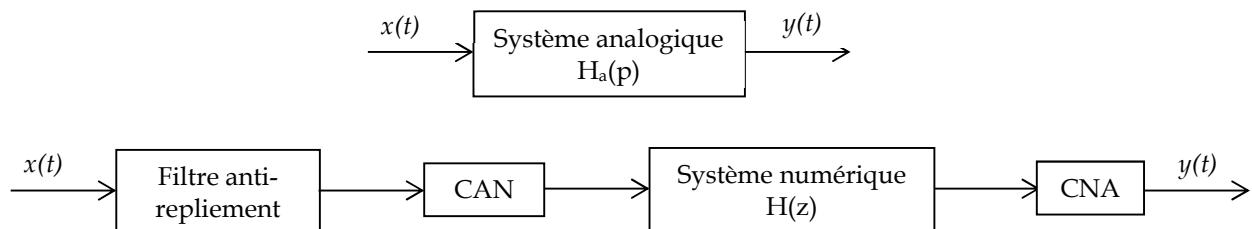


IV. Conception des Filtres Numériques RIF

Le traitement numérique a conduit à une amélioration importante des dispositifs de filtrage linéaire notamment en termes de fiabilité, de reproductibilité, de souplesse et de complexité des fonctions réalisables. En outre, les filtres numériques ont aussi d'autres propriétés difficiles qu'il n'est pas aisé de mettre en œuvre dans le cas des filtres analogiques, entre autres : le filtrage numérique en temps réel (transmissions numériques, codage des sons MP3, synthèse de parole, télévision numérique par exemple). La plupart des modèles de filtres analogiques peuvent ainsi être reproduits sous forme numérique. Les éléments physiques (résistance, capacité, inductance, amplificateurs opérationnels) sont en quelque sorte transposés en éléments logiques [17].

1. Synthèse des Filtres numériques et Gabarit analogique

La synthèse d'un filtre est un ensemble de processus qui débute par la définition des caractéristiques du filtre, jusqu'à sa réalisation informatique et/ou électronique, en passant par la détermination de ses coefficients. Pour synthétiser un filtre numérique, on considère connu le gabarit du filtre analogique et on cherche un système numérique caractérisée par une fonction de transfert $H(z)$ à insérer dans le circuit ci-dessus permettant de satisfaire le gabarit analogique.



La détermination de la fonction de transfert d'un filtre numérique, par une méthode directe, n'est pas toujours très simple. Par contre, le problème qui consiste à transformer un filtre analogique en un filtre numérique est relativement simple. De ce fait, de nombreuses méthodes sont proposées pour concevoir un filtre numérique à partir du filtre analogique équivalent. Dans tous les cas, la synthèse d'un filtre numérique est une approximation d'un filtre analogique idéal équivalent. Il est nécessaire de contraindre un certain nombre de paramètres.

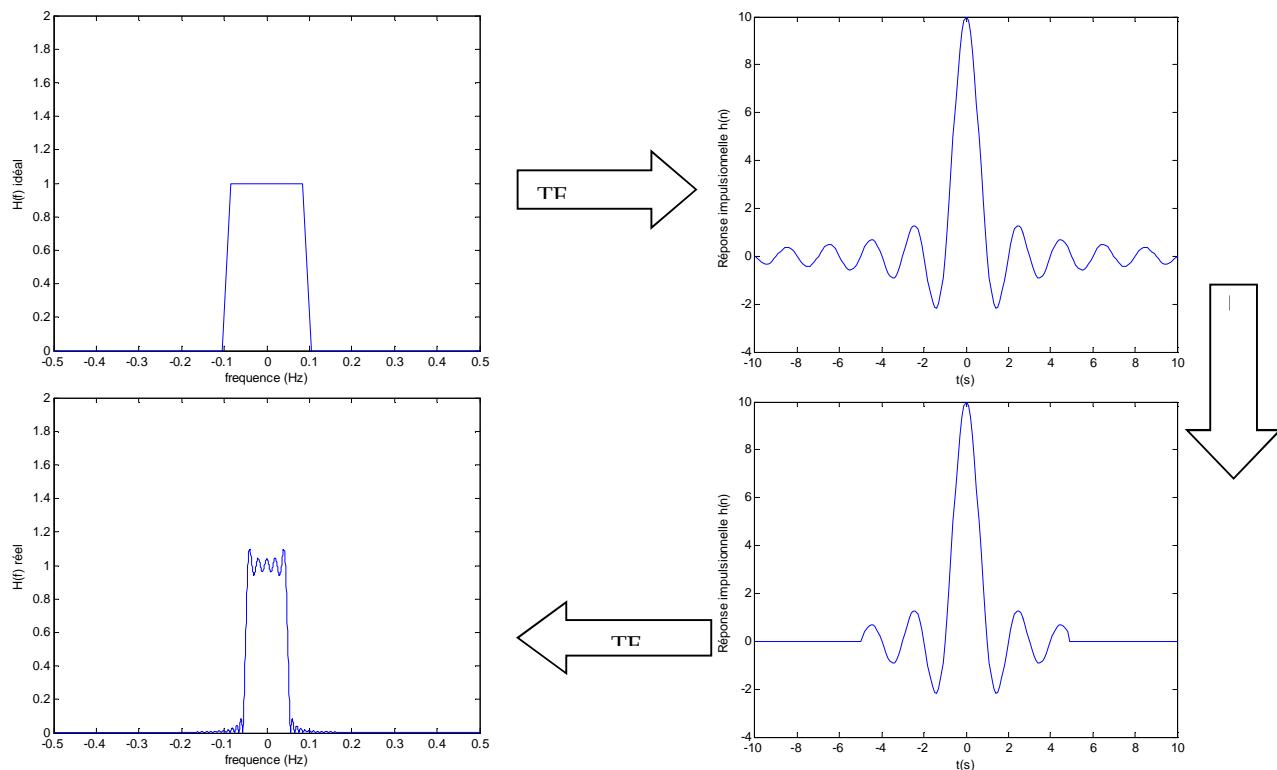
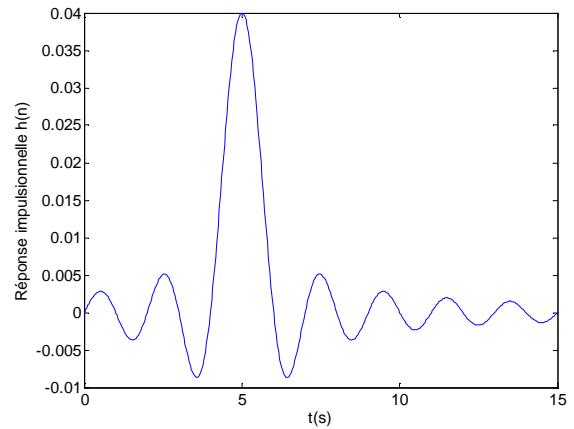
La synthèse d'un filtre numérique comprend les étapes suivantes :

1. la détermination d'une réponse en fréquence idéale souhaitée ;
2. la détermination de la meilleure approximation sous un certain nombre de contraintes contrainte (stabilité, rapidité, précision, déphasage linéaire, etc.) ;
3. le choix d'une structure de calcul réalisant le filtre approximé.

