

Exercice 1 :/ 4.5A] Pour chacun des cas suivants, on désire choisir le fenêtrage adéquat permettant d'analyser le contenu fréquentiel ($f_e=1, N=20$):

1. $x(n)=2 \exp(2\pi j f_0 n) + \exp(2\pi j f_1 n)$ $f_0=0.3$ $f_1=0.36$

Fenêtre : Rectangulaire

Justification : $|f_1 - f_0| > \frac{L \Delta f}{2} \text{ Rect} = \frac{f_e}{N} = 0.05$

0.5

2. $x(n)=\exp(2\pi j f_0 n) + \exp(2\pi j f_1 n)$ $f_0=0.3$ $f_1=0.46$

Fenêtre : Blackman

Justification : $|f_1 - f_0| > \frac{L \Delta f}{2} \text{ Black} = \frac{3 f_e}{N} = 0.15$

0.5

3. $x(n)=2 \exp(2\pi j f_0 n) + 0.2 \exp(2\pi j f_1 n)$ $f_0=0.3$ $f_1=0.42$

Fenêtre : Hamming

Justification : $|f_1 - f_0| > \frac{L \Delta f}{2} \text{ Ham} = 0.1 \text{ et } 40 > 34$

0.5

B] On désire choisir, dans chacun des cas suivants, la meilleure approche de synthèse de filtres numériques RII

1. Filtre passe-haut ($f_c=200\text{Hz}$, $f_e=1\text{kHz}$), approche : Transformation bilinéaire

Justification : passe haut $\neq$ Invariance impulsionnelle, pôles-zéros sf + oss

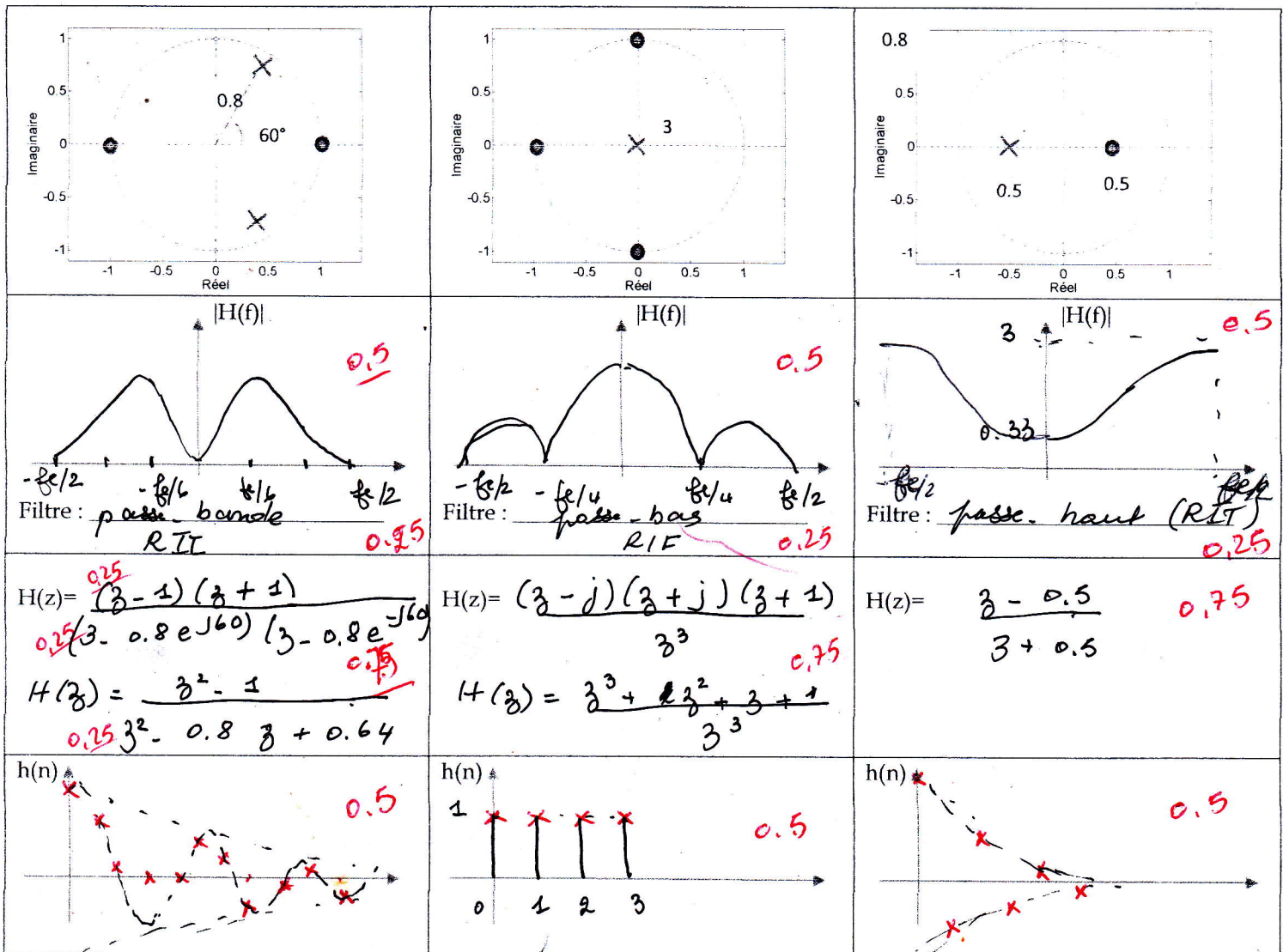
2. Filtre rejeteur ($f_c=400\text{Hz}$, $f_e=1\text{kHz}$), approche : pôles et zéros

