

Communications Numériques

L3 Télécom, Faculté de Génie Electrique, USTHB



Signal émis et Signal reçu (pour 100 symboles)

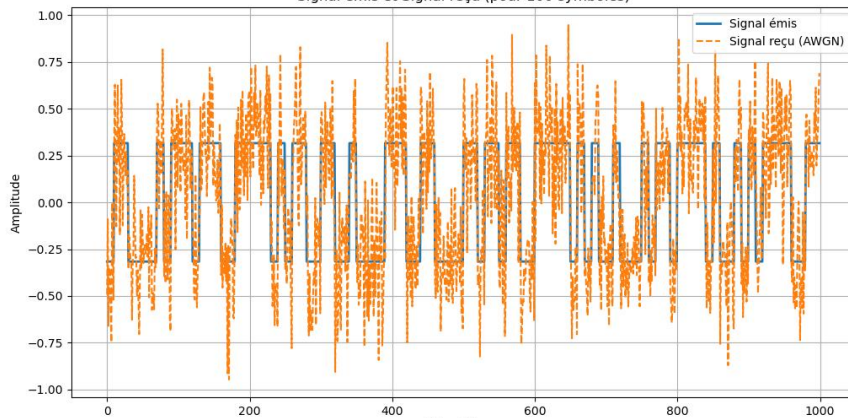
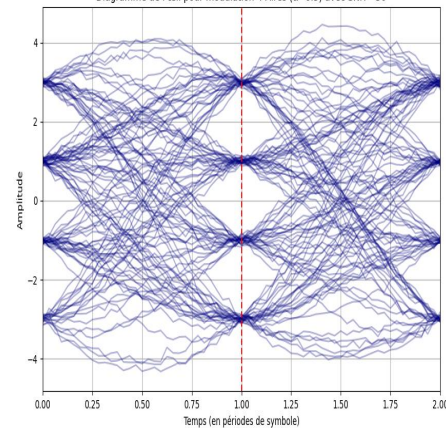
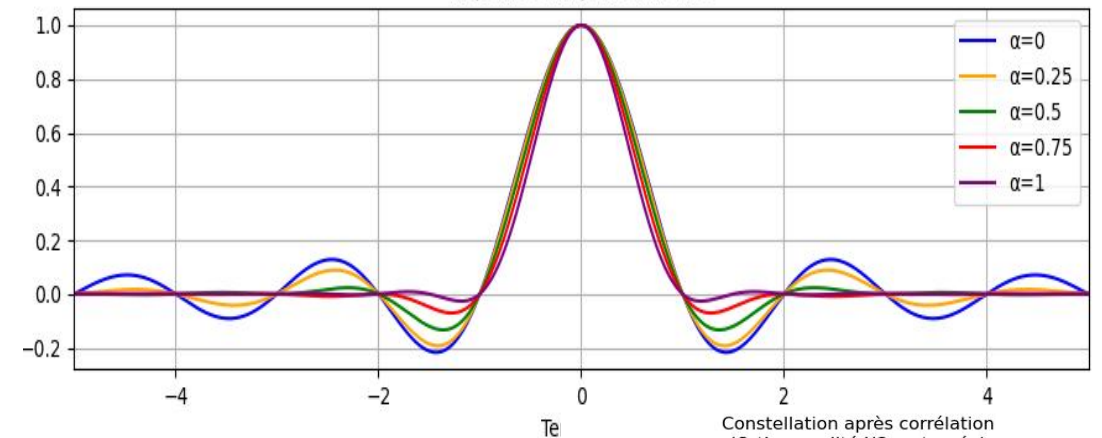


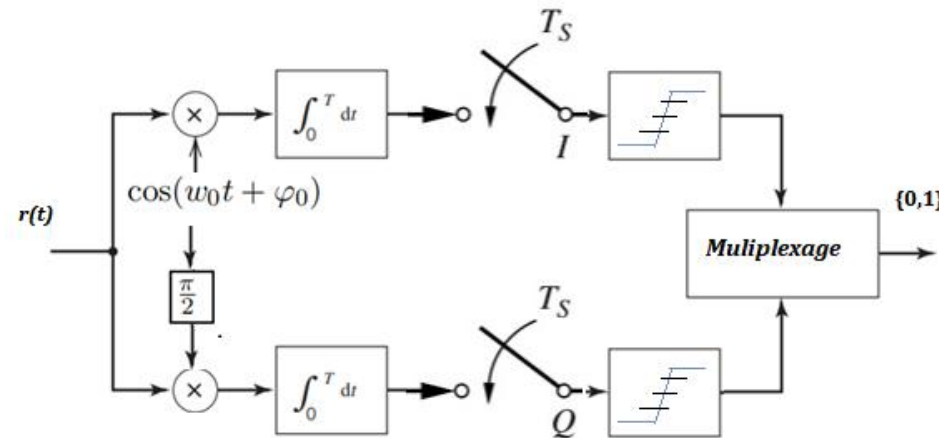
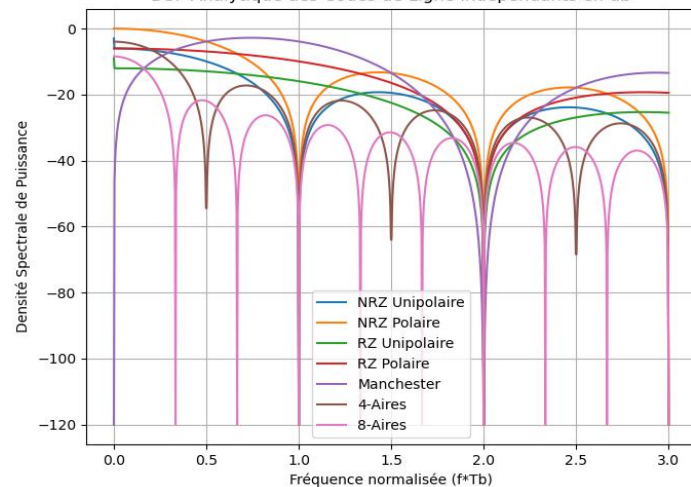
Diagramme de l'œil pour modulation 4-Aires ($\alpha=0.5$) avec SNR =30



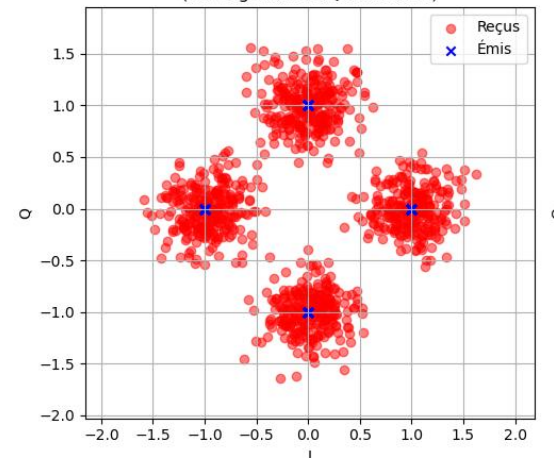
Réponses impulsionnelles



DSP Analytique des Codes de Ligne indépendants en db



Constellation après corrélation (Orthogonalité I/Q restaurée)