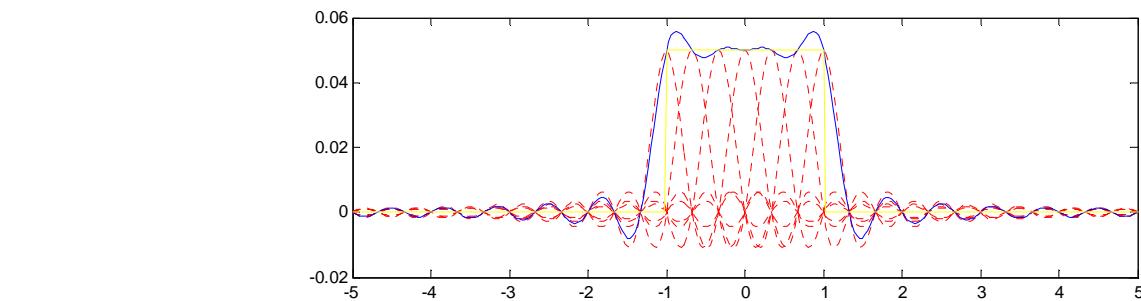
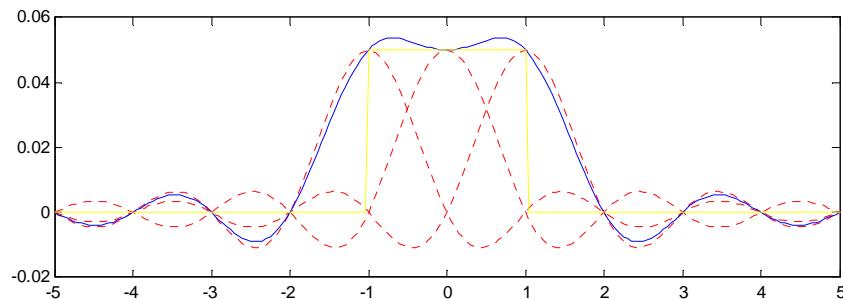
Les fonctions modèles utilisées pour la synthèse des filtres sont soit la réponse impulsionnelle soit la réponse en fréquence (celle-ci est préférée) de filtres analogiques connus. Si l'on emploie la réponse impulsionnelle, les éléments $h(n)$ de la réponse impulsionnelle numérique sont obtenus en calculant $h(t)$, la réponse impulsionnelle du filtre analogique, aux instants $t=nT_e$.

Rappelons que les filtres idéaux présentent un déphasage linéaire et ne sont pas physiquement réalisables, car les réponses fréquentielles idéales correspondent à une réponse temporelle non-causale. Par exemple, en considérant le filtre passe-bas $H(f) = \Pi(f) e^{-2\pi f T_e}$, on obtiendra un sinc décalé de T_e .

On peut observer qu'il faut annuler une partie du signal. De ce fait, il n'est plus possible d'obtenir un filtre passe-bas idéal (droit et avec une droite de transition perpendiculaire). Il s'ensuit que les filtres qui vont pouvoir être réellement synthétisés n'ont pas de réponse fréquentielle correspondant à la fonction porte, mais pourront s'en rapprocher.



Comme l'illustre la figure suivante, la troncature (multiplication par une porte de largeur $N T_e$) du sinc dans le domaine temporel se traduira par une convolution dans le domaine fréquentiel du filtre idéal avec un sinc s'annulant tous les $N T_e$. Pour de grandes valeurs de N , les sinc dans la bande passante se compenseront les uns les autres mais autour des points de discontinuité (fréquence de coupure), les ondulations restent apparentes.



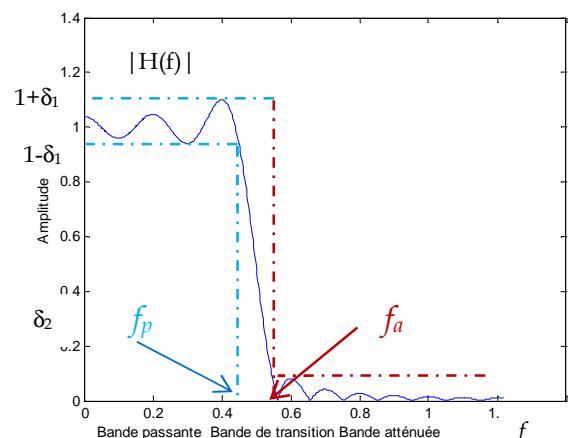
On peut observer que les différences vis-à-vis du filtre idéal (soit la fonction porte) sont principalement les ondulations dans la bande passante et dans la bande atténuee ainsi que la largeur de la transition.

C'est ainsi que les spécifications du filtre vont être définies par un gabarit fréquentiel linéaire ou en dB (décibels). Ce gabarit indique la ou les fréquences de coupure, la largeur de la bande de transition minimale souhaitée, le maximum d'ondulation de la bande passante et de la bande atténuee, la fréquence d'échantillonnage et éventuellement l'ordre maximal permis.

Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre n'est autre que l'ensemble des caractéristiques du filtre, à savoir :

- la bande passante (BP) de 0 jusqu'à f_p
- la bande atténuee (ou coupée BA) de f_a jusqu'à $f_a/2$
- Le gain du filtre dans la bande passante.
- L'atténuation du filtre en bande coupée f_a .
- la largeur $\Delta f = f_a - f_p$ de la zone de transition $\Rightarrow f_c = f_a + \Delta f / 2 = (f_a + f_p) / 2$
- l'amplitude des oscillations en bande passante :
 $\delta_1 \Rightarrow A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$ ondulation permise en BP
- l'amplitude des ondulations en bande atténuee :
 $\delta_2 \Rightarrow A_a = -20 \log(\delta_2)$ ondulation permise en BA



En pratique, plus les fréquences f_a et f_p sont proches, plus l'ordre du filtre devra être élevé. Pour un filtre idéal, ces valeurs seraient confondues

2. Synthèse des filtres RIF

L'emploi des filtres RIF peut se révéler attrayant eu égard à ses nombreux avantages : stabilité inconditionnelle (Tous les pôles sont en 0), phase linéaire possible. Néanmoins, ils présentent l'inconvénient de nécessiter un plus grand nombre de coefficients que les filtres RII pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles à cause de l'absence de pôles hors 0. Ainsi, toute fonction de filtrage numérique stable et causale peut être approchée par la fonction de transfert d'un filtre RIF.

