

V. Synthèse des filtres récurrents RII

Le principe de définition du cahier des charges d'un filtre récurrent (RII) se déroule de la même manière que pour un filtre non récurrent (RIF) mais la synthèse se fera de différente manière. L'intérêt d'employer un filtre RII réside principalement dans la possibilité d'obtenir une bande de transition étroite pour un ordre raisonnable bien qu'il présente d'une part, un risque d'instabilité dû à une grande sensibilité numérique des coefficients mais que l'on peut toutefois contrôler en déterminant une structure mieux adaptée, et d'autre part, une variation de phase fortement non linéaire.

Rappelons que pour un filtre RII, la sortie s'exprime comme une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrées et de sortie:

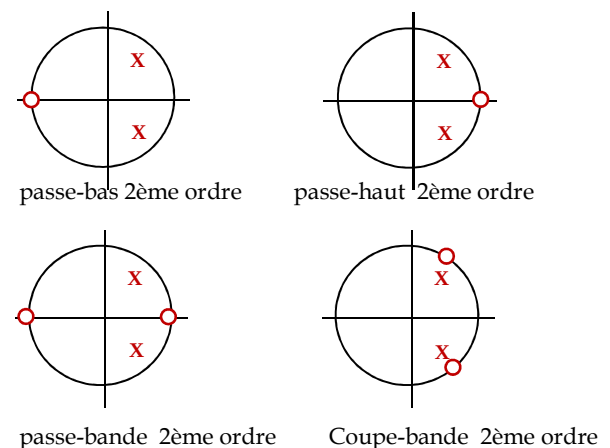
$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \quad \text{d'où} \quad H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i .z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i .z^{-i}}$$

La méthode directe consiste à placer des pôles et des zéros aux fréquences utiles mais la plus courante (indirecte dite aussi de transposition) est l'utilisation des méthodes de synthèse des filtres analogiques aboutissant à une fonction $H(p)$ correspondant aux spécifications. Une fonction permettant le passage du plan p dans le plan z ($p = fct(z)$) est ensuite utilisée pour obtenir $H(z)$. Cette fonction doit maintenir la stabilité du filtre analogique et maintenir, au mieux, les caractéristiques de la réponse fréquentielle $H(f)$ du filtre numérique.

1. Méthode des pôles et des zéros

Un filtre est rigoureusement caractérisé par la position de ses pôles et ses zéros dans le plan p (en continu) ou dans le plan z (en discret). Grâce à laquelle, on pourra déterminer la fonction de transfert du système à une constante près.

Rappelons, dans ce contexte que lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z , la réponse fréquentielle présentera un minimum au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic (un maximum) au point correspondant qui sera d'autant plus important que le pôle est proche de 1.



De ce fait, on peut, par un placement adéquat des pôles et des zéros, obtenir un filtre sélectif simple.

La méthode se résume donc ainsi [11] :

- o A partir des spécifications du filtre, placer des pôles et des zéros sur le cercle (ou à partir des zéros et des pôles de $H(p)$ calculer les zéros et les pôles de $H(z)$).

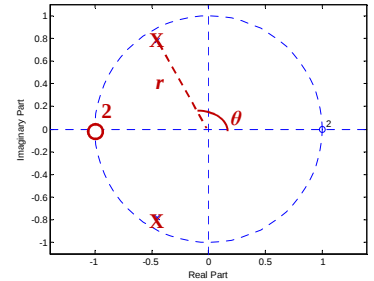
- o Si c'est un passe-bas, le caractère passe-bas est renforcé en complétant l'ensemble des zéros par autant de zéros que possible en $z=-1$ tout en conservant à $H(z)$ son caractère propre (degré du numérateur égal au degré du dénominateur). Si c'est un passe-haut, placer les zéros en $z=1$.
- o On ajuste le coefficient K pour obtenir un gain unitaire à $z=1$ pour un passe-bas, à $z=-1$ pour un passe-haut.

Il existe une relation "empirique" entre la largeur de la zone de transition Δf à 3 db et la position des pôles sur un rayon supérieure à 0.9: $r \approx 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$

- Pour un filtre passe-bas de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z+1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2+2z+1)}{z^2-2zr\cos\theta+r^2}$$

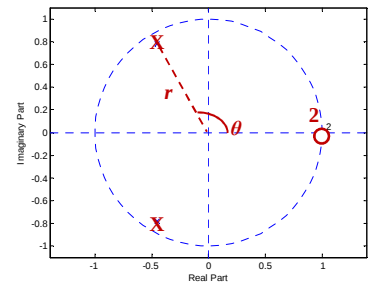
avec $K = \frac{1+r^2-2r\cos\theta}{4}$ $\theta = (f_c / f_e) \times 360^\circ$ et $r = 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$



- Pour un filtre passe-haut de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z-1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2-2z+1)}{z^2-2zr\cos\theta+r^2}$$

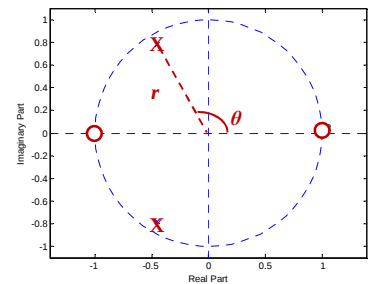
avec $K = \frac{1+r^2+2r\cos\theta}{4}$



- Pour un filtre passe-bande de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2-1)}{z^2-2zr\cos\theta+r^2}$$

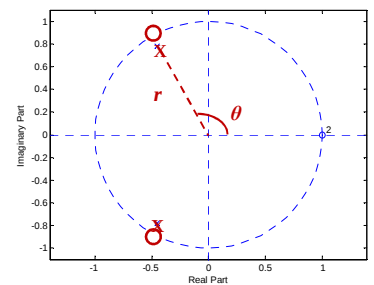
avec $K = \frac{|e^{2j\theta} - 2r\cos\theta e^{j\theta} + r^2|}{|e^{2j\theta} - 1|}$



- Pour un filtre coupe-bande de second ordre, nous avons :

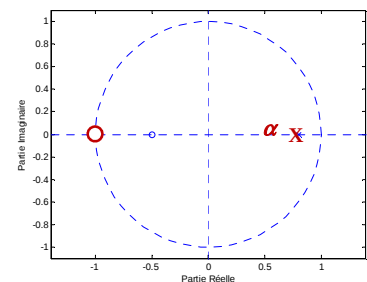
$$H(z) = \frac{K(z-e^{-j\theta})(z-e^{j\theta})}{(z-re^{-j\theta'})(z-re^{j\theta'})} = \frac{K(z^2-2\cos\theta z+1)}{z^2-2zr\cos\theta'+r^2}$$

avec $K = \frac{1+r^2-2r\cos\theta'}{2-2\cos\theta}$



- Pour un filtre passe-bas de premier ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z/\alpha + 1/\alpha)}{z - (1-K)/\alpha} \quad K = \tan(\omega_c/2) \quad \omega_c = 2\pi f_c / f_e \quad \alpha = 1 + K$$



- Pour un filtre passe-haut de premier ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z/\alpha - 1/\alpha)}{z - (1-K)/\alpha}$$

Exemple: Trouver, grâce à la position des pôles et des zéros, la fonction de transfert et l'équation de récurrence d'un filtre numérique simple qui a les caractéristiques suivantes :

- Fréquence de coupure : 50 Hz
- Largeur de bande à 3 dB : ± 10 Hz
- Fréquence d'échantillonnage : 500 Hz

Pour rejeter les composants à 50 Hz, on place une paire de zéros aux points du cercle unité qui correspondent à 50 Hz. Ces points se situent à un angle de $360^\circ \cdot 50 / 500 = \pm 36^\circ$. Pour obtenir un filtre idéal rejecteur de bande et renforcer la réponse en amplitude de chaque côté de la fréquence de coupure, deux pôles complexes conjugués sont placés sur le cercle de rayon inférieur à 1 [18].

