

Exercice 1: Soit un système discret défini par l'équation aux différences suivante :

3pts

$$y(n) - y(n-1) = \frac{1}{2}(x(n) + x(n-1) - x(n-2) - x(n-3))$$

1. Calculer et tracer les premiers éléments de la réponse impulsionnelle causale $h(n)$ du système (jusqu'à $n=8$), en déduire son expression en fonction de la fonction de l'impulsion de Dirac $\delta(n)$.

2. Montrer que l'on peut réécrire l'équation aux différences sous une forme qui permet d'identifier le système à un filtre à réponse impulsionnelle finie.

3. Calculer la réponse fréquentielle du système et tracer sa courbe en module. Quel est son rôle ?

1°. Appliquons la T.Z. aux 2 membres de l'équation

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{1}{2}X(z)[1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} \frac{(1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3})}{(1 - z^{-1})} \Rightarrow h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}\right\} * \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{2}(1 + z^{-1} - z^{-2} - z^{-3})\right\}$$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{1}{2}u(n) * [\delta(n) + \delta(n-1) - \delta(n-2) - \delta(n-3)] = \frac{1}{2}[u(n) + u(n-1) - u(n-2) - u(n-3)]$$

Rappelons que $u(n)$: fct échelon $\Rightarrow u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

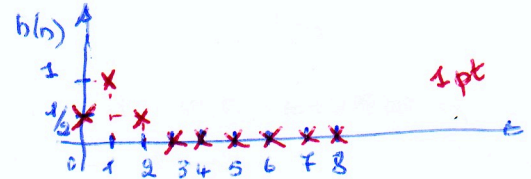
$$h(0) = \frac{1}{2}[u(0) + u(-1) - u(-2) - u(-3)] = \frac{1}{2}$$

$$h(1) = \frac{1}{2}[u(1) + u(0) - u(-1) - u(-2)] = 1$$

$$h(2) = \frac{1}{2}[u(2) + u(1) - u(0) - u(-1)] = \frac{1}{2}$$

$$h(3) = \frac{1}{2}[u(3) + u(2) - u(1) - u(0)] = 0$$

$$h(8) = \frac{1}{2}[u(8) + u(7) - u(6) - u(5)] = 0$$



$$\Downarrow$$

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

2°. $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$

or $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z) = X(z)\left[\frac{1}{2} + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right]$

$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2}x(n) + x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2)$ est Filtre RIF 1.5

3°. $H(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$ posons $z = e^{2\pi j f T_e}$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1}{2} + e^{-2\pi j f T_e} + \frac{1}{2}e^{-4\pi j f T_e} = e^{-2\pi j f T_e} \left[\frac{e^{2\pi j f T_e}}{2} + 1 + \frac{e^{-2\pi j f T_e}}{2} \right]$$

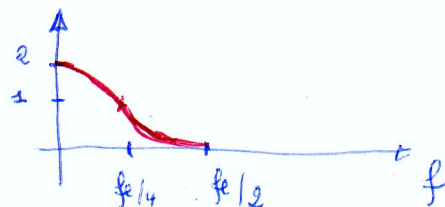
$$= e^{-2\pi j f T_e} (\cos 2\pi f T_e + 1)$$

$$|H(f)| = |\cos 2\pi f T_e + 1| = \cos 2\pi f T_e + 1$$

$f=0 \quad H(0) = 2$

$f=f_e/4 \quad H(f_e/4) = \cos \pi/2 + 1 = 1$

$f=f_e/2 \quad H(f_e/2) = \cos \pi + 1 = 0$



$\Rightarrow$ filtre passe-bas

1.5pt

Exercice 2 : Soient X et Y , 2 variables indépendantes ayant pour densité de probabilités respectives :

6 pts

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{-\frac{(y-3)^2}{32}}$$

Et soit $Z = 3X - Y$, déterminer sa moyenne, sa variance et sa densité de probabilité.

1°. μ_Z ?

On a $\mu_X = 0$ et $\sigma_X^2 = 1 \Rightarrow E\{X^2\} = 1$

On a aussi $\mu_Y = 3$ et $\sigma_Y^2 = 16 \Rightarrow E\{Y^2\} = \mu_Y^2 + \sigma_Y^2 = 25$

$$\mu_Z = E\{Z\} = E\{3X - Y\} = E\{3X\} - E\{Y\} = 3E\{X\} - E\{Y\} = 3 \cdot 0 - 3 = -3$$

1 pt

2°. σ_Z^2

$$\sigma_Z^2 = E\{Z^2\} - \mu_Z^2 = E\{9X^2 - 6XY + Y^2\} - \mu_Z^2$$

$$= 9E\{X^2\} - 6E\{X\}E\{Y\} + E\{Y^2\} - \mu_Z^2$$

(X, Y indépendants)

$$= 9 \cdot 1 + 25 - 0 = 25 = 5^2$$

2 pts

3°. Sachant que toute combinaison linéaire de v.a. gaussiennes

indépendantes suit une loi gaussienne $\Rightarrow Z \rightarrow$ gaussienne avec 2 pts

$$\mu_Z = -3 \text{ et } \sigma_Z^2 = 25 \Rightarrow p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 5} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(z+3)^2}{25}}$$

 $\sqrt{2\pi} \cdot 5$

25

1 pt