Justification : Nbre de coeff = 5 < autres méthodes + pas d'oscillations1

3. Filtre passe-bas ($f_c=450\text{Hz}$, $f_e=1\text{kHz}$), approche : Invariance Impulsionnelle

Justification : f_c trop proche de $f_e/2$ $\Rightarrow$ distorsion (Transf. bilinéaire) + pôles et zéros sf + ossil1Exercice 2 :/ 6

On suppose les filtres représentés par le tracé des pôles et des zéros



Exercice 3 :/4.5

En employant un filtre de Butterworth passe-bas de second ordre, concevoir un filtre numérique correspondant passe-haut en utilisant la transformation bilinéaire. La fréquence de coupure désirée est $f_c = 250$ Hz et la fréquence d'échantillonnage f_e vaut 1kHz.

$$H_N(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

1. Déterminer $H(z)$

$$\omega_c = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_n T_e}{2} \right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi f_n}{2f_e} \right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cdot 250}{1000} \right) = \frac{2}{T_e} \quad 1$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p = \frac{\omega_c}{p}} = \frac{1}{\frac{\omega_c^2}{p^2} + \sqrt{2} \frac{\omega_c}{p} + 1} = \frac{p^2}{\omega_c^2 + \sqrt{2} \omega_c p + p^2} \quad 1$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{(2/T_e)^2 (z-1)^2 / (z+1)^2}{(2/T_e)^2 + \sqrt{2} \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \left(\frac{2}{T_e} \right)^2 \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}$$

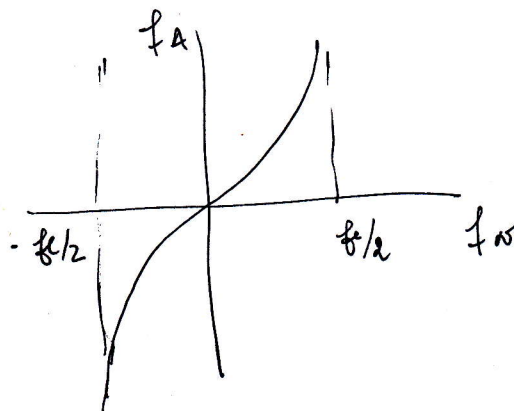
$$= \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2 + \sqrt{2} (z+1)(z-1) + (z-1)^2}$$

$$= \frac{(z-1)^2}{(2 + \sqrt{2})z^2 + (2 + \sqrt{2})} \quad 1$$

2. Calculer la fréquence de coupure analogique et justifier la différence avec celle numérique.

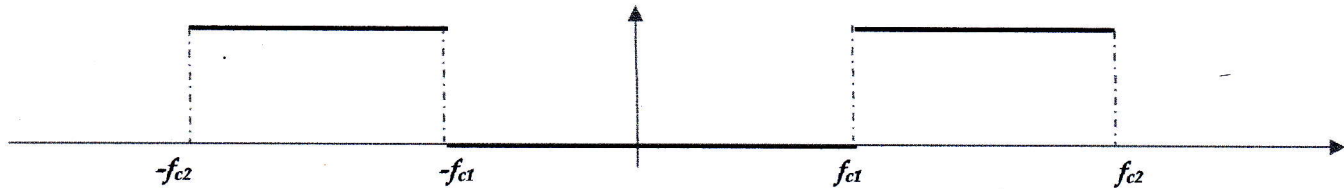
$$\omega_A = 2\pi f_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi f_n}{f_e} \right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow f_A = \frac{f_e}{\pi} \approx 318 \text{ Hz} \quad 0.5$$