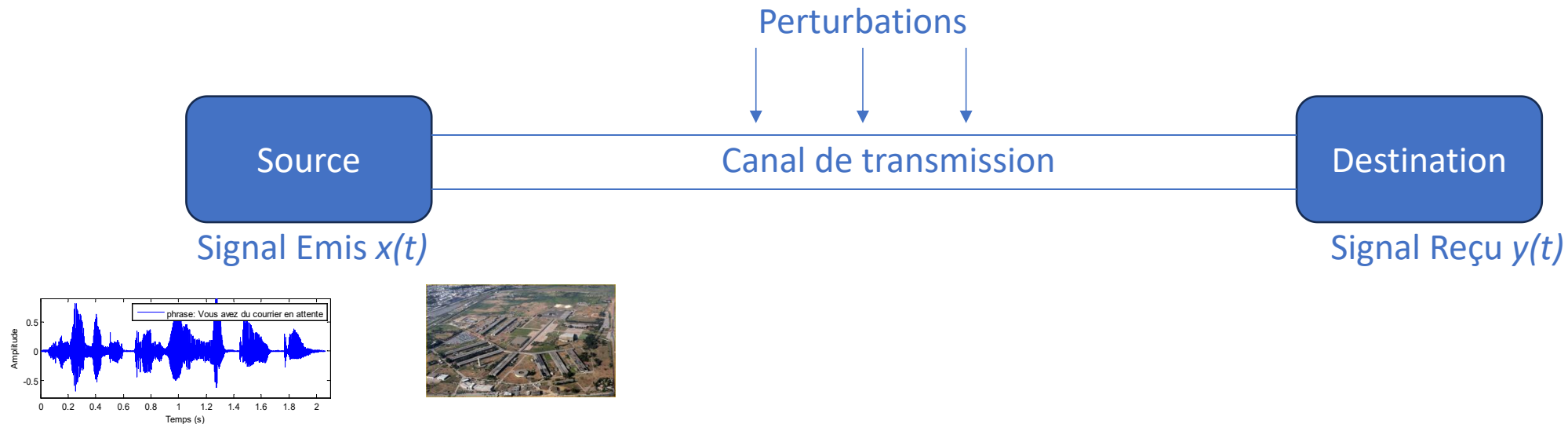


La communication?

C'est le processus dans lequel **l'information est transmise** d'un point de l'espace appelé **source** vers un autre point appelé **destination**.

Le système de communication?

C'est le groupe de dispositifs qui permet de transmettre l'information de la source vers la destination.

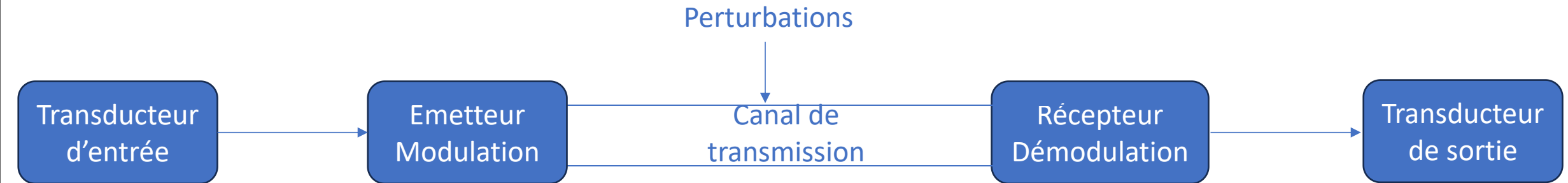


- Cas idéal $\rightarrow y(t) = x(t)$
- Réalité $y(t)$ différent de $x(t)$

Causes : Présence de bruit (perturbations affectant le canal de transmission) + imperfections des procédés de modulation et démodulation.

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



Exemple

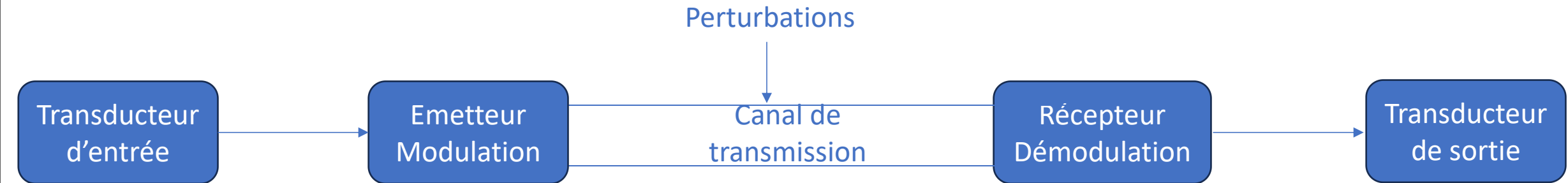
Le microphone est un transducteur d'entrée, il convertit la parole en des variations de tension.

Les haut-parleurs sont le transducteur de sortie et assure le rôle inverse.

- ☐ **Emetteur** : Modifier le message en une forme appropriée pour la transmission à travers le canal → La modulation (Faciliter la propagation ou le rayonnement, Réduire les interférences, Possibilité de multiplexage) + Filtrage + Amplification
- ☐ **Récepteur** : Extraire le message du signal reçu → La démodulation
- ☐ **Canal de communication** : Exemples : l'atmosphère, câble (système téléphonique local, fibre optique...). Chaque canal introduit une certaine quantité de distorsion, de bruit et d'interférence.

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



Capacité d'un Canal de communication

La question la plus importante pour un canal de communication est le débit maximal auquel il peut transférer des informations.