Rappelons que la sortie d'un filtre RIF va s'exprimer comme une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrée :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \quad \text{d'où} \quad H(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^N b_n e^{-2\pi j f n T_e}$$

Ainsi, les coefficients de pondération ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre. Ces coefficients constituent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction de transfert H(f) (voir TFTD chapitre 3)

Du fait qu'un filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale (non rationnelle), il ne peut être obtenu par transposition d'un filtre continu. Les deux méthodes les plus utilisées pour l'approximation des filtres numériques RIF sont alors:

- Développement par série de Fourier : cette série est ensuite tronquée par des fonctions fenêtres pour limiter la réponse impulsionnelle. Les coefficients de Fourier coïncident avec les échantillons de la réponse impulsionnelle du Filtre.
- Echantillonage de la réponse fréquentielle : Cette méthode fait appel à la TFD. Celle-ci est appliquée aux coefficients recherchés b_i pour obtenir une suite fréquentielle qui corresponde à la réponse fréquentielle du filtre.

Il existe d'autres méthodes telles les méthodes d'optimisation qui sont basées sur la minimisation d'un critère d'erreur entre la courbe réelle et le filtre idéal [9].

3. Méthode de la fenêtre

Cette technique consiste, connaissant l'expression analytique H(f) de la réponse fréquentielle continue (dont la formulation mathématique connue) à approcher, à déterminer par utilisation de la transformée de Fourier à temps discret inverse, la réponse impulsionnelle. Cette réponse temporelle non causale obtenue sera retardée pour la rendre causale [18]. Ainsi :

1. A partir du gabarit idéal du filtre, on détermine les coefficients du filtre en limitant le calcul à N valeurs réparties symétriquement autour de n=0. Puis, on calcule de la TFTD inverse du filtre idéal qui nous permettra de retrouver les échantillons de la réponse impulsionnelle soient les coefficients du filtre :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df & N \text{ impair} \\ \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{-j\pi f T_e} e^{2\pi j f n T_e} df & N \text{ pair} \end{cases}$$

2. Cette méthode produit une série infinie de coefficients, on limite, alors la réponse impulsionnelle à N échantillons (troncature). Sachant que la troncature induit des ondulations, on peut faire appel aux fenêtres de pondération pour les atténuer. Ainsi, la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ sera multipliée par la fenêtre discrète $w_N(n)$ de longueur N:

$$h'_N(n) = h(n) \cdot w_N(n). \quad (\text{Choix de la fenêtre : voir chapitre 3})$$

3. Il ne reste plus qu'à décaler la réponse impulsionnelle $h(n)$ pour avoir une solution causale.

Remarque : Pour le choix de f_c il faudra faire attention aux fréquences de coupure à prendre en compte. Afin d'avoir de bons résultats lors de la synthèse, ce ne sont pas les fréquences de coupure du filtre idéal qu'il faut utiliser mais il faut déplacer celles-ci afin de les centrer dans la zone de transition. Pour un passe-bas, l'augmenter de la demi zone de transition (Δf), soit $f_p + \Delta f$ et pour un passe-haut, la diminuer de la demi zone de transition. Pour un passe-bande, diminuer la première fréquence de coupure de la demi zone de transition et augmenter la seconde de la demi zone de transition, pour un rejecteur de bande, on fera l'inverse.

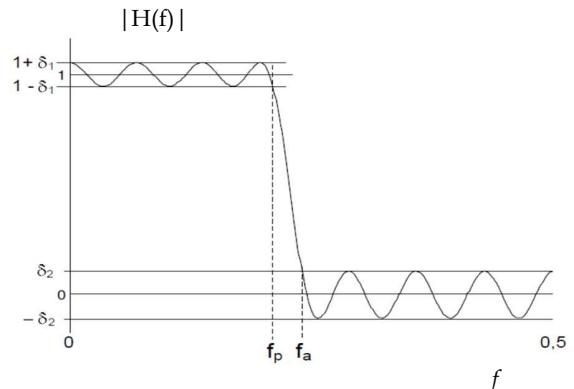
Exemple :

- Calcul de la réponse impulsionnelle idéale (cas N impair)

$$h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df$$

$$\text{On pose } f_c = (f_p + f_a)/2 \Rightarrow h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_c}^{f_c} e^{2\pi j f n T_e} df = \frac{1}{2\pi j n f_e T_e} e^{2\pi j f n T_e} \Big|_{-f_c}^{f_c}$$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{e^{2\pi j f_c n T_e} - e^{-2\pi j f_c n T_e}}{2\pi j n} = \frac{\sin(2\pi f_c n T_e)}{\pi n} = \frac{\sin(\pi n f_c / (f_e/2))}{\pi n}$$



On normalise les fréquences par rapport à $f_e/2$ (ou f_e) c.a.d que l'on remplace partout f_c par $f_c/(f_e/2)$, on obtient alors :

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n f_c / (f_e/2))}{\pi n} \frac{f_c / (f_e/2)}{f_c / (f_e/2)} = f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$$

Tout aussi facilement, on peut déterminer les réponses impulsionnelles d'un passe-haut ($1-H(f)$), d'un passe-bande (différence de 2 passe-bas) et d'un coupe-bande données. Les valeurs de la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ sont données au tableau suivant. Les fréquences f_c indiquées dans ce tableau (fréquences de coupure désirées) s'expriment également en fréquences normalisées (divisées par $f_e/2$).

	Réponse impulsionnelle h(n)	
Type de filtre	$h(n)$ pour $n \neq 0$	$h(n)$ $n=0$
Passe-bas	$f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$	f_c
Passe-haut	$-f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$	$1-f_c$
Passe-bande	$f_{c2} \frac{\sin(\pi n f_{c2})}{\pi n f_{c2}} - f_{c1} \frac{\sin(\pi n f_{c1})}{\pi n f_{c1}}$	$f_{c2}-f_{c1}$
Rejecteur de bande	$f_{c1} \frac{\sin(\pi n f_{c1})}{\pi n f_{c1}} - f_{c2} \frac{\sin(\pi n f_{c2})}{\pi n f_{c2}}$	$1-(f_{c2}-f_{c1})$

- Limitation du nombre d'échantillons à N

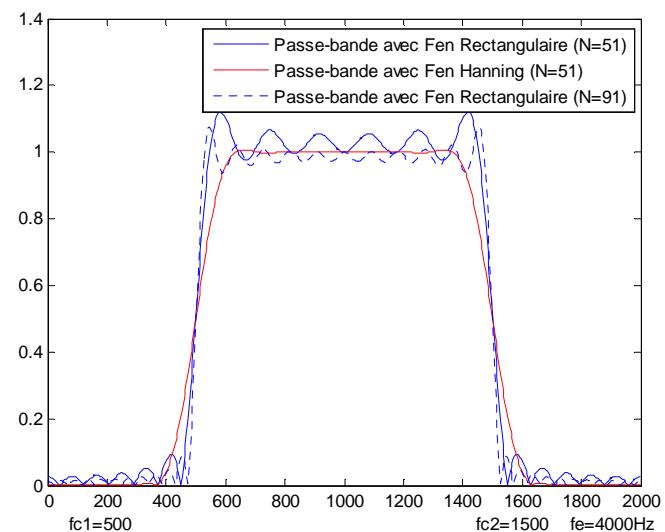
$$h'_N(n) = h(n) \cdot w(n)$$

$$\text{si } w(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \Rightarrow |W(f)| = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

$$H'_N(f) = H(f) * W(f)$$

La tronction temporelle introduit des ondulations et induit une zone de transition moins rapide déterminée par la largeur du lobe principal. Un compromis est à faire entre la raideur et l'amplitude des ondulations. Notons que cette méthode donne des ondulations de même amplitude dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Remarque: Si N augmente, l'étendue des oscillations diminue (la réponse est plus plate) et la largeur de la bande de transition décroît (Δf faible). On peut observer que les oscillations les plus fortes tendent à se concentrer aux discontinuités. Ces dernières ne diminuent pas si N augmente : on a toujours un dépassement à peu près égal à 9% se concentrant aux points de discontinuité : c'est le phénomène de Gibbs (Voir TP n°5). Pour diminuer les oscillations : on utilise les fenêtres de pondération qui permettent d'obtenir de forte atténuation des oscillations mais cela se fait au détriment de la largeur de la bande de transition qui devient plus grande.



