observer sa TF avant et après filtrage en commentant.

II. Analyse d'un filtre RIF

On considère la récurrence suivante : y(n)=0.5 x(n)−0.5 x(n−1)

1. Déterminer h(n), les pôles et zéros et esquisser H(f). En déduire le rôle de H(f), puis calculer le retard de groupe (en préparation).
2. Vérifier ces réponses par matlab.
3. Que peut-on dire sur la stabilité, la nature et le retard de groupe de ce filtre?
4. Si l'on remplace l'un des coefficients 0.5 par 1, que devient le retard de groupe?
5. Quelle serait la sortie d'un tel filtre si l'entrée était constante?
6. Rétablir les valeurs par défauts et rajouter les lignes concernant le fichier audio puis commenter.
7. Prendre la même portion du signal et observer sa TF avant et après filtrage en commentant.
8. Refaire le même travail pour y(n)= $\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4} x(n-i)$