La largeur de la bande rejetée est déterminée par la position de pôles. La relation entre la largeur de bande et le rayon est donc applicable, par conséquent, la norme des pôles est 0,937.

Depuis la figure, la fonction de transfert du filtre est donnée par :

$$H(z) = K \frac{(z - e^{-j36^\circ})(z - e^{j36^\circ})}{(z - 0.937e^{-j36^\circ})(z - 0.937e^{j36^\circ})} = K \frac{1 - 1.618z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.516z^{-1} + 0.878z^{-2}}$$

Avec $K = 0.947 \approx 1$, l'équation de récurrence est :

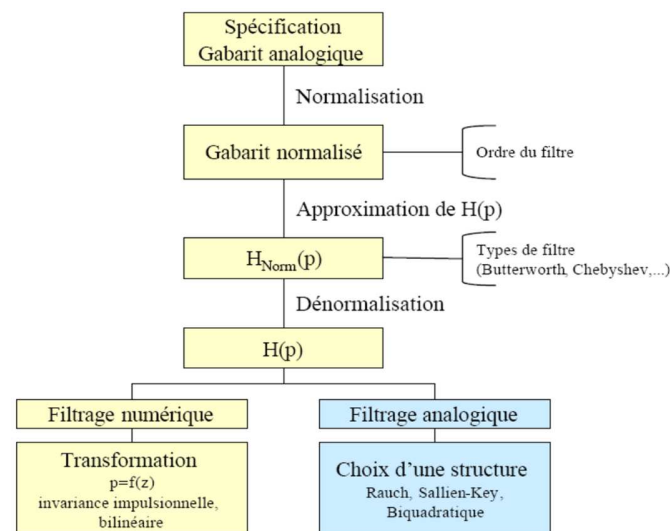
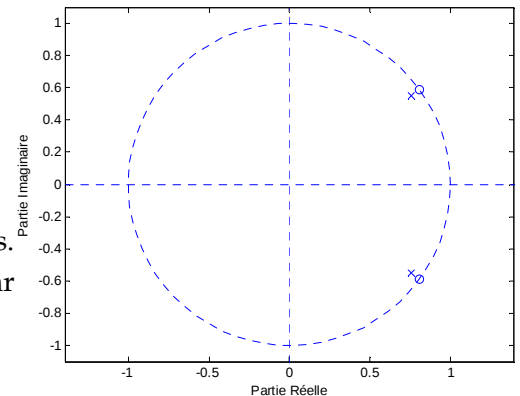
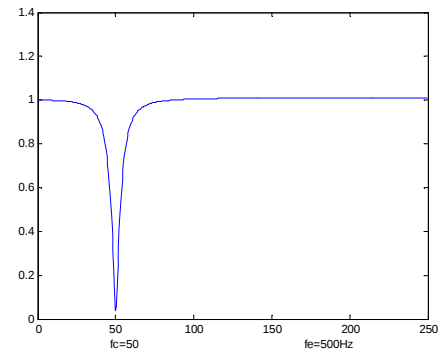
$$y(n) \approx x(n) - 1.618x(n-1) + x(n-2) + 1.516y(n-1) - 0.878y(n-2)$$

2. Rappels sur les filtres analogiques

Il existe de nombreuses méthodes permettant de synthétiser un filtre numérique récursif à partir d'un filtre analogique pris comme modèle [18]:

- o le filtre doit avoir une réponse impulsionnelle ou indicielle imposée : ce sont les méthodes de l'invariance impulsionnelle et de l'invariance indicielle.
- o le filtre doit avoir une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit donné : c'est la transformation bilinéaire.

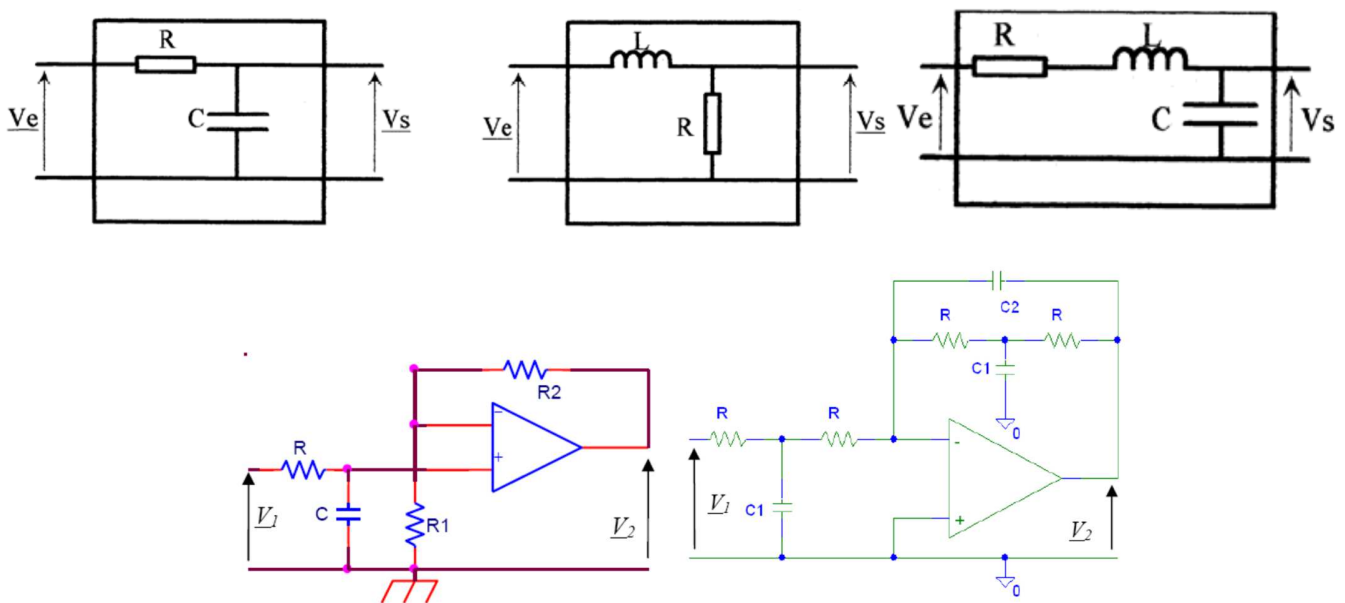
Pour concevoir un filtre analogique, on peut employer des filtres passifs obtenus par combinaison de résistances, de condensateurs et/ou de bobines ou encore utiliser des filtres actifs comportant un élément amplificateur (transistor, AO, etc.) qui permet donc de modifier les amplitudes des signaux. Ainsi, un filtre passif de base (de premier ordre) peut être composé d'une cellule RC ou d'une cellule RL.



Il faut noter que :

- les filtres numériques sont limités à des fréquences $< 100\text{MHz}$
- les filtres passifs (L,C, quartz, etc ;) sont utilisés pour les hautes fréquences
- les filtres actifs (R,C, ALI) utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) limités à 1Mhz
- les filtres à capacité commutés (R et C intégrés, ALI, Interrupteur commandé MOS) ont des fréquences ($< 10\text{ Mhz}$) programmables

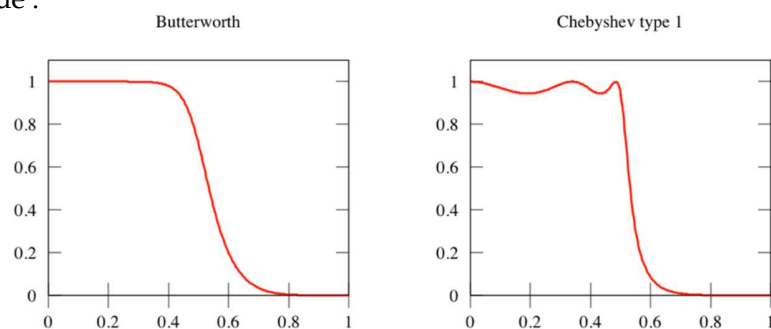
Ci-dessous, sont donnés quelques exemples de structure pour des filtres passifs passe-bas de premier et second ordre suivis de filtres actifs passe-bas de premier et second ordre aussi.