Pour la choix de la fenêtre de pondération, on procédera comme suit : En fonction de l'atténuation δ_1 requise dans la spécification du filtre, on choisira le type de fenêtre $w(n)$ à utiliser. Puis en fonction de la largeur de la zone de transition Δf (spécifiée aussi au départ) et du type de la fenêtre $w(n)$, on déterminera la longueur de la réponse impulsionnelle N.

Fenêtres $w_N(n)$	LARGEUR de Transition : Δf ($2\Delta f/f_e$)	Atténuation en bande atténuée A
$w_{Rect}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	1.8/N	21
$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	6.2/N	44
$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	6.6/N	53
$w_{Black}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	11/N	74

Exemple : On veut synthétiser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f = f_e/5$ et une ondulation en bande atténuée > 50 db (voir TP n°4)

a- On normalise les fréquences $f_c/(f_e/2) \Rightarrow f_c=0.2$ $\Delta f/(f_e/2) \Rightarrow \Delta f=0.4$

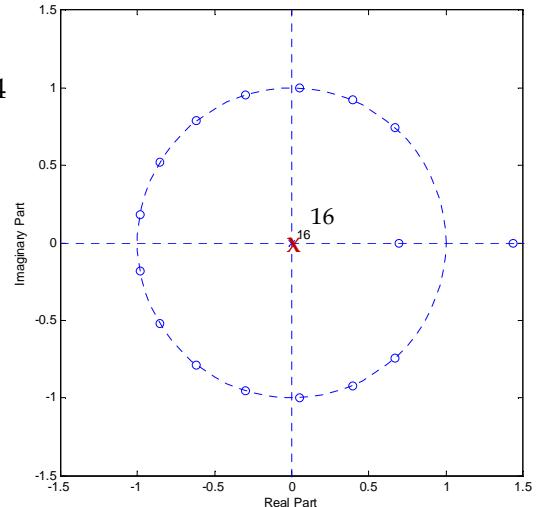
b- $h(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n / 5)}{\pi n / 5}$

c- On choisit $w(n)$ comme étant la fenêtre de Hamming

($A_a = 20 \log(\delta_2) = -53 \Rightarrow \Delta f = 6.6/N$)

d- On calcule $N = 6.6/\Delta f = 16.5$ on prend $N = 17$

e- on calcule les valeurs $h(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n / 5)}{\pi n / 5}$ pour $-8 \leq n \leq 8$



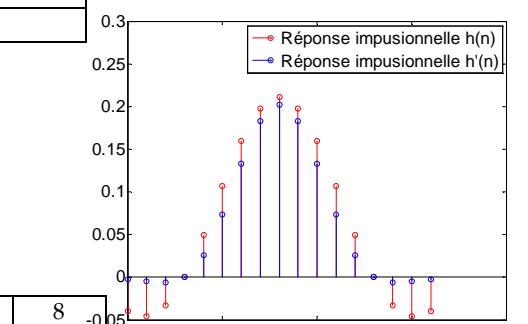
n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$h(n)$	-0,0399	-0,0456	-0,0329	0	0,0493	0,1064	0,1597	0,1974	0,2110
n	1	2	3	4	5	6	7	8	
$h(n)$	0,1974	0,1597	0,1064	0,0493	0	-0,0329	-0,0456	-0,0399	

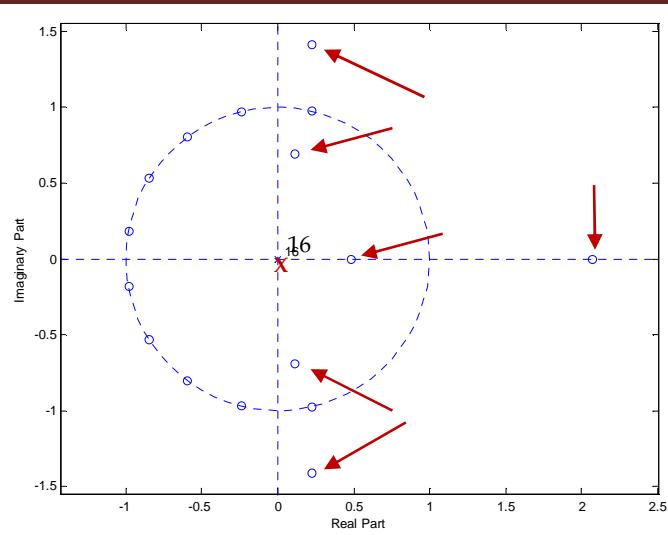
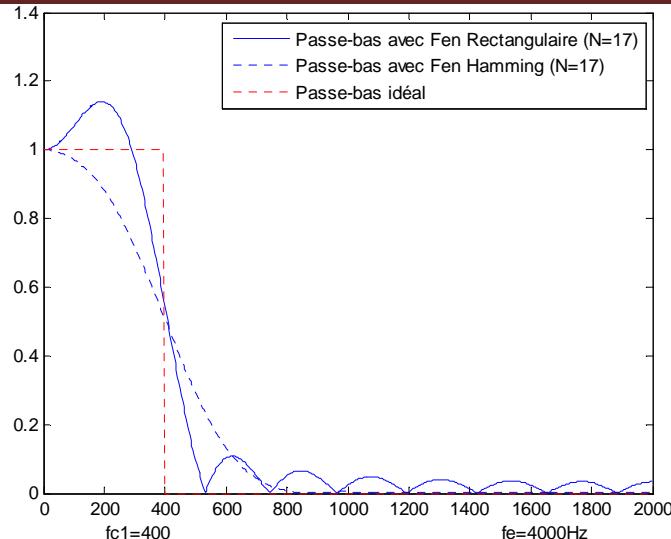
f- On multiplie $h(n)$ par $w(n)$ pour trouver $h'_N(n) = h(n) \cdot w(n)$

$$h'_N(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n / 5)}{\pi n / 5} \left[0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{16}\right) \right]$$

g- On translate le résultat de 8 échantillons.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(n)$	-0,0399	-0,0456	-0,0329	0	0,0493	0,1064	0,1597	0,1974	0,2110
n	9	10	11	12	13	14	15	16	
$h(n)$	0,1974	0,1597	0,1064	0,0493	0	-0,0329	-0,0456	-0,0399	
$h'_N(n)$	0,1826	0,1325	0,0730	0,0255	0	-0,006	-0,005	-0,0030	





On peut remarquer l'emplacement de zéros autour du premier 0 en 1 permet d'atténuer les lobes secondaire et de maintenir une réponse cste autour du zéro.

4. Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

La méthode de synthèse par échantillonnage en fréquence est appliquée depuis la réponse fréquentielle d'un filtre continu idéal $H(f)$ dont on ne connaît pas la formule mathématique (on ne peut alors calculer $h(n)$ par TF inverse de $H(f)$). On utilise alors la transformation de Fourier Discrète inverse. C'est-à-dire que l'on "échantillonne" la réponse désirée dans le domaine fréquentiel, on obtient N points de cette réponse fréquentielle auxquels on fait correspondre N points de la réponse temporelle équivalente obtenus par TFD inverse [18] comme suit :

On commence par échantillonner $H(f)$:

$$H(k) = H(f) \Big|_{f=k/N} \quad k = -(N-1)/2 \text{ à } (N-1)/2$$

puis on applique la TFD inverse $h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} H(k) e^{2\pi j k n / N}$

Cette méthode de synthèse est très simple et permet de réaliser toute forme de filtre (chose qu'on ne peut réaliser avec la méthode précédente). Cependant, cette méthode de synthèse ne garantit que les points fréquentiels $H(k)$. Entre ces points, la valeur de $H(f)$ n'est pas maîtrisée, il peut y avoir des oscillations qui ne sont pas également réparties avec un maximum d'erreur entre la réponse idéale et la réponse obtenue se situant autour de la bande de transition. Pour obtenir la réponse en fréquence du filtre finalement obtenu, on peut par exemple appliquer une TFD à la réponse impulsionale $h(n)$ de taille N obtenue, après avoir ajouté un grand nombre de zéros. Par ailleurs, du fait de l'emploi d'une TFD inverse sur N points, la réponse impulsionale $h(n)$ obtenue est périodique de période N bien que la réponse impulsionale idéale souhaitée ne soit pas de durée limitée.

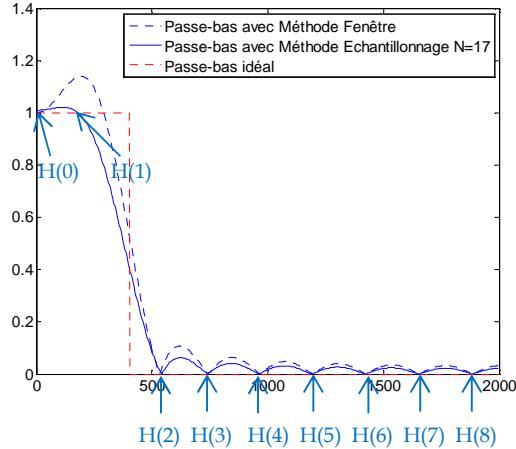
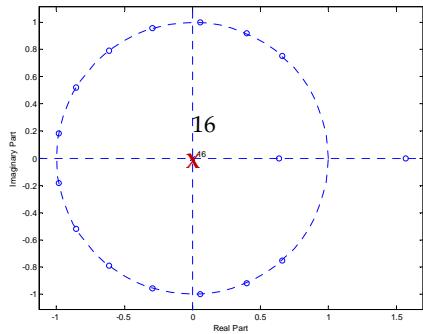
Exemple : On cherche à réaliser sous forme numérique un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c=f_e/10$ avec $\Delta f < f_e/16$. On prend donc $N=17$, ce qui nous donne $\Delta f=0.0588$ (voir TP n°4)

On a $N = 17$, $H(0)=H(-1)=H(1)=1$ et $H(2)=H(-2)=\dots=H(8)=H(-8)=0$. On peut en déduire, par transformation de Fourier discrète (TFD), les valeurs de la réponse impulsionnelle

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} H(k) e^{j2\pi k n/N} \quad h(n) = \frac{1}{17} (1 + e^{-j2\pi n/17} + e^{j2\pi n/17})$$

$$h(n) = \frac{1}{17} (1 + 2 \cos(2\pi n/17)) \quad \text{pour } -8 \leq n \leq 8$$

Enfin, pour rendre ce filtre réalisable physiquement, on translate cette réponse impulsionnelle de 8 échantillons.

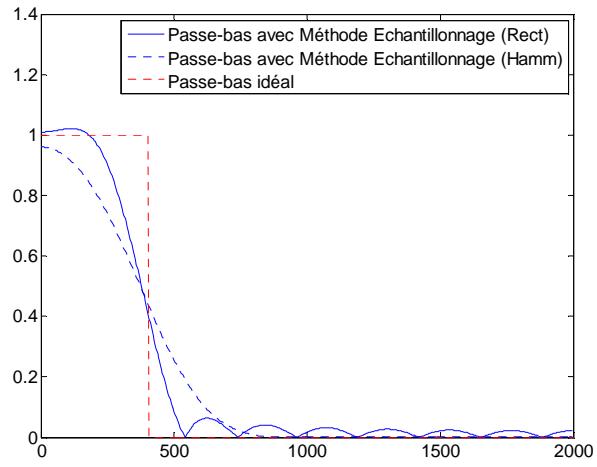
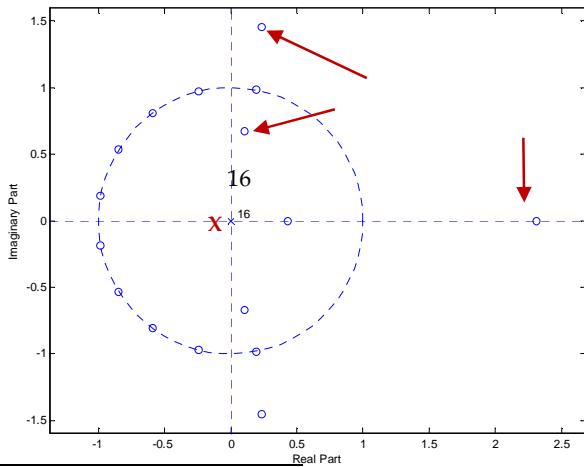


Sachant que $H(k)^*=H(-k)$ pour un signal $h(n)$ réel, on peut, de manière générale, démontrer que :

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right) \quad \text{pour } -N/2 \leq n \leq N/2$$

La réduction des oscillations peut aussi s'obtenir à travers le fenêtrage. Ci-dessous les coefficients du filtre $h(n)$ suivis de ceux obtenus après fenêtrage de Hamming $h'_N(n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(n)$	-0,0257	-0,0269	-0,0153	0,0114	0,0514	0,0985	0,1430	0,1749	0,1865
$h'_N(n)$	-0,0020	-0,0031	-0,0033	0,0041	0,0279	0,0705	0,1237	0,1688	0,1865
n	9	10	11	12	13	14	15	16	
$h(n)$	0,1749	0,1430	0,0985	0,0514	0,01139	-0,0153	-0,0269	-0,0257	
$h'_N(n)$	0,1688	0,1237	0,0705	0,0279	0,0041	-0,0032	-0,0031	-0,0020	