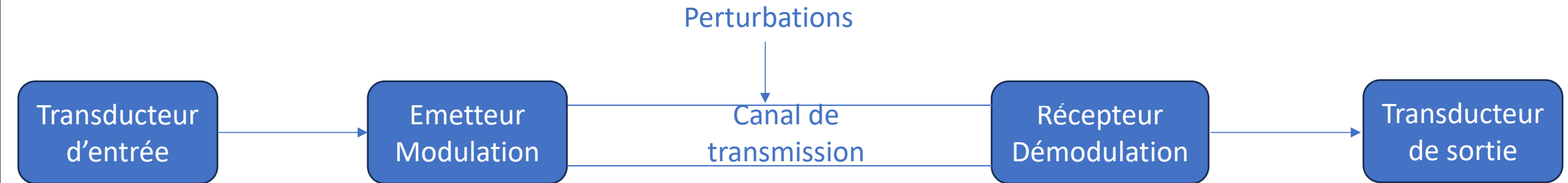
Il existe un **débit maximal** théorique auquel les informations transitent sans erreur sur le canal, appelé capacité du canal C . La célèbre loi Hartley-Shannon stipule que la capacité du canal C est donnée par :

$$C = B * \log_2(1 + (S/N)) \quad b/s \quad \text{où } B \text{ est la bande passante, } S/N \text{ est le rapport signal/bruit.}$$

Deux facteurs déterminent la capacité d'un canal : La bande passante et le bruit

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



Capacité d'un Canal de communication

La question la plus importante pour un canal de communication est le

Il existe un **débit maximal** théorique auquel les informations transitent

La célèbre loi Hartley-Shannon stipule que la capacité du canal C est de

$$C = B * \log_2(1 + (S/N)) \quad b/s \quad \text{où } B \text{ est la bande passante, } S/N$$

Deux facteurs déterminent la capacité d'un canal : La bande passante et

Par câble

USB 2.0 : 480 Mbit/s

USB 3.0 : 5 Gbit/s

USB 3.1 (Gen 2) : 10 Gbit/s

Thunderbolt : 10 Gbit/s

Thunderbolt 2 : 20 Gbit/s

Thunderbolt 3 , Thunderbolt 4 : 40 Gbit/s

FireWire : FireWire 400 : 400 Mbit/s, FireWire 800: 800 Mbit/s

Serial ATA : Serial ATA: 1,5 Gbit/s, Serial ATA Revision 2.x: 3,0 Gbit/s, Serial ATA Revision 3.x: 6,0 Gbit/s

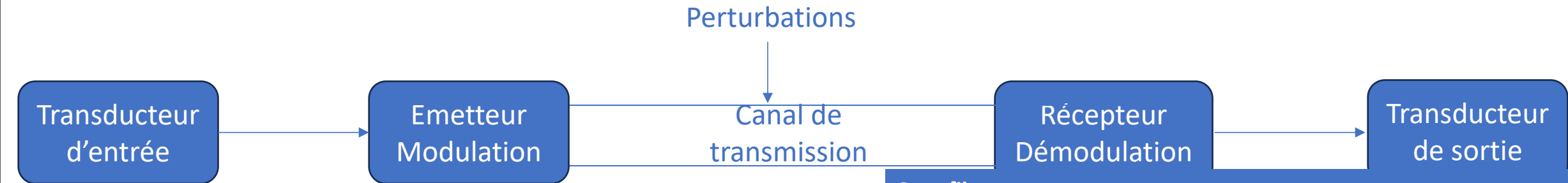
External Serial ATA (eSATA) : 3,0 Gbit/s

ATA/ATAPI (IDE) : jusqu'à 1064 Mbit/s

SCSI : entre 40 Mbit/s (SCSI-1) et jusqu'à 12 Gbit/s (SAS)

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



Capacité d'un Canal de communication

La question la plus importante pour un canal de communication est le

Il existe un **débit maximal** théorique auquel les informations transitent

La célèbre loi Hartley-Shannon stipule que la capacité du canal C est de

$$C = B * \log_2(1 + (S/N)) \quad b/s \quad \text{où } B \text{ est la bande passante, } S/N$$

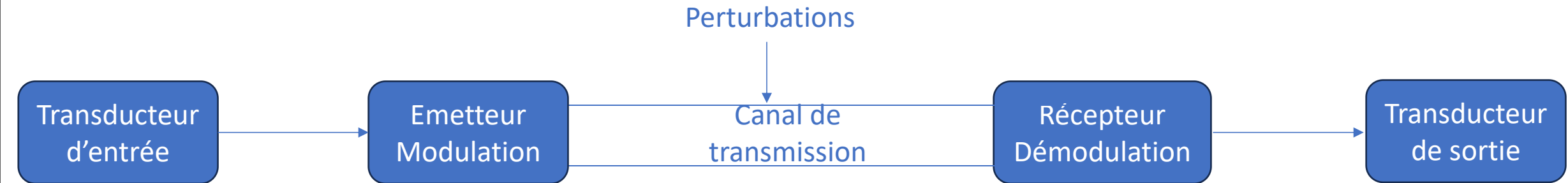
Deux facteurs déterminent la capacité d'un canal : La bande passante et

Sans fils

- Sonde spatiale Mariner 4 (1964) : 8,3 bit/s
- GSM 2G : 9,6 kbit/s
- GPRS : 115 kbit/s
- Sonde spatiale Mariner 10 (1973) : 100–150 kbit/s
- EDGE : 260 kbit/s en téléchargement et 220 kbit/s en Upload
- BGAN (Internet par Satellite) : env. 500 kbit/s
- UMTS (3GSM ou 3G) : 384 kbit/s, taux plus rapide (jusqu'à 42 Mbit/s) en HSDPA et HSPA+
- Digital Radio Mondiale : 11–26 kbit/s
- Diffusion multimédia numérique terrestre (T-DMB) : 1–2 Mbit/s
- Bluetooth v4.2 et v5 : 2 à 3 Mbit/s
- DVB-T : 2–3 Mbit/s (MPEG-2 Codage pour vidéo)
- 4G et 4G+ (LTE et LTE Advanced) : 75–300 Mbit/s
- Wi-Fi : 11 Mbit/s à 1,3 Gbit/s (802.11ac)
- ZigBee : 250 kbit/s
- 5G : 1 Gbit/s (un gigabit par seconde)

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



Capacité d'un Canal de communication

La question la plus importante pour un canal de communication est le débit maximal théorique auquel les informations transitent.

Il existe un **débit maximal** théorique auquel les informations transitent.