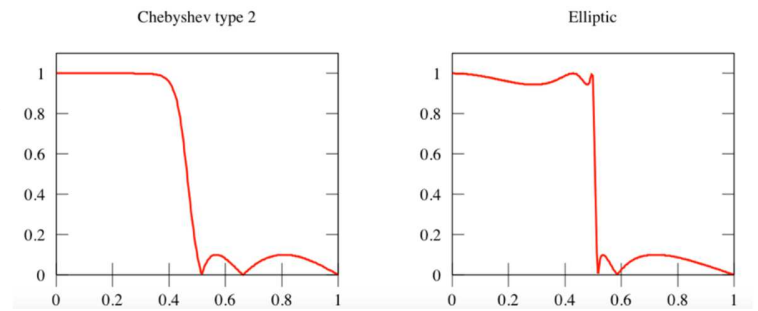
Pour obtenir des filtres d'ordre N plus élevé, on emploiera des filtres du premier et du deuxième ordre mis en cascade. Les pentes asymptotiques seront proportionnelles au nombre de cellules ($+N \uparrow$ et $+\Delta f \downarrow$). A noter également que les filtres passe-bas ou passe-haut peuvent avoir un nombre entier d'ordre (1, 2, 3...) tandis que les filtres passe-bande ou coupe-bande ne peuvent qu'avoir un ordre pair (2, 4, 6, ...) car ils sont formés de paires de cellules : 2 cellules RC ou une cellule RC et une cellule RL.

Pour synthétiser des filtres analogiques répondant à un gabarit donné, on choisira parmi un ensemble de filtres analogiques testés et éprouvés donc connus pour leurs propriétés en termes de pente d'atténuation et d'ondulation dans la bande passante et atténuée telles que :

- Filtres de Butterworth : Coupure peu raide mais gain constant en bande passante
- Filtres de Tchebychev (Chebyshev) : Raideur de coupure importante mais ondulations dans la bande passante (Chebyshev 1) ou atténuée (Chebyshev 2) et simple à mettre en oeuvre



- Filtres de Cauchy (dit aussi elliptiques) : Coupure extrêmement raide mais ondulations dans la bande passante et atténuée mais circuits plus complexes à réaliser.
- Filtres de Bessel : Retard de groupe constant mais mauvaise sélectivité même pour ordre élevé.



1. Un filtre de Butterworth est caractérisé par le fait que la réponse d'amplitude est maximale plate dans la bande passante et monotonement décroissante à partir d'une certaine fréquence (fréquence de coupure).

L'amplitude d'un filtre analogique Passe-bas de Butterworth d'ordre N est définie par l'expression :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

ou

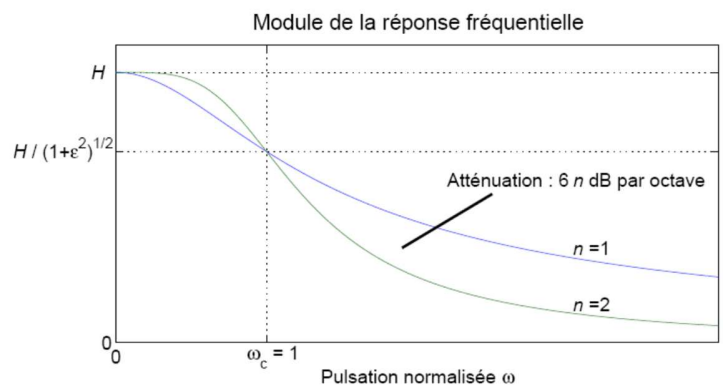
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

ω_c est la pulsations de coupure limites et ε est un paramètre de conception qui fixe la région de tolérance dans la bande passante $\delta_1 = 1/(1+\varepsilon^2)^{1/2}$. Le filtre aura N pôles placés sur le cercle unité (à partie réelle négative).

L'ordre N est déterminé par la zone de transition ($\omega_a - \omega_p$) et les ondulations permises en bande passante (A_p) et bande atténuée (A_a) :

$$N \geq \frac{\log\left(\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right) / \left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right)\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)} = \frac{\log\left(\sqrt{\left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right) / \left(\frac{1}{\delta_1^2} - 1\right)}\right)}{\log(\omega_a / \omega_p)}$$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$p^2 + \sqrt{2}p + 1$
3	$(p^2 + p + 1)(p + 1)$
4	$(p^2 + 1.8477p + 1)(p^2 + 0.7653p + 1)$
5	$(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)(p + 1)$
6	$(p^2 + 1.9318p + 1)(p^2 + \sqrt{2}p + 1)(p^2 + 0.5176p + 1)$



2. Un filtre de Tchebychev est caractérisé généralement par une ondulation équilibrée dans la bande coupée. La forme analytique du module de réponse fréquentielle d'un filtre analogique de Tchebychev (ou Chebyshev) d'ordre N est donnée par :

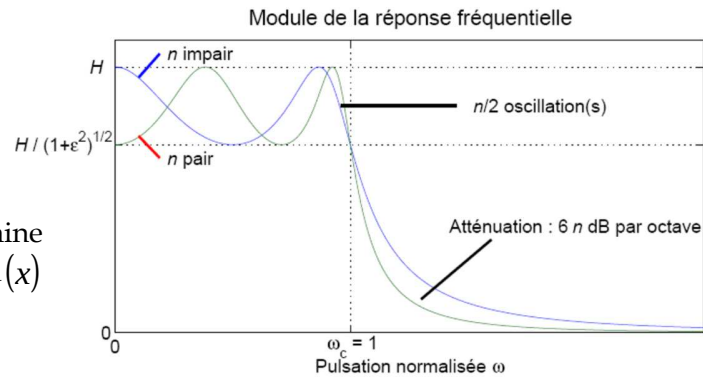
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

Où ε est un paramètre réel inférieur à l'unité qui détermine l'amplitude des oscillations dans la bande passante et où $T_N(x)$ est le polynôme de Tchebychev d'ordre N, définie par :

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)] & \text{pour } 0 \leq |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arccosh}(x)] & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$

L'ordre N est déterminé par la zone de transition ($\omega_a - \omega_p$) et les ondulations permises en bande passante $A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$ et bande atténuée ($A_a = -\log \delta_2$)

$$N \geq \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{10^{\frac{A_a}{10}}} - 1}{\sqrt{10^{\frac{A_p}{10}}} - 1} \right)}{\operatorname{arccosh}(\omega_a / \omega_p)} = \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1}}{\sqrt{\frac{1}{\delta_1^2} - 1}} \right)}{\operatorname{arccosh}(\omega_a / \omega_p)}$$



Dans la pratique, on utilise trois valeurs d'ondulation, $\varepsilon = 0.1$ dB, 0.5 dB et 1 dB. Pour ces 3 valeurs $H_N(p)$ est donnée :

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.3017 p^2 + 0.7158 p + 1$
3	$(0.5918 p^2 + 0.5736 p + 1)(1.031 p + 1)$
4	$(0.7518 p^2 + 0.3972 p + 1)(1.6053 p^2 + 2.0475 p + 1)$
5	$(0.8368 p^2 + 0.2787 p + 1)(1.5725 p^2 + 1.3712 p + 1)(1.855 p + 1)$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.6595 p^2 + 0.9402 p + 1$
3	$(0.8753 p^2 + 0.5483 p + 1)(1.596 p + 1)$
4	$(0.9402 p^2 + 0.3297 p + 1)(2.8057 p^2 + 2.3755 p + 1)$
5	$(2.0974 p^2 + 1.2296 p + 1)(0.9654 p^2 + 0.2161 p + 1)(2.759 p + 1)$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.9070 p^2 + 0.9956 p + 1$
3	$(1.0058 p^2 + 0.497 p + 1)(2.023 p + 1)$
4	$(1.0136 p^2 + 0.2828 p + 1)(3.5791 p^2 + 2.4113 p + 1)$
5	$(2.3293 p^2 + 1.0911 p + 1)(1.0118 p^2 + 0.1610 p + 1)(3.454 p + 1)$

On rappelle que les fonctions de transfert $H_N(p)$ des filtres analogiques polynômiaux (Butterworth, Tchebychev, Bessel, Caer, etc.) sont données pour des fréquences de coupure normalisées et uniquement pour des filtres passe-bas [2].