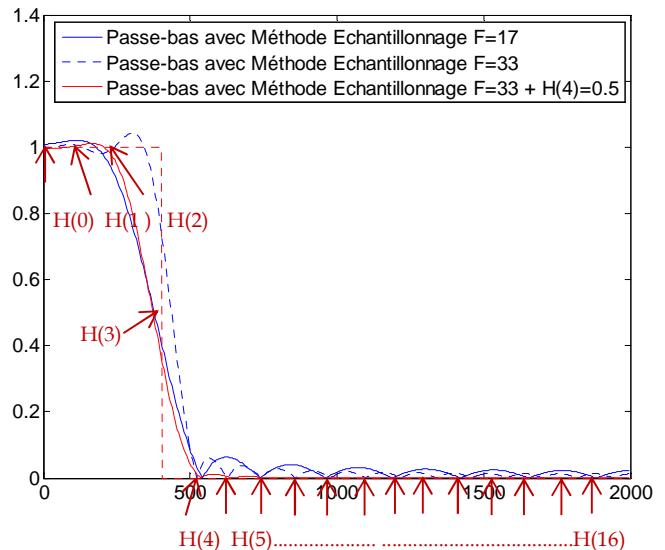
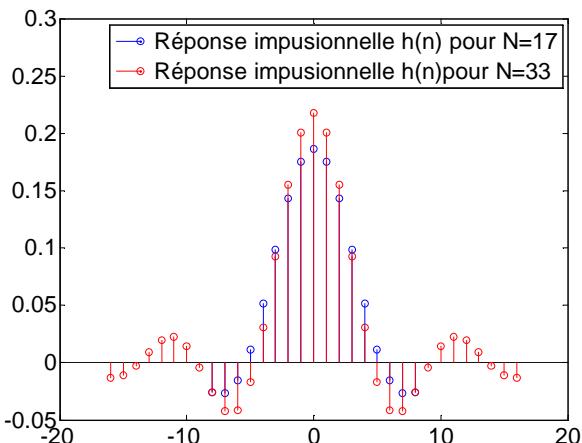


Remarques: Pour le choix de N, il faut veiller à ce que f_e/N soit inférieur à Δf .

Par ailleurs, on peut quelques peu atténuer les ondulations en adoucissant les transitions dans la transmittance du filtre. Pour cela, on introduira 0.5 entre 1 et 0, Mais de ce fait Δf augmentera, on ajustera, alors, la valeur de N en conséquence ($2\Delta f < f_e/16$). Ce qui nous fournira une valeur de N de 33 et $\Delta f = 0.0303$. On prendra $H(3)=H(-3)=0.5$. Ainsi $H(0)=H(-1)=H(1)=H(2)=H(-2)=1$ et $H(3)=H(-3)=0.5$ et $H(4)=H(-4)=\dots=H(32)=H(-32)=0$.

$$h(n) = \frac{1}{33} (1 + 2 \cos(2\pi n/33) + 2 \cos(4\pi n/33) + \cos(6\pi n/33))$$

pour $-16 \leq n \leq 16$



5. Constitution et réalisation des filtres numériques

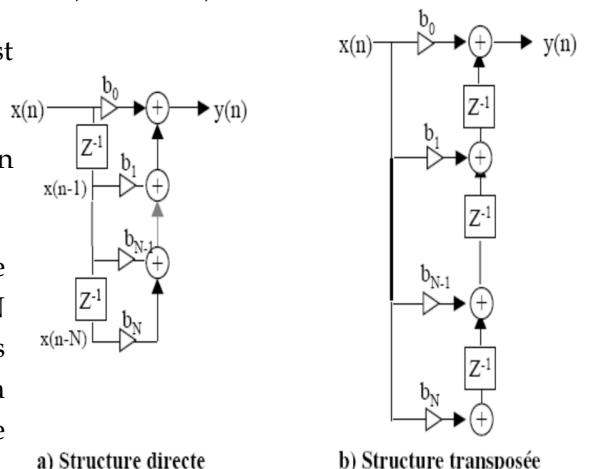
Un filtre numérique est généralement constitué des éléments suivants : un ou plusieurs organes de retard (ce sont des registres à décalage jouant le rôle de mémoires retardées), pilotés par une horloge de période; des opérateurs arithmétiques (additionneurs et multiplieurs); des registres fournissant les coefficients de pondération du filtre [18].

La réalisation concrète d'un filtre numérique consistera en fait à matérialiser l'algorithme de calcul pour la structure retenue. On aura la possibilité de travailler : Soit en logique câblée (assemblage d'organes logiques, tels que portes, mémoires, etc ...), soit en logique programmée (organisation autour d'un processeur de traitement du signal (DSP) ou, même, utilisation d'un microprocesseur(micro-ordinateur) standard).

La structure canonique directe (transversale ou non récursive) est donnée ci-contre:

Un filtre RIF nécessite $(N-1)$ opérations de multiplication, N opération d'addition pour chaque nouvel échantillon à filtrer.

On peut également exprimer la complexité en nombre de multiplication-accumulation qui, dans le cas d'un filtrage RIF, vaut N [9]. Le coût mémoire d'un filtrage RIF est de $2(N+1)$ [$(N+1)$ coefficients bi et $(N+1)$ points mémoire pour le vecteur des entrées $x(i)$]. Si la fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée vaut F_e , cela signifie que le filtre devra être réalisé en un temps T_{calcul} inférieur à $T_e = 1/f_e$.



Série n° 4

1. Obtenir les coefficients d'un filtre à RIF passe-bas par la méthode de fenêtrage pour obtenir les spécifications suivantes :

- Fréquence de coupure idéale : $f_c=1.75$ kHz
- Largeur de transition : $\Delta f=0.5$ kHz
- Atténuation en bande atténuée : $A=-20 \log_{10}(\delta) > 51$ dB avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$
- Fréquence d'échantillonnage : $f_e=8$ kHz

Solution : $\Delta f=0.125$ $f_c=0.4375$ $h(n)=f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c} = \frac{\sin(\pi n 0.4375)}{\pi n}$ pour $k \neq 0$ et $h(0)=f_c$

hamming $\Rightarrow N=53$

Les coefficients du filtre sont symétriques, il suffira par conséquent de calculer les valeur de $h(0)$ à $h(26)$.

$$h(0) = f_c = 0.4375 \quad w(0) = 0.54 + 0.46\cos(0) = 1 \quad h(0) = h_N(0) \quad w(0) = 0.4375$$

$$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{52}\right) & \text{pour } |n| \leq 26 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$h(0)=0.4375, h(1)=h(-1)=0.311, h(2)=h(-2)=0.060, h(3)=h(-3)=-0.0856, h(4)=h(-4)=-0.053, h(5)=h(-5)=0.0325, h(6)=h(-6)=0.0434, h(7)=h(-7)=-0.0075, h(8)=h(-8)=-0.0319, \dots, h(26)=h(-26)=-0.0009.$$

Pour rendre le filtre causal, on ajoute 26 à chacun des indices.

