

Nom..... Prénom..... Matricule.....

Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits

Exercice1 : Entourer lisiblement la ou les bonne(s) réponse(s)

+1 si réponse complète juste, +0.5 si réponse incomplète, 0 si une erreur ou pas de réponse

1-Le signal $x(t)=A.\sin(2.\pi.f_0.t)$, $A>0$, $f_0>0$ possède :

- ☒ a) une énergie totale infinie
- ☐ b) une énergie totale finie
- ☐ c) une puissance totale nulle
- ☒ d) un spectre s'annulant en $f=0$ (ou $n=0$)
- ☐ e) aucune des réponses précédentes ne convient

2-Le spectre d'un signal continu périodique réel est :

- ☐ a) continu et périodique
- ☒ b) discret
- ☒ c) de module pair
- ☐ d) de module impair
- ☐ e) aucune des réponses précédentes ne convient

3-Dans une série de Fourier, le termes au delà de $n=2$ terme ($a_3 \dots$ ou $c_3 \dots$) correspondent :

- ☐ a- aux repliements spectraux
- ☒ b- aux harmoniques
- ☒ c- aux multiples de la fréquence du signal
- ☐ d- au bruit du signal

4 - Un signal continu périodique dans le domaine temporel est ...

- ☐ a- continu et périodique dans le domaine fréquentiel
- ☒ b- discret dans le domaine fréquentiel
- ☐ c- réel et pair dans le domaine fréquentiel
- ☐ d- imaginaire impaire dans le domaine fréquentiel
- ☐ e- aucune des réponses précédentes ne convient

5 - Un signal réel possède une Transformée de Fourier :

- ☒ a- à partie réelle paire
- ☐ b- à partie réelle impaire
- ☐ c- à partie imaginaire paire
- ☒ d- à partie imaginaire impaire
- ☐ e- aucune des réponses précédentes ne convient

6- Un peigne de diracs dans le domaine temporel ...

- ☒ a- est également un peigne de diracs dans le domaine fréquentiel
- ☒ b- permet de réaliser l'opération d'échantillonnage par produit scalaire dans le domaine temporel
- ☒ c- permet de périodiser un signal temporel à support borné par convolution dans le domaine temporel
- ☐ d- permet de réaliser l'opération de fenêtrage du signal

Exercise 2: (4pts)

On considère un signal périodique $x_T(t)$

1. Montrer que sa fonction d'autocorrélation est $R_{xx}(t) = \sum_n |C_n|^2 e^{2\pi j n f_0 t}$
2. Déterminer sa densité spectrale de puissance.
3. Donner une condition sur les C_n permettant d'échantillonner ce signal en respectant la condition de Shannon

1° Pour un signal périodique $x_T(t) = \sum C_n e^{2\pi j n f_0 t}$

$$\begin{aligned} \text{On a } R_{xx}(t) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(\tau) x_T^*(\tau - t) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum C_n e^{2\pi j n f_0 \tau} \sum C_m^* e^{-2\pi j m f_0 (\tau - t)} d\tau \end{aligned}$$

$$\text{pour } m \neq n \Rightarrow R_{xx}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum C_n \sum C_m^* e^{2\pi j n f_0 (n-m)\tau} e^{2\pi j m f_0 t} d\tau$$

$$\begin{aligned} R_{xx}(t) &= \frac{1}{T} \sum C_n \sum C_m^* e^{2\pi j m f_0 t} \int_{-T/2}^{T/2} e^{2\pi j n f_0 (n-m)\tau} d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

}

$\int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\pi n f_0 \tau d\tau = 0$
 $\int_{-T/2}^{T/2} \sin 2\pi n f_0 \tau d\tau = 0$

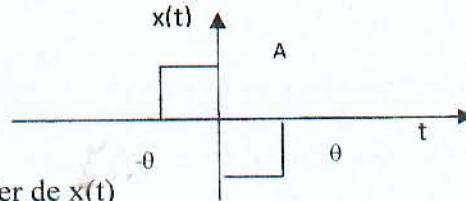
$$\begin{aligned} \text{pour } m = n \Rightarrow R_{xx}(t) &= \frac{1}{T} \sum |C_n|^2 e^{2\pi j n f_0 t} \int_{-T/2}^{T/2} 1 d\tau \\ &= \sum |C_n|^2 e^{2\pi j n f_0 t} \quad \checkmark \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ S_{xx}(f) &= \text{TF} \{ R_{xx}(t) \} = \text{TF} \left\{ \sum |C_n|^2 e^{2\pi j n f_0 t} \right\} \\ &= \sum |C_n|^2 \text{TF} \{ e^{2\pi j n f_0 t} \} \\ &= \sum |C_n|^2 \delta(f - n f_0) \end{aligned}$$

3° Il suffit qu'il existe $m > n$ tel que $C_m = 0, \forall m > n$

Exercice 3 (5 pts)

On considère le signal $x(t)$ suivant :



1. Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$
2. Soit $y(t) = \int x(u) du$. Tracer $y(t)$. Calculer $Y(f) = \text{TF}(y(t))$ en utilisant la propriété sur l'intégration.
3. Comment peut-on périodiser $x(t)$?
4. Donner l'expression du signal $x_T(t)$ obtenu par périodisation de $x(t)$.
5. Quelle est la TF de $x_T(t)$?