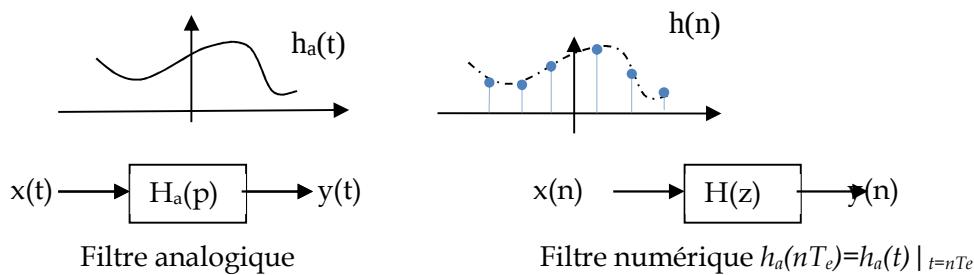
				Pulsation Centrale	Largeur de Bande
Passe-bas	$p = p / \omega_A$	Passe-bande	$p = (p^2 + \omega_{A1} \omega_{A2}) / ((\omega_{A2} - \omega_{A1}) p)$	$\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$	$B = (\omega_{A2} - \omega_{A1}) / \omega_A$
Passe-haut	$p = \omega_A / p$	Coupe-bande	$p = ((\omega_{A2} - \omega_{A1}) p) / (p^2 + \omega_{A1} \omega_{A2})$	$\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$	$B = (\omega_{A2} - \omega_{A1}) / \omega_A$

A partir de l'expression de $H_N(p)$ normalisée, on dénormalise en remplaçant p par les valeurs données au tableau précédent permettant d'aboutir à une fonction de transfert dénormalisée $H(p)$.

3. Méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle

La méthode de l'invariance impulsionnelle consiste à effectuer la synthèse d'un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ est l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre analogique équivalent [18] :

- on détermine la réponse impulsionnelle désirée $h_a(t)$ d'un filtre analogique connu.
- on échantillonne cette réponse impulsionnelle à la fréquence f_e et on en déduit la suite $h(n)$.
- on recherche la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique qui a pour réponse impulsionnelle la suite $h(n)$.



Rappelons toutefois que l'échantillonnage temporel se traduit par une périodisation en fréquence telle que :

$$X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e) \text{ Pour compenser la multiplication par } f_e, \text{ on prendre } h(n) = T_e h_a(nT_e)$$

Pour obtenir $h(n)$, on peut opérer de 2 manières:

$$H_a(p) \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{t=nT_e} h(n) = T_e h_a(nT_e) \xrightarrow{TZ} H(z) \quad \text{ou} \quad H(z) = T_e \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } H_a(p)} \text{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \right) \Bigg|_{p=p_i}$$

Exemple 1

On veut synthétiser un filtre numérique qui possède la même réponse impulsionnelle qu'un filtre passe-bas analogique du 1er ordre de transmittance normalisée: $H_N(p) = \frac{1}{(1+p)}$

$$\text{On commence par dénormaliser } H_a(p) = H_N(p) \Big|_{p=p/\omega_c} = \frac{1}{1+(p/\omega_c)} = \frac{\omega_c}{\omega_c + p}$$

La réponse impulsionnelle est alors : $h_a(t) = \omega_c e^{-\omega_c t}$ pour $t \geq 0$

$$\Rightarrow h(n) = T_e \omega_c e^{-nT_e \omega_c} \text{ pour } n \geq 0 \Rightarrow H(z) = T_e \omega_c \frac{1}{1 - e^{-T_e \omega_c} z^{-1}} = T_e \omega_c \frac{z}{z - e^{-T_e \omega_c}}$$

Il s'avère qu'il y a égalité entre les 2 réponses à un coefficient K près, on posera donc : $H(z) = K T_e \omega_c \frac{1}{1 - e^{-T_e \omega_c} z^{-1}}$

Sachant que $p = 2\pi j f$, pour $f=0$, $H_a(0)=1$ et $z = e^{2\pi j f T_e}$, pour $f=0$, $H(0) = K T_e \omega_c / (1 - e^{-T_e \omega_c}) \Rightarrow H(z) = \frac{1 - e^{-T_e / \tau}}{1 - e^{-T_e / \tau} z^{-1}}$

Remarque : La réponse du filtre numérique sera proche de celle du filtre analogique dans la bande $[-f_c/2, f_c/2]$ si le filtre analogique a une réponse fréquentielle nulle en dehors de cette bande. Cette méthode est utile seulement dans le cas de filtres analogiques à bande limitée.

En effet, cette méthode n'est applicable que si l'on est en mesure de définir une fréquence d'échantillonnage adéquate [19]. Pour cela, il faut que la réponse en fréquence du filtre continu soit nulle (ou presque) au-delà d'une certaine fréquence de valeur finie. Cette méthode ne peut donc s'appliquer aux filtres de types passe haut ou coupe-bande (f_{max} est ∞ donc on ne peut définir $f_e > 2f_{max}$).

Exemple 2

On considère le filtre analogique d'ordre 3 associé à la fonction d'approximation de Butterworth. Réaliser le filtre numérique passe-bas correspondant en utilisant la méthode de l'invariance impulsionnelle. La fréquence de coupure est $f_c = 1$ kHz et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 10$ kHz.

Rappelons que le filtre de Butterworth d'ordre 3 est formé de 2 cellules d'ordre 1 et 2, respectivement :

$$H_N(p) = \frac{1}{(1+p)(1+p+p^2)} \text{ alors } H(p) = \frac{1}{(1+p/\omega_c)(1+p/\omega_c + (p/\omega_c)^2)}$$

Pour éviter de décomposer en éléments simple, on peut calculer $H(z)$ en utilisant les relations entre transformées de Laplace et en z pour les systèmes du premier et du second ordres.