2. On souhaite approcher un filtre idéal passe-haut par un filtre à réponse impulsionale finie, synthétisé par la méthode du fenêtrage. Ce filtre doit répondre aux spécifications suivantes :

- ✓ Fréquence de coupure $f_c=2$ kHz
- ✓ Largeur de transition : $\Delta f=0.5$ kHz
- ✓ Atténuation en bande atténuée : $A=-20 \log_{10}(\delta) > 40$ dB avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$
- ✓ Fréquence d'échantillonnage : $f_e=8$ kHz

- Déterminer l'expression mathématique exacte de $h'(n)$.

- Calculer $h'(0)$ et tracer approximativement $h'(n)$.

- Quel est l'intérêt du fenêtrage et quel est son inconvénient ?

- Quel est l'inconvénient de cette technique de synthèse des filtres ?

- Citer un avantage et un inconvénient de la synthèse par des filtres RIF de même que par les RII.

Solution : $\Delta f=0.5$ $f_c=0.125$ $h(n) = -f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$ pour $k \neq 0$ et $h(0)=1-f_c$ $A>40$ Hanning $\Rightarrow N=49$

$$h'(n) = -0.5 \frac{\sin(\pi n / 2)}{\pi n / 2} (0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{48})) \quad h'(0) = 0.5$$

3. Soit un filtre passe-bas de coupure 0.25 et $\Delta f<0.08$ ($f_e=1$). On souhaite synthétiser un filtre d'ordre par la méthode de l'échantillonnage fréquentielle.

Solution $f_c=0.25, f_e=1$ et $N=13$ ainsi :

$$(f_e/N=0.07, 2f_e/N=0.15, 3f_e=0.23, 4f_e/N=0.30) \Rightarrow H(0)=H(1)=H(-1)=H(2)=H(-2)=H(3)=H(-3)=1 \text{ et les autres à 0}$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) = \frac{1}{13} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^6 H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{13}\right) \right)$$

$$h(n) = \frac{1}{13} \left(H(0) + 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{13}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi n}{13}\right) + 2 \cos\left(\frac{6\pi n}{13}\right) \right)$$

4. Un filtre numérique est à planter. La fréquence d'échantillonnage est fixée à 8kHz. Idéalement, on veut supprimer la bande fréquentielle de 1kHz à 2 kHz.

- Tracez, pour ce filtre idéal, le module de $H(f)$

- Si on utilise la méthode d'échantillonnage en fréquence en prenant N points sur cette réponse idéale, quel serait $h(n)$ pour $N=21$.

- Quelle est l'inconvénient de cette méthode? comment y remédier

Solution :

$f_1 = 1$, $f_2 = 2$ $f_e = 8$ et $N = 21$ ainsi : ($f_e/N = 381$, $2f_e/N = 762$, $3f_e/N = 1143$, $4f_e/N = 1523$, $5f_e/N = 1905$, $6f_e/N = 2286$)
 $\Rightarrow H(3) = H(-3) = H(4) = H(-4) = H(5) = H(-5) = 0$ et les autres à 1.

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) = \frac{1}{20} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^2 H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + 2 \sum_{k=6}^{10} H(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right)$$

$$h(n) = \frac{1}{21} \left(H(0) + 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{21}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi n}{21}\right) + 2 \cos\left(\frac{12\pi n}{21}\right) + \dots + 2 \cos\left(\frac{20\pi n}{21}\right) \right)$$

La TF de ce $H(n)$, va effectivement passer par ces points mais en dehors de ces points le comportement du filtre peut dévier du filtre idéal. Pour améliorer, il faudra prendre plus de points, d'où un filtre plus long.

Exercices supplémentaires

1. Au cours de la transmission d'un signal numérique (échantillonné à une fréquence de 2,5 kHz), il a été affecté d'un bruit localisé entre les bandes de fréquence 350 Hz et 550 Hz. On veut éliminer le bruit par l'emploi d'un filtre RIF possédant une bande de transition $\Delta f = 100$ Hz. Concevoir ce filtre :

A] Par la méthode du fenêtrage. On souhaite une atténuation en bande atténuée $A = -20 \log_{10}(\delta) > 20$ dB.

- Tracer $H(f)$ idéal
- Déterminer $h(n)$ et l'ordre N du filtre
- Calculer $h(0)$, $h(1) = h(-1)$
- Tracer alors approximativement $H(f)$

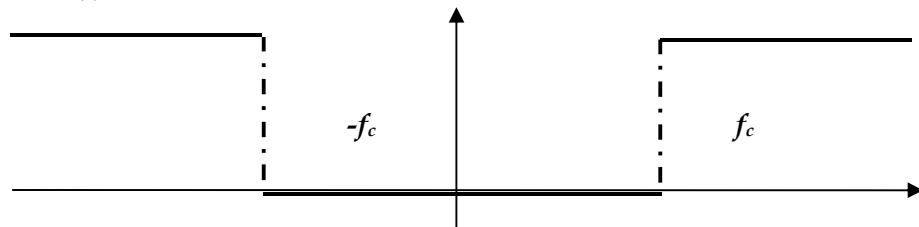
B] Par la technique de l'échantillonnage fréquentiel

- Déterminer N
- Donner les valeurs de $H(k)$ et son tracé
- Déterminer $h(n)$
- Comparer ces 2 techniques de synthèse d'un filtre RIF

2. Au cours de la transmission d'un signal numérique (échantillonné à une fréquence de 5 kHz), il a été affecté par un bruit sinusoïdal de fréquence $f_0 = 250$ Hz. On veut éliminer le bruit par l'emploi d'un filtre possédant une bande de transition $\Delta f = \pm 50$ Hz à -3db. Concevoir un filtre RIF par la méthode du fenêtrage. On souhaite une atténuation en bande atténuée $A = -20 \log_{10}(\delta) > 40$ dB avec $f_{c1,2} = f_0 \pm \Delta f$

- Déterminer $h(n)$ et l'ordre N du filtre
- Calculer $h'(0)$

On suppose le filtre $H(f)$ suivant :



On veut déterminer le filtre numérique $h(n)$ équivalent par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel. Le filtre doit répondre aux spécifications suivantes $f_c = f_e/4$ et une largeur de transition $\Delta f < f_e/16$

- Déterminer et tracer $H(k)$
- Déterminer $h(n)$
- Tracer $H(f)$ réel du filtre déterminé
- Comment sera le retard de groupe
- Quelle serait la sortie $y(n)$ si $x(n) = 1 + \cos(0.6\pi n) + 3 \cos(0.4\pi n)$. Prendre $f_e = 1$.

TP n°4: Synthèse des filtres RIF

But du TP : Dans ce TP, on teste deux méthodes pour synthétiser un filtre RIF: méthode de séries de Fourier (ou méthode des fenêtres) et méthode de la TFD dite par échantillonnage fréquentiel.