La célèbre loi Hartley-Shannon stipule que la capacité du canal C est donnée par :

$$C = B * \log_2(1 + (S/N)) \quad b/s \quad \text{où } B \text{ est la bande passante, } S/N \text{ le rapport signal sur bruit}$$

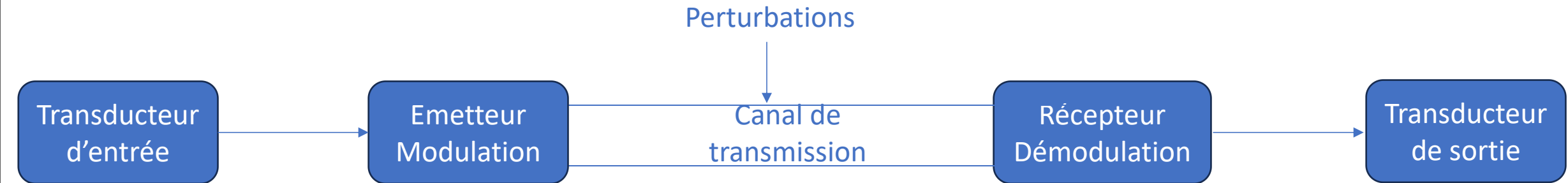
Deux facteurs déterminent la capacité d'un canal : La bande passante et le bruit

Réseaux d'ordinateurs

Attached Resource Computer NETwork : 2,5 Mbit/s, 20 Mbit/s
Token Ring : 4 Mbit/s, 16 Mbit/s
Ethernet : 10 Mbit/s
Fast Ethernet : 100 Mbit/s
Gigabit Ethernet : 1 Gbit/s
CPL : 14 / 85 / 200 / 500 / 1000 Mbit/s
Fibre Channel : 4 Gbit/s, 8 Gbit/s
10 Gigabit Ethernet : 10 Gbit/s
InfiniBand : 60 Gbit/s (en connexion à 12 canaux)

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



Capacité d'un Canal de communication

La question la plus importante pour un canal de communication est le

Il existe un **débit maximal** théorique auquel les informations transitent

La célèbre loi Hartley-Shannon stipule que la capacité du canal C est de

$$C = B * \log_2(1 + (S/N)) \quad b/s \quad \text{où } B \text{ est la bande passante, } S/N$$

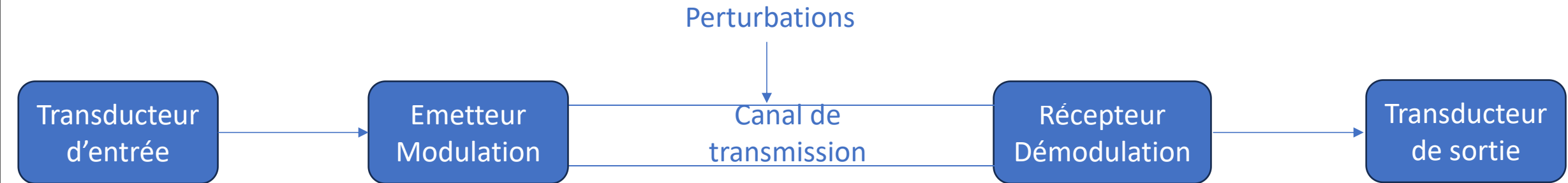
Deux facteurs déterminent la capacité d'un canal : La bande passante et

Internet

Modem : 56 kbit/s maximum ;
ADSL : 13 Mbit/s en téléchargement et 256 kbit/s en upstream (DSL light), jusqu'à 5 Mbit/s en téléchargement et 1 Mbit/s en upstream (ADSL2+)
VDSL : 25 Mbit/s, 52 Mbit/s et jusqu'à 100 Mbit/s downstream (VDSL2), et 5 Mbit/s jusqu'à 10 Mbit/s en upstream ;
DOCSIS (câble coaxial) : de 100 Mbits/s à 1 Gbit/s en téléchargement pour Docsis 3.016, plus de 1 Gbit/s pour Docsis 3.117 ;
FTTH : jusqu'à 10 Gbit/s en téléchargement

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



Capacité d'un Canal de communication

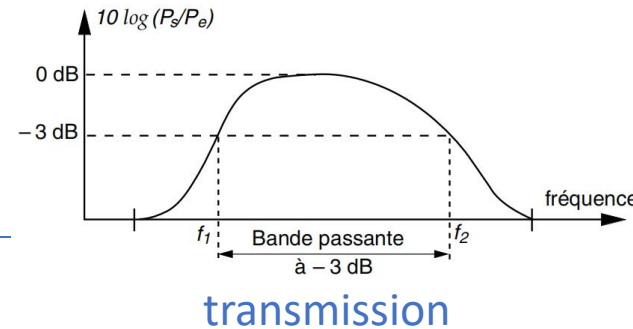
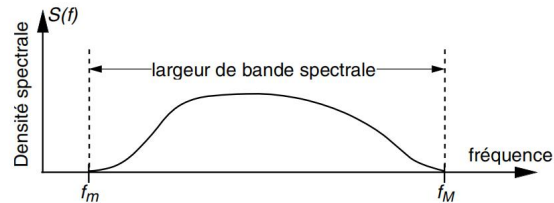
Bruit : Tout signal indésirable interprété par le récepteur et délivrant une information incohérente.

Sources de bruit : émetteur du signal, media de transmission, perturbation atmosphérique (bruit externe).

- Bruit généré par les composants du système de communication (interne): ex bruit thermique du à l'agitation thermique des électrons (source de bruit la plus courante)
- Décharges électriques liées aux perturbation atmosphérique (externe).
- Bruit artificiel (bruit d'allumage)
- Bruit d'interférence (Diaphonie) : influence mutuelle entre deux signaux utiles mais sur des conducteurs voisins. (trajets de transmission multiples)

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



Transducteur
d'entrée

Emetteur
Modulation

Récepteur
Démodulation

Transducteur
de sortie

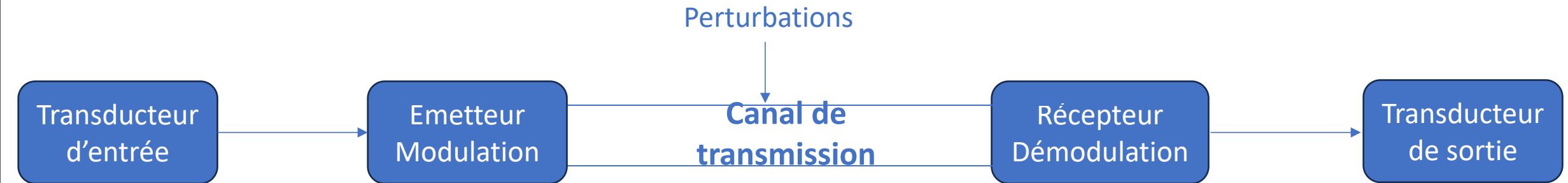
Spectre d'un signal et bande passante d'un support

Une voie de transmission est nécessairement imparfaite et donc ne laisse passer que certaines fréquences dans la bande passante du support.

- le spectre du signal que l'on désire transmettre doit être compris dans la bande passante du support de la voie de transmission pour avoir une réception correcte sans déformation par la propagation dans le support.
- si le support de la voie de transmission a une très large bande passante par rapport au signal à transmettre, son utilisation n'est pas optimisée.