1° On a $x'(t) = A[\delta(t+\theta) + \delta(t-\theta)] - 2A\delta(t)$ 1 pt

TF $\{x'(t)\} = A[e^{j2\pi f\theta} + e^{-j2\pi f\theta}] - 2A$

2° $X(f) = \frac{A[e^{j2\pi f\theta} + e^{-j2\pi f\theta}] - 2A}{j2\pi f}$

3° $X(f) = \frac{2A(\cos 2\pi f\theta - 1)}{j2\pi f}$

$= \frac{2A}{j\pi f} \sin^2 \pi f\theta = 2A\pi f\theta^2 \text{sinc}^2(\pi f\theta)$

2° $y(t)$ is the integral of $x(t)$. It is a triangular pulse with height $A\theta$ at $t=0$ and base from $t=-\theta$ to $t=\theta$. 0.5

On a $y(f) = X(f) / j2\pi f$

$= \frac{2A\pi f\theta^2 \text{sinc}^2(\pi f\theta)}{j2\pi f}$

$= A\theta^2 \text{sinc}^2(\pi f\theta)$ 0.5

3° Pour périodiser $x(t)$, il suffit d'échantillonner $x(f)$ avec $f_e = 1/T_e = 1/\theta$ 1 pt

donner le signal obtenu par $T_e = T$ 3 $x_e(f) = \sum x(f - n f_e)$

4° $x(f)$ échantillonné $\Rightarrow x_e(f) = \sum x(f - n f_e)$ 1 pt

$x_e(t) = T_e \sum x(t - n T_e)$ on divise par $T_e \Rightarrow x_T(t) = \sum x(t - n T_e)$

$\Rightarrow x_T(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Pi\left(\frac{t + \theta/2}{\theta}\right) - \Pi\left(\frac{t - \theta/2}{\theta}\right) \right]$ 1 pt

5° $\text{TF}\{x_T(t)\} = \text{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - n T_e)\right\} = \text{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t - n T_e)\right\}$

$= \text{TF}\{x(t)\} \cdot \text{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n T_e)\right\} = X(f) \cdot \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_e)$

$= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n f_e) \delta(f - n f_e)$

$= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\theta^2 \text{sinc}^2(\pi n f_e \theta) \delta(f - n f_e)$ 1 pt

Exercice 4 (5 pts)

On considère le signal $x(t) = x^+(t) + x^-(t)$ défini comme suit :

$$x^+(t) = B \sin c(B\pi t) e^{2\pi j f_0 t} \quad \text{et} \quad x^-(t) = B \sin c(B\pi t) e^{-2\pi j f_0 t} \quad \text{avec } f_0 = 8 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad B = 1 \text{ kHz}$$

- Déterminer $X(f)$ la TF de $x(t)$ et représenter la graphiquement.
- Dans le cas d'un échantillonnage idéal, déterminer $X_e(f)$.
- Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale f_e .
- Pour $f_e = 6 \text{ kHz}$, représenter $X_e(f)$ entre $[-9 \text{ kHz}, 9 \text{ kHz}]$
- On désire restituer le signal $x(t)$ par le biais d'un filtre $h(t)$, donner dans chacun des cas : l'expression du signal restitué $x_R(t)$.

Cas 1 : $H(f) = \pi(f)$

Cas 2 : $h(t) = \pi(t)$

1° $x(t) = B \sin c(B\pi t) e^{2\pi j f_0 t} + B \sin c(B\pi t) e^{-2\pi j f_0 t}$

2° $X(f) = \frac{\pi}{B} (f - f_0) + \frac{\pi}{B} (f + f_0)$ 1 pt

2° Échantillonnage idéal $x_e(t) = \sum x(nT_e) \delta(t - nT_e)$

$\Rightarrow X_e(f) = f_e \sum X(f - n f_e) = f_e \sum \left(\frac{\pi}{B} (f - f_0 - n f_e) + \frac{\pi}{B} (f + f_0 - n f_e) \right)$ 3 pt

3° $f_{e \min} \geq 2 f_{\max} = 2 \times 8.5 = 17 \text{ kHz}$ 4 pt

4° $f_e = 6 \text{ kHz} < f_{e \min}$ $\Rightarrow$ Recouvrement

5° 1er cas

$$H(f) = \frac{\pi}{f_e} (f)$$

$f_e = 6 \text{ kHz} \Rightarrow X_R(f) = f_e \left[\frac{\pi}{B} (f - 2) + \frac{\pi}{B} (f + 2) \right]$

$\Rightarrow x_R(t) = 2 f_e B \sin c(B\pi t) \cos 4\pi t$

$f_e > f_{e \min}$

$\Rightarrow x_R(t) = 2 f_e B (\sin 9\pi t) \cos 2\pi f_0 t$ (f_0 = 8) 3 pt

2ème cas

$$h(t) = \frac{\pi}{T_e} (t) \Rightarrow x_R(t) = x_e(t) * \frac{\pi}{T_e} (t)$$

$\Rightarrow x_R(t) = \sum x(nT_e) \delta(t - nT_e) * \frac{\pi}{T_e} (t)$

$= \sum x(nT_e) \frac{\pi}{T_e} (t - nT_e)$

$\pi(t - nT_e)$ 3 pt