$H(p)$	$T_e H(z)$
$\frac{1}{p+a}$	$T_e \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$T_e \frac{1 - e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e} z^{-2}}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$T_e \frac{e^{-aT_e} z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e} z^{-2}}$

A cette fin, on décompose alors $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = \frac{A}{(\omega_c + p)} + \frac{Bp + C}{(\omega_c^2 + \omega_c p + p^2)}$$

Par identification, on trouve $C=0$, $A=-B=\omega_c \Rightarrow H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \frac{\omega_c p}{(\omega_c^2 + \omega_c p + p^2)}$

Les pôles de ce filtre analogique sont $p_1 = -\omega_c = -2000\pi$ $p_{2,3} = -\omega_c \frac{1 \pm \sqrt{3}j}{2} = -1000\pi(1 \pm \sqrt{3}j) = -\alpha \pm j\omega_o$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \frac{\omega_c p}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}} = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \omega_c \frac{p + \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \omega_c \frac{p + \frac{\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}} + \frac{\omega_c}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}}$$

En se servant du tableau donné, on peut alors déterminer $H(z)$:

$$H(z) = T_e \omega_c \frac{1}{1 - e^{-\omega_c T_e} z^{-1}} - T_e \omega_c \frac{1 - e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1}}{1 - 2e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1} + e^{-\pi/5} z^{-2}} + T_e \omega_c \frac{e^{-\pi/10} \sin(\pi\sqrt{3}/10)}{1 - 2e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1} + e^{-\pi/5} z^{-2}}$$

Ce qui nous donne :

$$H(z) = \pi/10 \frac{1}{1 - 0.5335z^{-1}} - \pi/10 \frac{(1 - 0.625z^{-1})}{1 - 1.25z^{-1} + 0.5335z^{-2}} + \pi/10 \frac{0.218}{1 - 1.25z^{-1} + 0.5335z^{-2}}$$

$$H(z) = \pi/10 \left(\frac{1}{1 - 0.5335z^{-1}} - \frac{0.781 - 0.625z^{-1}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.5335z^{-2}} \right)$$

Il reste à déterminer le gain K en adaptant les gains des deux filtres analogique et numérique pour une fréquence donnée. Comme il s'agit d'un filtre passe-bas, on supposera l'égalité pour $f=0$ ($p=0$ et $z=1$)

4. Méthode de la transformation bilinéaire

Cette méthode a pour objectif de faire coïncider au mieux les domaines analogique et numérique. Les filtres qui en sont dérivés sont plus stables que sont obtenus à travers l'emploi de la méthode de la variance impulsionnelle. Mais, en contrepartie, elle introduit une distorsion sur l'axe des fréquences.

On sait qu'un filtre analogique est caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ et un filtre numérique est défini par sa fonction de transfert $H(z)$ avec $z = e^{2\pi j f T_e} = e^{p T_e}$. Ce qui implique que $p = \ln(z)/T_e$. Dans les deux cas, cette transformation entraîne une relation non linéaire entre les fréquences f_A du domaine analogique et les fréquences f_N du domaine numérique.

Pour conserver le caractère polynomial des fonctions de transfert, une approximation de la dérivée par développement limité de z autour de $z=1$ est déterminée par transformation bilinéaire [11].

$$\ln(z) \approx 2 \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + \dots$$

En ne conservant que les termes du premier ordre, on trouve : $p = \frac{\ln(z)}{T_e} \approx \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z - 1}{z + 1}$

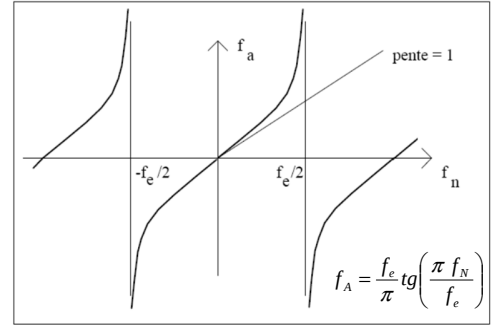
Sachant que

$$p = j\omega_A = \frac{\ln(z)}{T_e} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_N T_e} - 1}{e^{j\omega_N T_e} + 1} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_N T_e/2} (e^{j\omega_N T_e/2} - e^{-j\omega_N T_e/2})}{e^{j\omega_N T_e/2} (e^{j\omega_N T_e/2} + e^{-j\omega_N T_e/2})} = \frac{2}{T_e} \frac{j \sin(\omega_N T_e/2)}{\cos(\omega_N T_e/2)}$$

Ainsi, on peut montrer qu'on obtient la correspondance entre fréquence analogique f_A (ou pulsation ω_A) et la fréquence numérique f_N (ou ω_N) par :

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$$

Cette équation montre qu'il n'y a pas égalité entre pulsation analogique et pulsation discrète et que la relation les liant n'est pas non plus linéaire puisqu'il y a distorsion des fréquences, y compris du retard de groupe.



Pour faire la synthèse d'un filtre numérique par la transformation bilinéaire, on procède comme suit :

- On définit les caractéristiques souhaitées du filtre numérique (fréquence d'échantillonnage, de coupure, etc.)
- On calcule les pulsations analogiques ω_A correspondant aux pulsations numériques $\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$
- On détermine le gabarit du filtre analogique $H_N(p)$ normalisée d'ordre n (Chebyshev, Butterworth, etc.) qui servira de modèle au filtre numérique et on écrit la fonction de transfert dénormalisée $H(p)$ de ce filtre analogique (qu'il faut recalculer en fonction de ω_A).
- On applique la transformation bilinéaire à $H(p)$ en remplaçant $p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, ce qui donne la fonction $H(z)$.

Exemple 1

On désire concevoir un filtre passe-bas numérique de premier ordre à partir d'une fonction de transfert d'un filtre RC dans le domaine continu ($H_N(p)=1/(1+p)$). La fréquence de coupure désirée est $f_N=30$ Hz et la fréquence d'échantillonnage est $f_e=150$ Hz.

$$\text{On calcule d'abord } \omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2}{T_e} 0.7265 \text{ puis } H(p) = \frac{1}{(1+p)} \Big|_{p=p/\omega_A} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{p + \frac{2}{T_e} 0.7265}$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{2}{T_e} 0.7265} = \frac{0.7265(z+1)}{(z-1) + 0.7265(z+1)} = \frac{0.7265(z+1)}{1.7265z - 0.2735}$$

$$\text{On peut remarquer que } f_A = \frac{2}{T_e (2\pi)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{f_e}{\pi} 0.7265 = 34.69 \neq f_N = 30$$

Exemple 2 : On désire réaliser un filtre numérique passe-bas du second ordre avec les caractéristiques suivantes [18]: fréquence de coupure $f_N = 500$ Hz (gain de 1), fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ kHz,

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{2}{T_e} 0.325$$

$$H_N(p) = \frac{0.1075p}{p^2 + 0.1075p + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{0.1075p\omega_A}{p^2 + 0.1075p\omega_A + \omega_A^2} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.035p}{p^2 + \frac{2}{T_e} 0.035p + \frac{4}{T_e^2} 0.1056}$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.035 \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{2}{T_e} 0.035 \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{4}{T_e^2} 0.1056} = \frac{0.035 \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0.035 \frac{z-1}{z+1} + 0.1056}$$

$$H(z) = \frac{0.035(z-1)(z+1)}{(z-1)^2 + 0.035(z-1)(z+1) + 0.1056(z+1)^2} = \frac{0.035(z^2 - 1)}{1.14z^2 - 1.7888z + 1.0706}$$

Pour un filtre numérique passe-bas ou passe-haut, on peut déterminer $H(z)$ directement à partir de $H_N(p)$ en utilisant la pulsation normalisée $\Omega_c = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$ et remplacer p dans $H_N(p)$ comme suit:

- pour un passe-bas par $p = \frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}$ soit $H(z) = H_N(p) \Big|_{p=\frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}}$

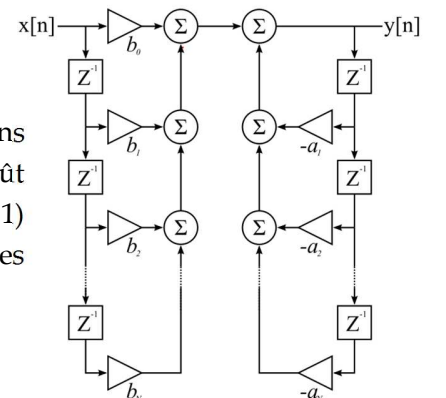
- pour un passe-haut par $p = \Omega_c \frac{z+1}{z-1}$ soit $H(z) = H_N(p) \Big|_{p=\Omega_c \frac{z+1}{z-1}}$

- pour un passe bande ou un rejeteur de bande, la détermination de ω_A s'obtient par la pulsation centrale $\omega_A = \sqrt{\omega_{A1}\omega_{A2}}$

Remarque : Puisqu'il n'est pas possible de faire coïncider précisément la réponse fréquentielle du filtre analogique (sur $[0, +\infty[$ et numérique (sur $[0, f_e/2]$) la transformation bilinéaire aura pour objet de faire coïncider au mieux les deux réponses. Cette méthode donne d'assez bons résultats à condition que les fréquences caractéristiques ne soient pas trop proches de la demi-fréquence d'échantillonnage.