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



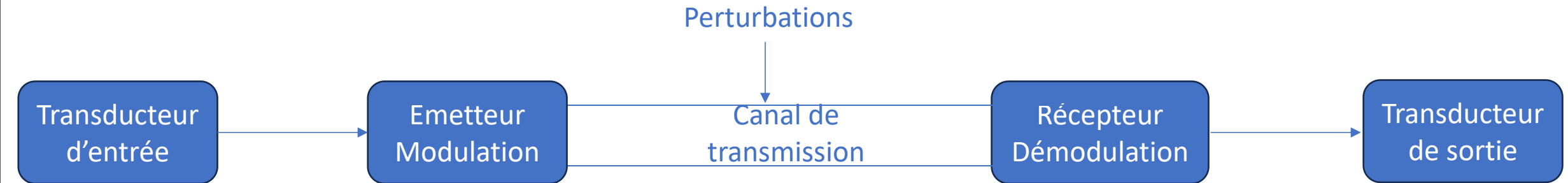
Transmission du signal

- ☐ Guidée à travers un guide d'onde : Paire torsadée, câble coaxial, fibre optique.
 - ☐ Non guidée : Généralement dirigée par une antenne à travers l'air, le vide, l'eau.
- Dans les deux cas : au moyen d'une onde électromagnétique.
- ☐ Ou lien directe (sans onde). Exemple : ordinateur et moniteur.

Remarque : La qualité de la ligne se définit par sa perte (en dB/m) donnée par le constructeur (souvent en dB /100 m). La perte augmente avec la fréquence du signal transféré et est moindre dans une ligne bifilaire que dans un câble coaxial.

Communication analogique : Rappels

L'information à transmettre est une grandeur physique concrète.



<https://techno-skills.com/reseaux/les-fondamentaux/comparaison-des-types-de-cablage-et-dinterface-physique/>

Transmission du signal

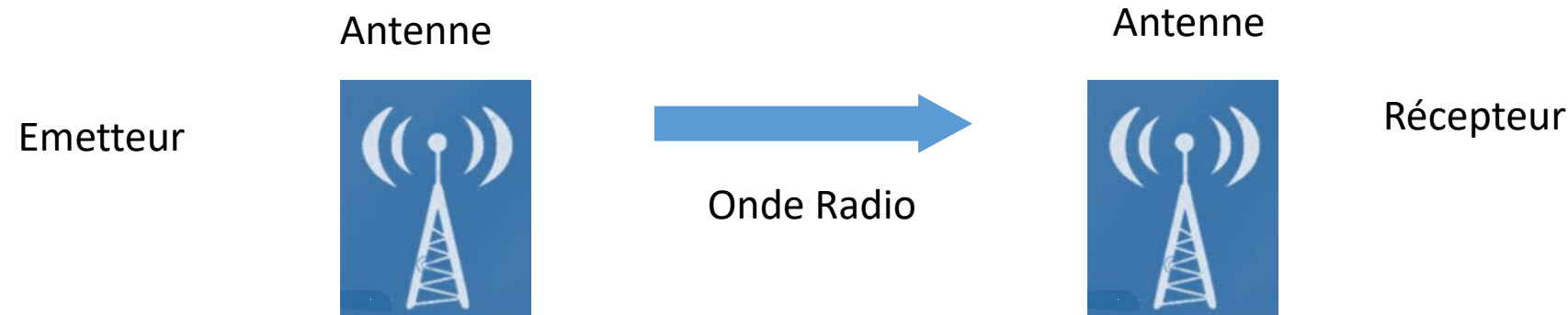
- ☐ Guidée à travers un guide d'onde : Paire torsadée, câble co
 - ☐ Non guidée : Généralement dirigée par une antenne à trav
- Dans les deux cas : au moyen d'une onde électromagnétique.
- ☐ Ou lien directe (sans onde). Exemple : ordinateur et monitr

	Cuivre		Fibre optique	
	Câble coaxial	Paire torsadée	Monomode	Multimode
Portée	185 à 1000m	100 à 200m	50Km	10 à 30Km
BW	+ de 100 MHz	2 à 600 MHz	100 GHz/km	50 à 500 MHz/km
Débit	+ de 100 Mbit/s	4 Mbit/s à 10 Gbit/s	Illimité	100 Mbit/s à 40Gbit/s
Perte de données	Moyenne	Elevée pour UTP Moyenne pour STP	Nulle	
Coût	Moyen	Faible	Très chère	
Fiabilité	Bonne	Bonne	Très bonne	

Remarque : La qualité de la ligne se définit par sa perte (en dB/m) donnée par le constructeur (souvent en dB /100 m). La perte augmente avec la fréquence du signal transféré et est moindre dans une ligne bifilaire que dans un câble coaxial.

Inconvénients filaire : Mobilité limitée, Installation, encombrement physique, détérioration au fil du temps : Les câbles peuvent se limitation de la portée (répéteur, switch), compatibilité, interférence, maintenance.

Communication analogique : Rappels



Ondes :

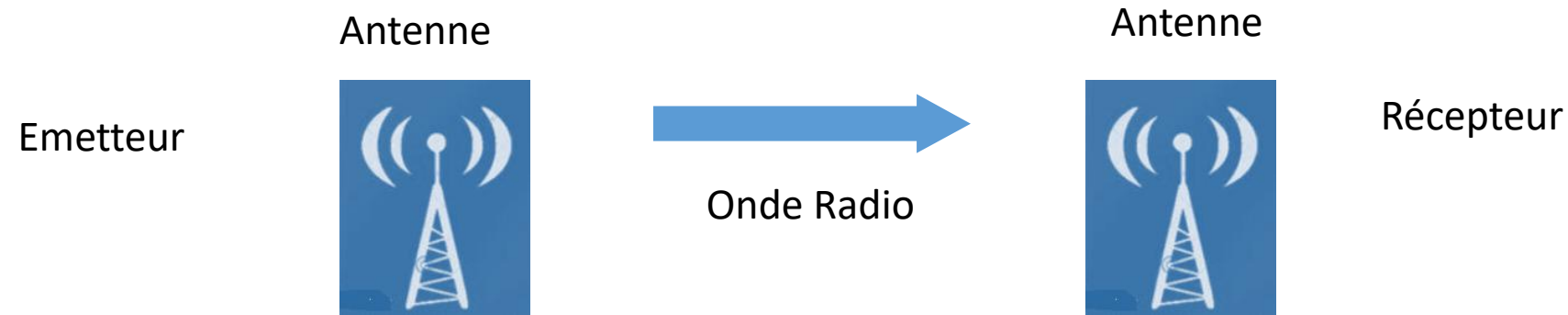
- Une onde est une perturbation qui se propage dans un milieu sans modifier de façon permanente ses propriétés.
- Une onde monochromatique est une onde ayant une seule fréquence (fréquence bien définie).
- La longueur d'onde λ est une grandeur physique caractérisant une onde monochromatique dans un milieu homogène, définie comme la distance séparant deux points qui sont au même état (a distance parcourue par l'onde pendant une période T).