distorsion de l'axe des fréquences due à la non linéarité (tg) liant les fréquences numériques et analogiques



Exercice 4 :/5

On suppose le filtre $h(n)$ dont le module du spectre $H(f)$ est donné ci-dessous :

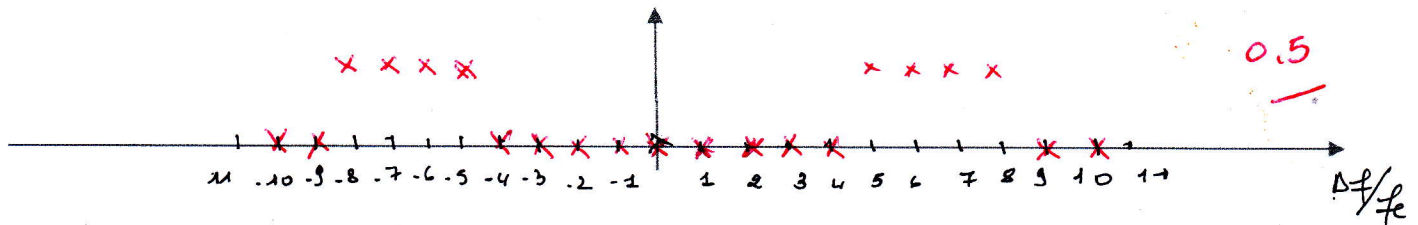


On veut déterminer le filtre numérique $h(n)$ équivalent par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel. Le filtre doit répondre aux spécifications suivantes $f_{c1} = f_e/5$, $f_{c2} = 2f_{c1}$ et une largeur de transition $\Delta f < f_e/20$. Prendre $f_e = 4,2 \text{ KHz}$

1. Déterminer N , Δf puis $H(k)$ et donner son tracé

$$\Delta f < f_e/20 \Rightarrow N = 21 \Rightarrow \Delta f = f_e/21 = 200 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(0) = H(1) = H(-1) = \dots = H(10) = H(-10) = 0 \\ H(5) = H(-5) = \dots = H(8) = H(-8) = 1 \end{cases}$$



2. Déterminer $h(n)$

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} \cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \right) = \frac{1}{21} \left[2 \cos \frac{10\pi n}{21} + 2 \cos \frac{12\pi n}{21} + 2 \cos \frac{14\pi n}{21} + 2 \cos \frac{16\pi n}{21} \right]$$

3. Si on utilise la méthode des fenêtres avec une atténuation en bande atténuée $A_a > 40 \text{ dB}$ et une zone de transition de $\Delta f = f_e/7$ donner l'expression de $h(n)$ exacte (avec application numérique)

Fenêtre Hamming ($A_a = 41$) $\Rightarrow 2\Delta f/f_e = 6/7 \Rightarrow N = 21.7 \Rightarrow N = 23$

$$f_{c10} = 2f_{c1}/f_e = 2/5 = 0.4 \quad f_{c20} = 2f_{c2}/f_e = 4/5 = 0.8$$

pass-bande $h(n) = 0.8 \text{sinc}(0.8n) - 0.4 \text{sinc}(0.4n)$

$$\Rightarrow h'(n) = h(n) \cdot w(n) \quad -11 \leq n \leq 11$$

$$= \left[0.8 \text{sinc}(0.8n) - 0.4 \text{sinc}(0.4n) \right] \left[0.5 + 0.5 \cos \frac{2\pi n}{22} \right] \Pi_{23}(n)$$

4. Calculer $h(0)$ dans chacun des 2 cas avant translation

$$h(0) = \frac{1}{21} \approx 0.0476 \quad h'(0) = h(0) \cdot w(0) = 0.4$$

Ech. Freq Fen