5. Réalisation du filtre RII

Un filtre RII nécessite $(2N+1)$ opérations de multiplication, $2N$ opérations d'addition pour chaque nouvel échantillon à filtrer ou $(2N+1)$ MAC. Le coût mémoire d'un filtre RII en structure directe est de $(4N+3)$ mémoire $[(2N+1)$ coefficients b_i et $2(N+1)$ points mémoire ou retard pour les vecteurs des entrées $x(n)$ et des sorties $y(n)$ [9].



Série 5

Exercice 1 : Déterminer, grâce à la position des pôles et des zéros, la fonction de transfert, les coefficients du filtre et l'équation de récurrence d'un filtre numérique passe-bande qui a les caractéristiques suivantes :

- Fréquence centrale du passe-bande : 125 Hz
- Largeur de bande à 3 dB : ± 10 Hz
- Fréquence d'échantillonnage : 500 Hz

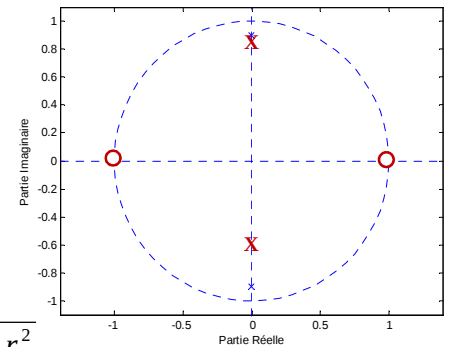
Solution

- Passe bande $\Rightarrow$ Placer un zéro en 1 et un zéro en -1
- Calculer $\theta = (125/500) \times 360^\circ = 90^\circ$ et $r = 1 - (10/500) \times \pi \approx 0.937$

- Remplacer θ et r dans l'équation $H(z) = \frac{K(z-1)(z+1)}{(z - re^{-j\theta})(z - re^{j\theta})} = \frac{K(z^2 - 1)}{z^2 - 2r \cos \theta + r^2}$

$$H(z) = \frac{K(z^2 - 1)}{z^2 + 0.878} = \frac{K(1 - z^{-2})}{1 + 0.878z^{-2}} \text{ avec } K = \frac{|e^{2j\theta} - 2r \cos \theta e^{j\theta} + r^2|}{|e^{2j\theta} - 1|}$$

- $b_0=K \quad b_1=0 \quad b_2=-K \quad a_0=1 \quad a_1=0 \quad a_2=0.878$
- L'équation de récurrence est : $y(n) = K.x(n) - K.x(n-2) - 0.878y(n-2)$



Exercice 2 : On souhaite approcher un filtre idéal passe-haut de second ordre par un filtre à réponse impulsionnelle infinie, synthétisé par la méthode des pôles et des zéros. Ce filtre doit répondre aux spécifications suivantes

- Fréquence de coupure $f_c = 2$ kHz
 - Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 8$ kHz
 - Tracer $H(f)$ idéal
 - Donner l'expression théorique de $H(z)$
 - Placer les pôles et les zéros pour obtenir une approximation de $H(f)$
 - Déterminer l'expression mathématique exacte de $H(z)$ en déterminant K
 - Déterminer l'équation aux différences.
- Largeur de transition à 3db: $\Delta f = 240$ Hz

Exercice 3 : Considérer la fonction de transfert passe bas dénormalisée $H(p)$ suivant : $2.25/(p^2 + 0.3p + 2.25)$. Utiliser la méthode de l'invariance impulsionnelle puis celle des pôles et zéros pour transformer ce filtre en numérique.

Solution $p_{1,2} = -0.15 \pm j1.4925j \Rightarrow \alpha = -0.15, \omega_r = 1.4925 \Rightarrow$ pôles transposés $z_{1,2} = 0.0671 \pm j0.8574$

$$H(p) = \frac{2.25}{p^2 + 0.3p + 2.25} \xrightarrow{\text{pôles et zéros}} H(z) = \frac{K(z+1)^2}{z^2 - 0.1347z + 0.7408}$$

$$H(p) = \frac{2.25}{p^2 + 0.3p + 2.25} = 1.5075 \frac{1.4925}{(p + 0.15)^2 + 1.4925^2} \xrightarrow{\text{invariance impulsionnelle}} H(z) = \frac{1.292z}{z^2 - 0.1347z + 0.7408}$$

Remarque Dans le cas de la méthode de transposition des pôles et zéros, on peut renforcer le caractère passe-bas

en rajoutant un zéro en -1 soit $H(z) = \frac{1.292z(z+1)}{z^2 - 0.1347z + 0.7408}$

Exercice 4 : Considérer la fonction de transfert passe bas $H(p)$ dénormalisée suivante : $6/(p^2+5p+6)$. Utiliser la méthode de l'invariance impulsionnelle pour transformer ce filtre en numérique.

Solution
$$H_A(p) = \frac{6}{p+2} \frac{1}{p+3} = \frac{6}{p+2} + \frac{-6}{p+3} \Rightarrow h_a(t) = 6e^{-2t}U(t) - 6e^{-3t}U(t)$$

$$\Rightarrow h(n) = 6T_e e^{-2nT_e}U(n) - 6T_e e^{-3nT_e}U(n) \Rightarrow H(z) = \frac{6T_e}{1-e^{2T_e}z^{-1}} + \frac{-6T_e}{1-e^{3T_e}z^{-1}}$$

Exercice 5 : On considère le filtre passe-bas analogique normalisé à un pôle unique $H_N(p)=1/(p+1)$. On considère que la fréquence de coupure normalisée à -3db se produit pour $f_c=f_e/10$. Par transformation bilinéaire, trouver le filtre numérique passe-bas équivalent $H(z)$.

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{0.65}{T_e} \Rightarrow H(p) = H_N(p) \Big|_{p/\omega_A} = \frac{\omega_A}{p + \omega_A} = \frac{0.65/T_e}{p + 0.65/T_e}$$

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.65/T_e}{\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.65/T_e} = \frac{0.245(1+z^{-1})}{1-0.509z^{-1}}$$

Exercice 6: Soit la fonction de transfert passe bas dénormalisée $H(p)$ suivante : $(p+0.1)/((p+0.1)^2+\omega_a^2)$. Sachant que $\omega_a=4$, utiliser la méthode de la transformée bilinéaire pour transformer ce filtre en numérique. Le filtre numérique aura sa résonance pour $\omega_N = \pi/(2.T_e)$.

$$\omega_a = 4 = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow T_e = 0.5 \Rightarrow p = 4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1}{\left(4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1\right)^2 + 16} = \frac{0.125 + 0.006z^{-1} - 0.118z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} - 0.950z^{-2}}$$

Exercices supplémentaires

1. Au cours de la transmission d'un signal numérique (échantillonné à une fréquence de 5 kHz), il a été affecté d'un bruit sinusoïdal de fréquence $f_0=250$ Hz. On veut éliminer le bruit par l'emploi d'un filtre possédant une bande de transition $\Delta f=\pm 50$ Hz à -3db.