$$\lambda = v T = \frac{v}{f}$$

$\lambda \ll \Rightarrow$ Energie transportée $E = hf = hv/\lambda \gg$

- Une onde radioélectrique (hertzienne) est une onde électromagnétique dont la fréquence est comprise entre 9 kHz et 300 GHz qui correspondent à des longueurs d'onde de 33 km à 1 mm ($c = 3 \times 10^8$ m/s)

Communication analogique : Rappels



Ondes :

Transmission optimale → l'antenne doit avoir au moins la moitié de la longueur d'onde de la fréquence ($\lambda/2$)

Spectre de fréquences

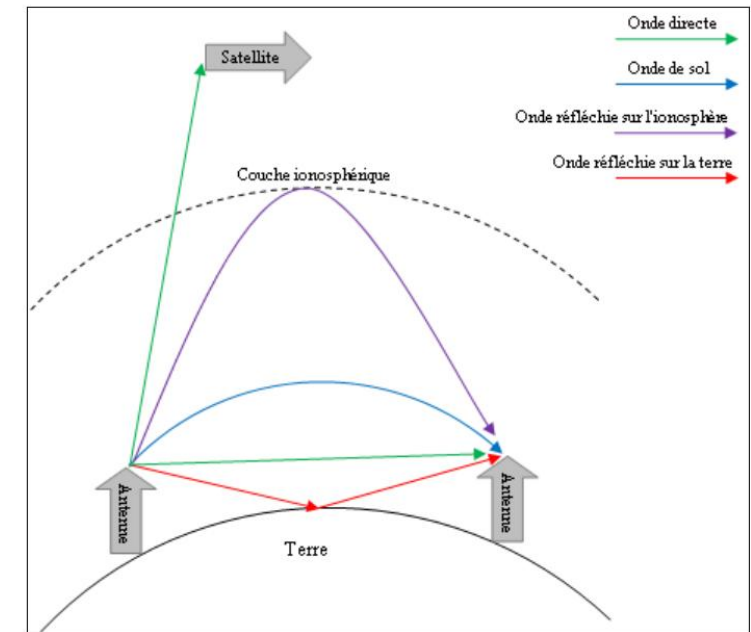
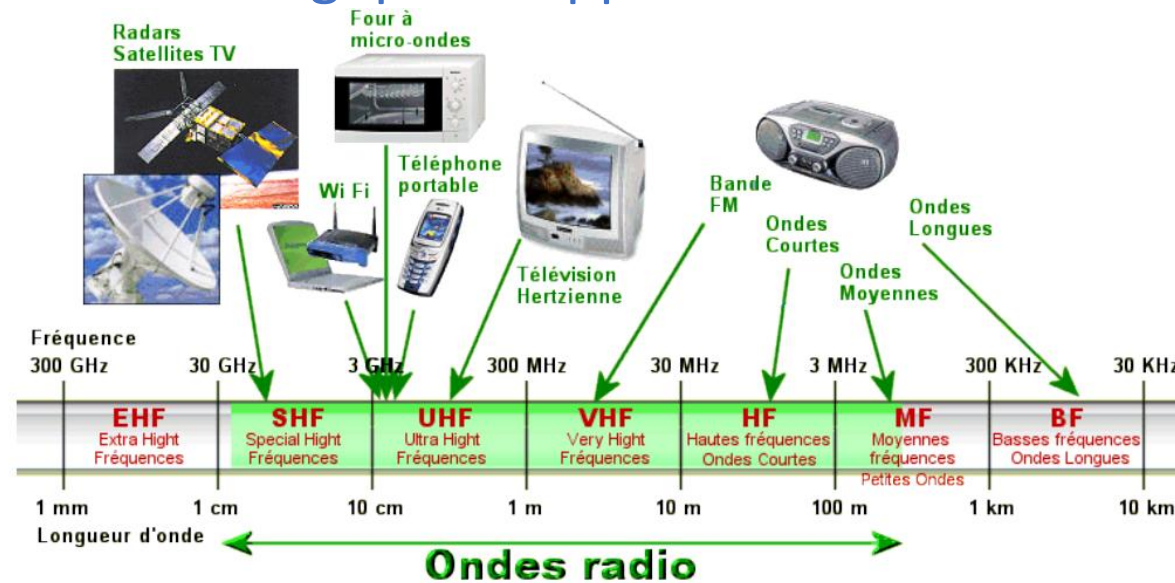
La ressource la plus précieuse en matière de communication est le 'spectre de fréquences'.

Le 'spectre de fréquences' doit être partagé par un grand nombre d'utilisateurs et d'applications :
Radio AM, radio FM, télévision, téléphonie cellulaire, réseaux locaux sans fil, satellite, contrôle aérien.

Le spectre de fréquences doit être géré pour un support physique particulier.

Le spectre pour les communications « en direct » est attribué par l'organisation internationale des communications (UIT).

Communication analogique : Rappels



Nécessité de moduler :

Exemple : Message vocale à envoyer au moyen d'une antenne

- Le transducteur (microphone) convertit les variations de pression acoustique en courant électrique proportionnel.
- Le message électrique comprend des fréquences allant de 20 Hz à 20 KHz $\Rightarrow$ 1500 Km pour 100 Hz et 15 Km pour 10 KHz
- Si deux stations émettent en même temps en fréquence audio, pas possible de discerner l'une de l'autre dans le récepteur.

Solution : Introduire le message électrique basse fréquence dans un autre signal haute fréquence (onde porteuse)

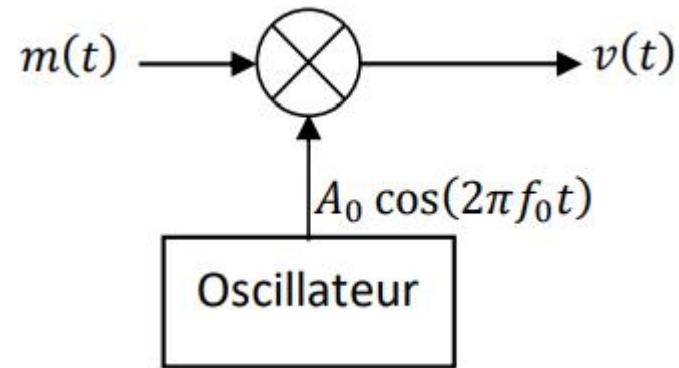
$\Rightarrow$ **Principe de base de la modulation :** Le signal résultant (onde modulée) est un signal de haute fréquence.