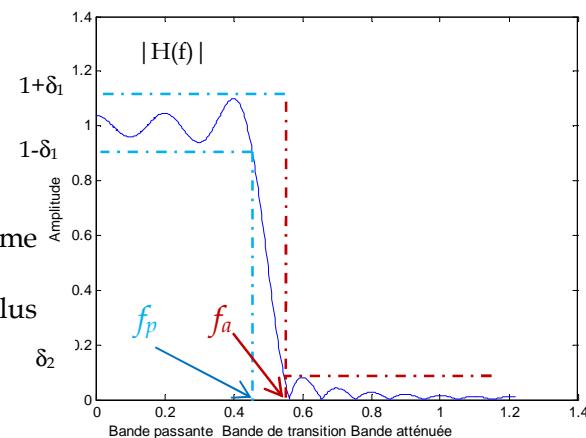
I. Rappels

Un filtre de réponse impulsionnelle finie (RIF) possède une fonction de transfert polynomiale. Il ne peut pas être obtenu par transposition d'un filtre continu, comme cela est fait pour les filtres RII. Les filtres RIF présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de coefficients pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles. Mais par contre, ils sont inconditionnellement stables. On peut synthétiser des filtres RIF à phase linéaire, c'est-à-dire à temps de propagation de groupe constant.

Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre n'est autre que l'ensemble des caractéristiques du filtre, à savoir :

- Le gain du filtre dans la bande passante.
- L'atténuation du filtre en bande coupée f_a .
- La fréquence de coupure f_c , on l'exprime souvent sous forme normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage.
- La largeur de bande de transition Δf souhaitée qui doit être la plus petite possible .
- Les éventuelles oscillations en bande passante et/ou atténuée.



- La détermination des coefficients d'un filtre RIF par la méthode de la fenêtre est réalisé par la fonction Matlab FIR1. Pour utiliser la technique d'échantillonnage de la réponse fréquentielle, on emploiera la fonction Matlab FIR2.

II. Mise en avant du phénomène de Gibbs

```
clc; clear all; close all;
Te=0.2;fe=1/Te; N=50; t = Te*(-N/2:N/2); N=length(t); h = Te*sinc(t);
figure; subplot(2,1,1);plot(t,h);grid; xlabel('t');ylabel('Amp'); title('Sinc tronqué')
NF=2048; H=fft(h,NF); H=fftshift(H);axe_f=fe*(-1/2:1/NF:1/2-1/NF);
subplot(2,1,2);plot(axe_f, abs(H));grid; xlabel('f');ylabel('Amp'); title('TF Sinc tronq')
```

1. Identifier ce filtre
2. Expliquer la provenance des oscillations observées.
3. Utiliser le zoom pour mesurer le dépassement en bande passante (en %).
4. Déterminer f_a , f_p la largeur de la bande de transition puis f_c
5. Prendre $N=100$ puis 500 puis 1000 et mesurer à nouveau le dépassement et les 3 fréquences. Commenter.
6. Que représente N ? Quel est l'inconvénient d'augmenter N ?
7. Comment réduire les oscillations?
8. Choisir un fenêtrage et l'appliquer puis commenter.

III. Méthode des fenêtres

Pour synthétiser un filtre passe-bande, par la méthode des fenêtres, répondant aux spécifications suivantes: $f_{c1} = 500$ Hz, $f_{c2} = 1$ kHz, $f_e = 4$ kHz, $NbCoeff = 47$, on procède comme suit :

```
clear all; close all; clc;
```

```

fc1 = 500 ; %Début de la BP
fc2 = 1000; %Fin de la BP
fe = 4000; %Fréquence d'échantillonnage
fc1N = fc1/(fe/2); fc2N = fc2/(fe/2); %Normalisation de fc1 et fc2
NbCoeff = 47; %Nombre de coefficients
N=NbCoeff-1; %Ordre du filtre
h = FIR1(N,[fc1N fc2N], 'band', rectwin(NbCoeff), 'scale') ;
[H F]= freqz(h, 1, 512, fe); % Calcul de H(f)
subplot(2,2,1);hold on; stem(h,'b'); grid; %Tracé de la réponse impulsionnelle,
subplot(2,2,2);hold on; plot(F,abs(H)); grid; %Tracé du spectre d'amplitude
subplot(2,2,3);hold on; plot(F,20*log10(abs(H))); grid %Tracé du spectre d'amplitude en db
subplot(2,2,4);hold on; zplane(h,1);grid; %Tracé des pôles et zéros

```

1. Donner l'expression théorique de ce filtre.
 2. Calculer Δf réelle sachant que Δf normalisée soit $\Delta f / (fe/2) = 1.8/N$ théorique puis déterminer la (pratiquement) à partir du graphe en employant les valeurs à $1-\delta_1$ et la tangente à δ_2 .
 3. Faites de même pour l'atténuation en db. Dépend-elle-de N?
 4. Reprendre les questions 2 et 3 pour un fenêtrage de Hanning
- ```

h = FIR1(N,[fc1N fc2N], 'band', hann(NbCoeff), 'scale')

```
5. Superposer les nouveaux graphes pour les 4 fenêtres (changer de couleur pour bien voir ) et commenter.
  6. Comment réduire  $\Delta f$  pour une même fenêtre? Quel est l'inconvénient de cette solution?
  7. Pour NbCoeff = 23 , comparer la répartition des zéros pour les 2 fenêtres en établissant la relation avec les tracés des réponses en fréquence leur correspondant.

#### IV. Synthèse RIF par échantillonnage fréquentiel

On veut synthétiser le même filtre passe-bande par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel et comparer le résultat avec la méthode des fenêtres (garder l'ancien programme et rajouter)

```

Deltaf=fe/(NbCoeff);
AA = zeros(1,N/2+1);
for i=0:N/2
 if (i*Deltaf>fc1 && i*Deltaf<fc2)
 AA(i+1)=1;
 end
end
FF = (0:1/(N/2):1); %fréquence normalisée
h = fir2(N, FF, AA, rectwin(NbCoeff)); [H F] = freqz(h, 1, 512, fe);
subplot(2,2,1);hold on; stem(h,'r');
subplot(2,2,2);hold on; plot(F,abs(H),'r');
subplot(2,2,3);hold on; plot(F,20*log10(abs(H)),'r');

```

1. Donner l'expression théorique de ce filtre.
2. Expliquer le rôle de la boucle.
3. Tester la fenêtre de Hanning également et comparer avec la fenêtre rectangulaire ( $\Delta f$  et dépassement).

#### V. Filtrage d'un ECG

Le signal dans **ecg.dat** contient plusieurs secondes d'un ECG échantillonné à 500 Hz. Les petites oscillations visibles principalement entre les complexes PQRST sont dues à la présence d'une interférence à 50 Hz, qu'on peut supprimer avec un filtrage passe-bas, mais en essayant de ne pas déformer les complexes.

1. Ecrire le programme permettant de réaliser un filtre RIF à phase linéaire (méthode des fenêtres)
2. Visualiser la sortie pour vérifier (utiliser filter).