Concevoir un filtre RII de second ordre par placement des pôles et zéros

- Tracer $H(f)$ idéal
- Déterminer θ et R puis donner le racé des pôles et zéros
- Déterminer $H(z)$ et le gain K .
- Donner l'équation aux récurrences
- Citer un inconvénient des filtres RII de 1er ordre et de 2ème ordre

2. On considère le filtre analogique dénormalisé $H_a(p) = (p+0.1)/((p+0.1)^2+9)$. Par la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle, trouver le filtre numérique passe-bas équivalent $H(z)$.

Solution 3 pôles $p_1=-0.1$, $p_{2,3}=-0.1 \pm 3j$
$$H(z) = T_e \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } H_a(p)} \operatorname{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1-z^{-1}e^{pT_e}} \right) \Big|_{p=p_i}$$

$$H_A(p) = \frac{0.5}{p+0.1-3j} + \frac{0.5}{p+0.1+3j}$$

$$H(z) = \frac{0.5T_e}{1-e^{0.1T_e}e^{3jT_e}z^{-1}} + \frac{0.5T_e}{1-e^{0.1T_e}e^{-3jT_e}z^{-1}} = T_e \frac{1-e^{-0.1T_e}\cos(3T_e)z^{-1}}{1-2e^{-0.1T_e}\cos(3T_e)z^{-1}+e^{-0.2T_e}z^{-2}}$$

3. On considère le filtre analogique dénormalisé $H(p) = 1/[(1+p)(p+2)^2]$.

- Déterminer la réponse impulsionnelle

- Par la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle, trouver le filtre numérique équivalent $h(n)$.

$$H(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{-1}{(p+2)^2} + \frac{-1}{(p+2)} \Rightarrow h_a(t) = e^{-t}U(t) - te^{-2t}U(t) - e^{-2t}U(t)$$

$$h(n) = T_e h_a(nT_e) = T_e e^{-nT_e}U(n) - nT_e^2 e^{-2nT_e}U(n) - T_e e^{-2nT_e}U(n)$$

4. Soit à construire un filtre numérique passe-bas échantillonné à la fréquence $f_e = 4\text{kHz}$ par la méthode de l'invariance impulsionnelle. La fonction modèle est la réponse en fréquence d'un filtre passe-bas de type Butterworth du 2ème ordre dont la fréquence de coupure à -3dB est égale à 500Hz.

$$H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \Rightarrow H(p) = H_N(p)|_{p=p/\omega_c} = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2} = \frac{\omega_c^2}{\left(p + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c\right)^2 + \frac{\omega_c^2}{2}} = \frac{\omega_c^2}{\left(p + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_c\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}\omega_c \frac{\omega_c/\sqrt{2}}{\left(p + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_c\right)^2 + \left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$H(z) = T_e \frac{\sqrt{2}\omega_c z^{-1} \sin(\omega_c T_e / \sqrt{2}) e^{-\omega_c T_e / \sqrt{2}}}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_c T_e / \sqrt{2}) e^{-\omega_c T_e / \sqrt{2}} + z^{-2} e^{-2\omega_c T_e / \sqrt{2}}} \quad \omega_c T_e = \pi/4 \Rightarrow \omega_c T_e / \sqrt{2} = 0.555$$

$$H(z) = T_e \frac{\sqrt{2}\omega_c z^{-1} \sin(\omega_c T_e / \sqrt{2}) e^{-\omega_c T_e / \sqrt{2}}}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_c T_e / \sqrt{2}) e^{-\omega_c T_e / \sqrt{2}} + z^{-2} e^{-2\omega_c T_e / \sqrt{2}}} = \frac{0.336z^{-1}}{1 - 0.775z^{-1} + 0.308z^{-2}}$$

5. On considère le filtre analogique d'ordre 3 associé à la fonction d'approximation de Butterworth. Réaliser le filtre numérique passe-bas correspondant en utilisant la transformation bilinéaire. La fréquence de coupure est $f_c = 1\text{ kHz}$ et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 10\text{ kHz}$.

$$H_N(p) = \frac{1}{(1+p)(1+p+p^2)} \Rightarrow H(p) = H_N(p)|_{p=p/\omega_c} = \frac{1}{(1+p/\omega_c)(1+p/\omega_c + (p/\omega_c)^2)}$$

$$\omega_c = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{2 \cdot 0.325}{T_e} \quad H(z) = H(p)|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z) = \frac{0.034(z+1)^3}{(1.325z - 0.675)(1.43z^2 - 1.79z + 0.78)}$$

$$\text{Remarque : } H(z) = H_N(p)|_{p=\frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}} = H_N(p)|_{p=\frac{1}{0.325} \frac{z-1}{z+1}}$$

6. En employant un filtre de Butterworth passe-bas de second ordre, concevoir un filtre numérique correspondant (passe-bas) en utilisant la transformation bilinéaire. La fréquence de coupure est $f_c = 100\text{ kHz}$ et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\text{ kHz}$.

$$\omega_a = \frac{2}{T_e} 0.325 \text{ rad/s} \quad H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \Rightarrow H(z) = H_N(p)|_{p=p/\omega_c} = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2}$$

$$H(z) = H(p)|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.1056(z+1)^2}{1.65z^2 - 1.8z + 0.65}$$

7. On cherche à réaliser un filtre numérique équivalent au filtre analogique dénormalisé de transmittance :

$$H_A(p) = \frac{1}{1 + 0.2p}$$

-
- Déterminer la réponse impulsionnelle $h_a(t)$
- Calculer la réponse en z de ce filtre obtenue par transformation bilinéaire pour une fréquence d'échantillonnage $T_e = 0.2$.
- Quelle est sa fréquence de coupure ?
- Calculer la réponse en z d'un filtre similaire de même fréquence de coupure que le filtre analogique.

8. En employant un filtre de Butterworth passe-bas de second ordre, concevoir un filtre numérique correspondant (passe-bas) en utilisant la transformation bilinéaire. La fréquence de coupure est $f_c = 200$ Hz et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1$ kHz.

$$H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

1. Déterminer $H(z)$
2. Etablir le tracé des pôles et zéros
3. Comparer les fréquences analogiques et numériques pour $f_c = 200$ Hz et $f_c = 400$ Hz
4. Si $f_c = 400$ Hz, quel problème cela posera-t-il ?
5. Quelle méthode alors utiliser ? Quel est son inconvénient ?

$$\omega_a = \frac{2}{T_e} 0.7265 \text{ rad/s} \quad H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \Rightarrow H(z) = H_N(p) \Big|_{p=p/\omega_c} = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2}$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.2066(z+1)^2}{z^2 - 0.37z + 0.196}$$

TP n°5: Conception des filtres RII

But du TP : Dans ce TP, on synthétisera un filtre RII par la méthode des pôles et zéros puis par la méthode de l'invariance impulsionnelle et enfin par transformation bilinéaire en utilisant des filtres analogiques (Chebychev et Butterworth).

Rappels sur les filtres RII

Les filtres RII n'auront pas une phase linéaire (phase linéaire : temps de propagation constant pour toute fréquence). L'intérêt des filtres récurrents (RII) est leur faible coût en calcul. Les inconvénients des filtres récurrents sont : leur non-linéarité en phase, et leur instabilité numérique. Avec très peu de pôles et zéros on peut assurer la plupart des réponses fréquentielles dont on peut avoir besoin dans les applications audio. Cependant, le filtre étant rétroactif, les erreurs de précision numérique deviennent une question d'importance, car il peut s'amplifier et devenir hors contrôle, d'abord dans la forme de bruit, mais éventuellement dans la forme d'instabilité. Mais, les filtres RII peuvent être conçus par des méthodes semblables à celles utilisées pour les filtres analogiques.