Ainsi 2 signaux occupant la même bande seront transmis sur 2 fréquences porteuses.

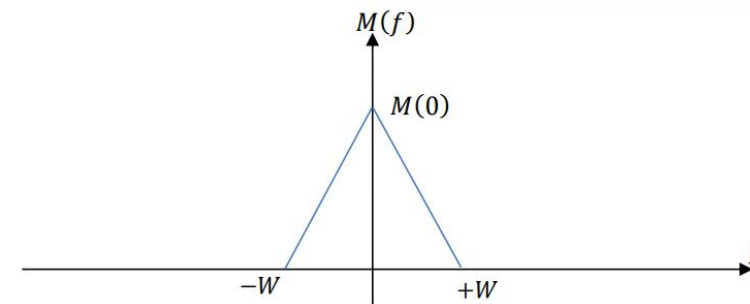
Communication analogique : Rappels

Modulation d'Amplitude

$$v(t) = A_0 m(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

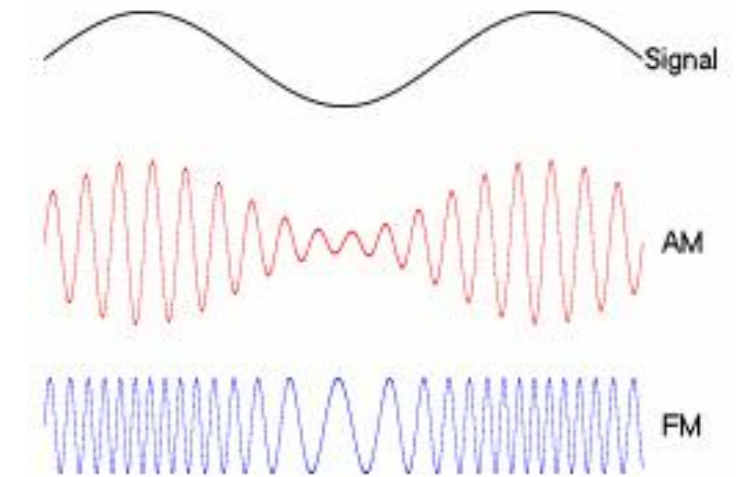
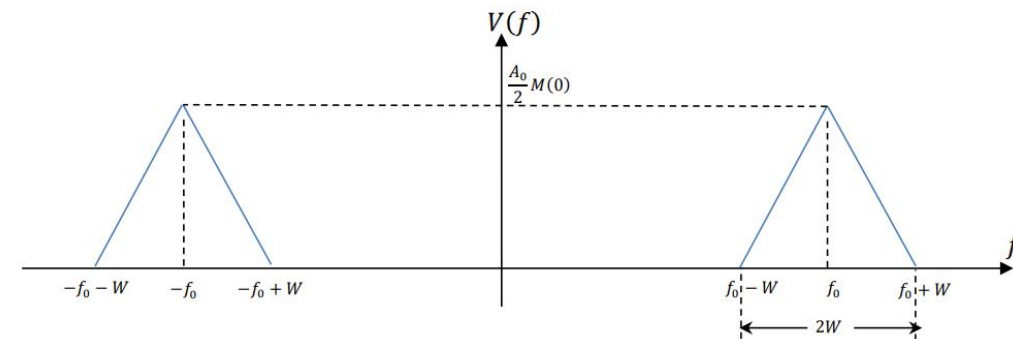


$$V(f) = \frac{A_0}{2} M(f - f_0) + \frac{A_0}{2} M(f + f_0)$$



Transmission nécessite une largeur de bande égale à $2W$.

Deux bandes latérales, chacune ayant une largeur $2W \rightarrow$ Double bande latérale. Suppressed-Carrier modulation (DSBSC)'.

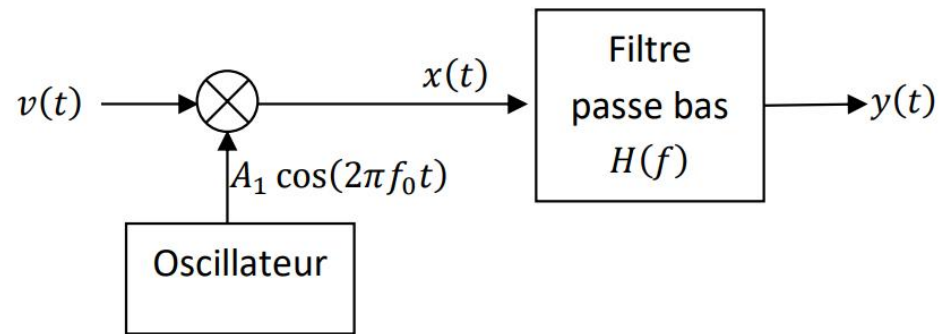


Communication analogique : Rappels

□ Démodulation d'Amplitude

Récupération du message à bande de base à partir de l'onde modulée.

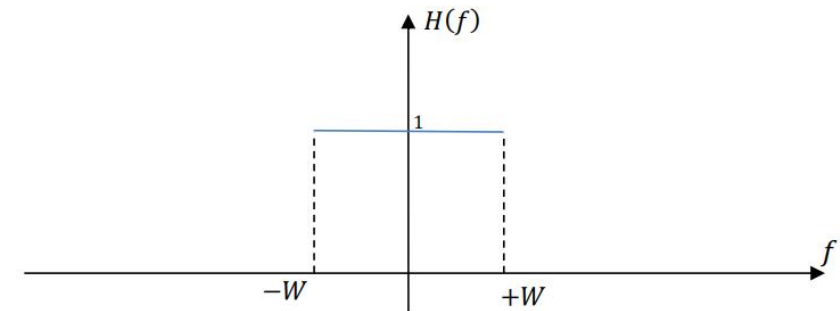
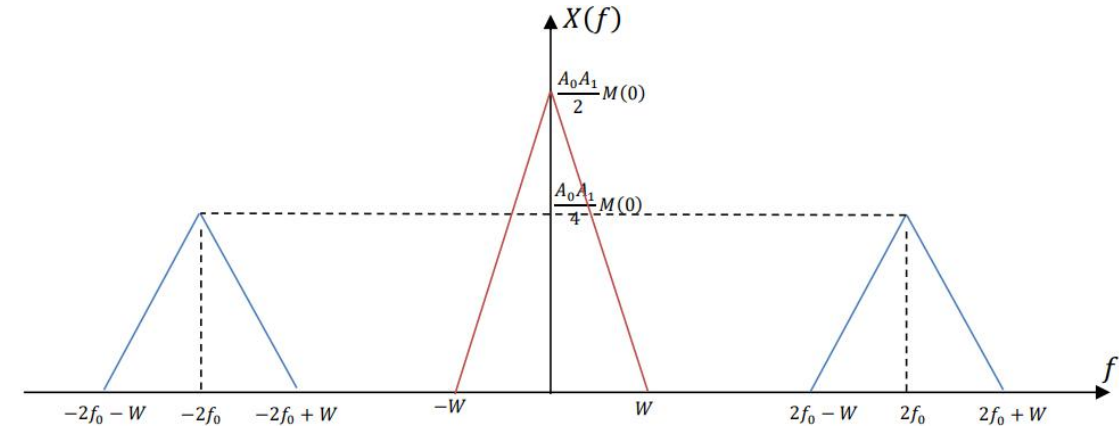
$$v(t) = A_0 m(t) \cos(2\pi f_0 t)$$