1. Synthèse d'un filtre numérique par placement des pôles et zéros

Il s'agit de déterminer, grâce à la position des pôles et des zéros, la fonction de transfert, les coefficients d'un filtre et l'équation de récurrence d'un filtre numérique coupe-bande de second ordre qui a les caractéristiques suivantes :

- Fréquence à rejeter : 125 Hz
- Largeur de bande à 3 dB : ± 10 Hz
- Fréquence d'échantillonnage : 500 Hz

```
clear all; clc; close all;
fe=500; df=10; fc=125;
teta=360*fc/fe; tet=2*pi*fc/fe; R=1-df*pi/fe;
K=(exp(2*j*teta)-2*R*cos(teta)*exp(j*teta)+R*R)/(exp(2*j*teta)-1); K=abs(K);
a=[1 -2*R*cos(tet) R*R]; b=K*[1 0 -1];
dirac=[1; zeros(99,1)]; h=filter(b,a,dirac);
[H F] = freqz(b, a, 512, fe); [tau,f]=grpdelay(b,a,512,fe);
figure; subplot(2,2,1);hold on;plot(h,'red');
subplot(2,2,2);hold on; plot(F,abs(H),'red');
subplot(2,2,3);hold on; zplane(b,a);
subplot(2,2,4);hold on;plot(f,tau,'red');
```

1. Quelle est la nature de la bande passante créée
2. Modifier ce programme pour en faire un coupe-bande et commenter les graphes obtenus.
3. Reprendre ce programme pour filtrer le signal *ecg* ($f_e=500$ Hz et bruit à 50 Hz.).
 - Visualiser les TFD du signal avant et après filtrage.
 - Comparer avec la méthode de fenêtres (TP n°4), laquelle vous semble préférable (justifier)?

2. Synthèse d'un filtre numérique par transformation d'un filtre analogique

Pour déterminer les coefficients du filtre RII, il suffit de synthétiser chaque filtre en continu $H(p)$ puis de passer à $H(z)$ soit par transformation bilinéaire ou par invariance impulsionnelle

On veut, par exemple, synthétiser un filtre passe-bas avec les spécifications suivantes : $f_e=3000\text{Hz}$; $f_p=500\text{Hz}$ et une oscillation en bande passante $\delta_1 < 3\text{ dB}$ et une atténuation en bande atténuée $\delta_2 > 40\text{ dB}$.

I. On commence par choisir un filtre analogique normalisé $H_n(p)$ (en continu) d'ordre N puis on le dénormalise pour créer $H(p)$ continu. Ensuite, on utilise une des méthodes de transformation permettant trouver les paramètres du filtre numérique

```
clc; clear all; close all;

Fe=3000;fp=500; att_p=3; att_a=40; N=10;
wp=fp*2*pi; %transformation des fréquences en pulsations

%Création d'un filtre analogique normalisé (wc=1) passe-bas Hn(p) d'ordre N
[z,p,k] = cheb1ap(N,att_p); %cheb2ap(N,att_a); %ellipap(N,att_p,att_a) %besselap(N); %butterap(N);

%Dénormalisation passage de Hn(p) vers H(p)
[Bpn,Apn] = zp2tf(z,p,k);
[Bp,Ap] = lp2lp(Bpn,Apn,wp); %lp2hp %lp2bp %lp2bs

% Détermination du filtre numérique
[Bn,An] =impinvar(Bp,Ap,Fe);
figure; subplot(121); zplane(1,Ap); subplot(122); zplane(1,An);

% Calcul de la réponse impulsionnelle analogique et numérique
[r,p,k]=residue(Bp,Ap); t=0:1/(5*Fe):.02; ha=exp(t*(p.'))*r;
hn=filter(Bn,An,[1;zeros(49,1)]);
figure; subplot(1,2,1);plot(t,ha);hold on; stem(0:1/Fe:49/Fe, Fe*hn,'r.')

% Détermination de Ha(f) et H(f)
[Ha,W]=freqs(Bp,Ap,2*pi*(1:20:Fe/2)); [H,f]=freqz(Bn,An, 1:20:Fe/2,Fe);
subplot(1,2,2);plot(W/(2*pi),abs(Ha));hold on; stem(f,abs(H),'r.')
```

1. Que contiennent z , p et k , B_{pn}, A_{pn} , B_p, A_p ?
2. A partir du tracé des pôles, étudier la stabilité des 2 filtres.
3. Aidez vous du help pour expliquer les instructions `zp2tf(z,p,k)`; `lp2lp(Bpn,Apn,wp)`;
`[r,p,k]=residue(Bp,Ap)`; `t=0:1/(5*Fe):.02`; `ha=exp(t*(p.'))*r`; `freqs(N,D,2*pi*(1:20:Fe/2))`;
`plot(W/(2*pi),abs(Ha))`; `Fe*hn`
4. Commenter les réponses impulsionnelles et fréquentielles
5. Quelles sont les caractéristiques du filtre de Chebychev (avantage et inconvénient)
6. Que se passe-t-il si on augmente N ?
7. Tester les autres filtres analogiques et commenter les différences (oscillations, Δf , etc.).
8. Que faut-il modifier pour en faire un passe-haut? Quel est l'inconvénient principal de l'approche par invariance impulsionnelle?

II. On veut refaire le même travail en employant la transformation bilinéaire

```
[Bn,An] = bilinear(Bp,Ap,Fe,fp);
```

9. Comparer les 2 méthodes lorsque f_p est proche de la demi-fréquence d'échantillonnage $f_e/2$.
10. Tester la fonction `cheb1ord`

Références

- [1] F. Cottet. Aide-mémoire Traitement du Signal. Dunod, Paris, 2005.
- [2] L. Lecornu D. Le Roux. Mts 201 A Signaux Numeriques Telecom Bretagne
- [3] O. Français. Théorie de l'échantillonnage et de la quantification. ESIEE.
- [4]. Maurice Charbit, Gérard Blanchet. Eléments de base pour le Traitement Numérique du Signal et de l'Image. Telecom Paris.
- [5] https://moodle.insa-rouen.fr/pluginfile.php/6997/mod_resource/content/0/cours7.pdf
- [6] <http://chamilo2.grenet.fr/inp/courses/ENSE32A4EMAAAK0/document/html/toc1.htm>
- [7] <http://www.groupe.polymtl.ca/ele2700/TP/seance3-TP2-HIVER-2015.pdf>
- [8] Alexandre Renaux. Traitement Numérique Des Signaux. IFIPS / Université Paris Sud Orsay
- [9] Olivier Sentieys. Signaux et Systèmes Discrets. ENSSAT - Université de Rennes 1.
- [10] J.L. Zarader. Cours de Traitement du Signal. Ecole Polytechnique Universitaire de Paris
- [11] M. Friel. Cours Traitement Numérique du Signal. ENSICAEN.
- [12] C. Doignon. Traitement Numérique du Signal Déterministe. Université Louis Pasteur de Strasbourg
- [13] <http://fr.audiofanzine.com/techniques-du-son/forums/t.392548,plug-ins-d-eq-sonnent-ils-differemment-pourquoi,p.18.html>
- [14] http://perso.iut-nimes.fr/flouchet/syst%20ech/T_en_z.pdf
- [15] <http://pageperso.univ-lr.fr/pierre.courtellemont/TD4.pdf>
- [16] https://perso.univ-rennes1.fr/laurent.albera/alberasiteweb/cours/tp_filtrage.pdf
- [17] Joel Leroux. Techniques numériques pour le traitement du signal. Polytech, Nice-Sofia.
- [18] http://www.eaeeie.org/sites/all/themes/eaeeie/tnprojects/theiere_signal/theiere_signal_fr/frame.htm
- [19] J. Prado, G. Blanchet. Méthodes Numérique pour le traitement du signal.