$$x(t) = v(t)A_1 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 A_1 m(t) \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2}$$

$$X(f) = \frac{A_0 A_1}{2} M(f) + \frac{A_0 A_1}{4} M(f - 2f_0) + \frac{A_0 A_1}{4} M(f + 2f_0)$$

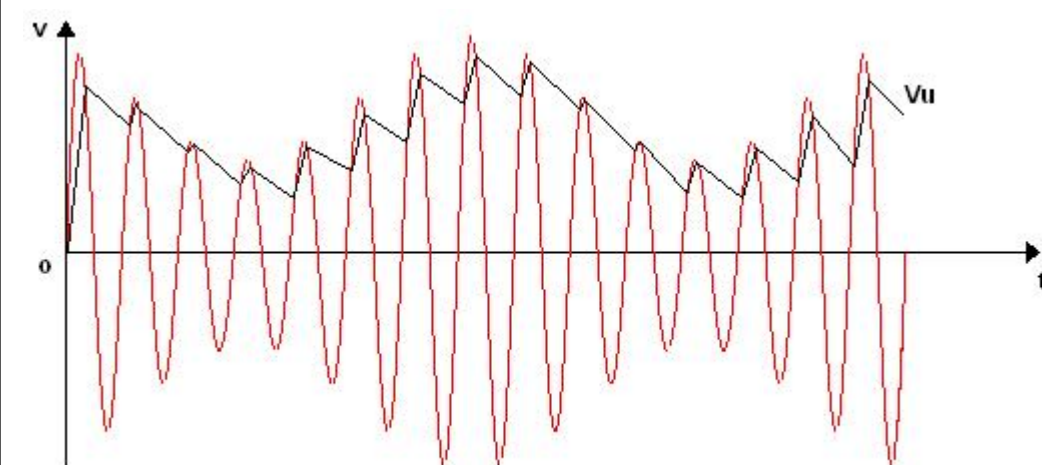
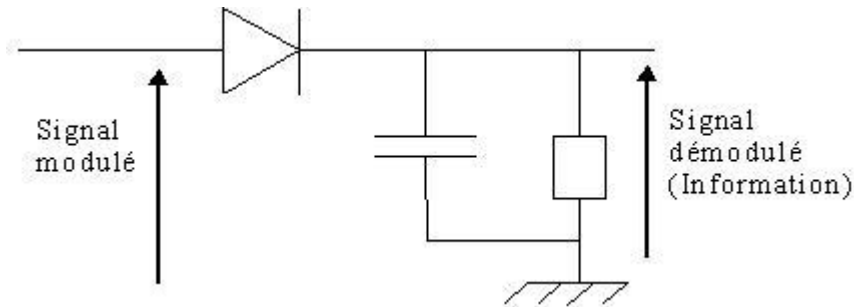
→ Démodulation cohérente (même f_0) ou synchrone.



Communication analogique : Rappels

□ Détection Non Synchrone (Détection d'enveloppe)

Utilisation d'un circuit simple et efficace connu sous le nom de détecteur d'enveloppe (envelope detector)



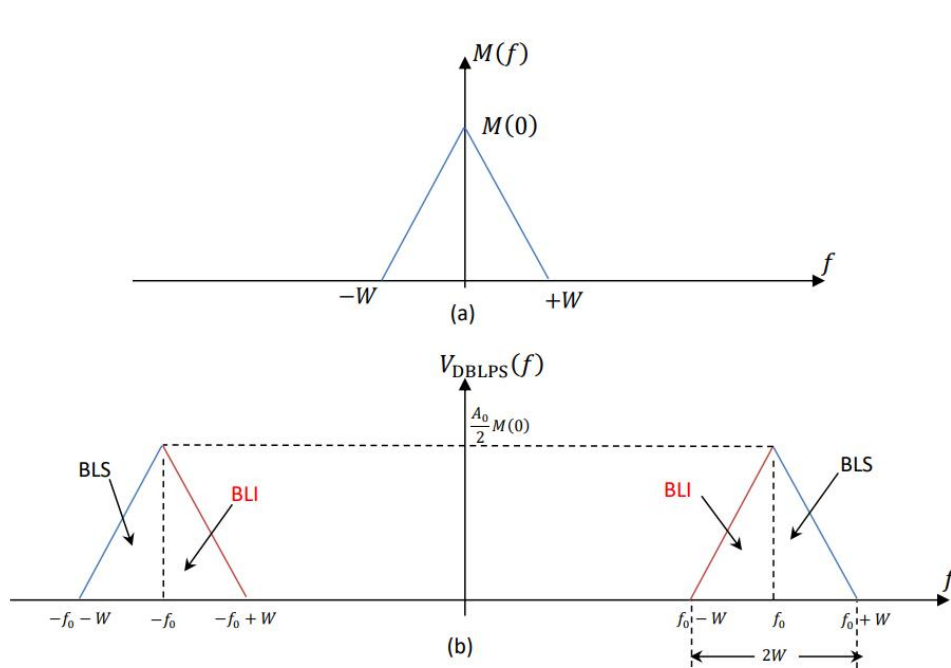
- Démodulation cohérente :
 - Nécessite envoi de f_0 ou sa génération avec au niveau du récepteur à l'aide d'un mécanisme de synchronisation.
 - Performances et précisions élevées mais plus coûteuses.
 - Utilisée pour les communications à haut débit et de haute qualité, telles que la télévision numérique, les réseaux cellulaires ou les communications par satellite.
- Démodulation non cohérente :
 - Ne nécessite pas un mécanisme de synchronisation
 - Utilisée pour les communications à faible puissance et à faible coût, telles que les capteurs sans fil, l'identification par radiofréquence ou les appareils Bluetooth.
 - Plus résistante aux bruits et interférences.

Communication analogique : Rappels

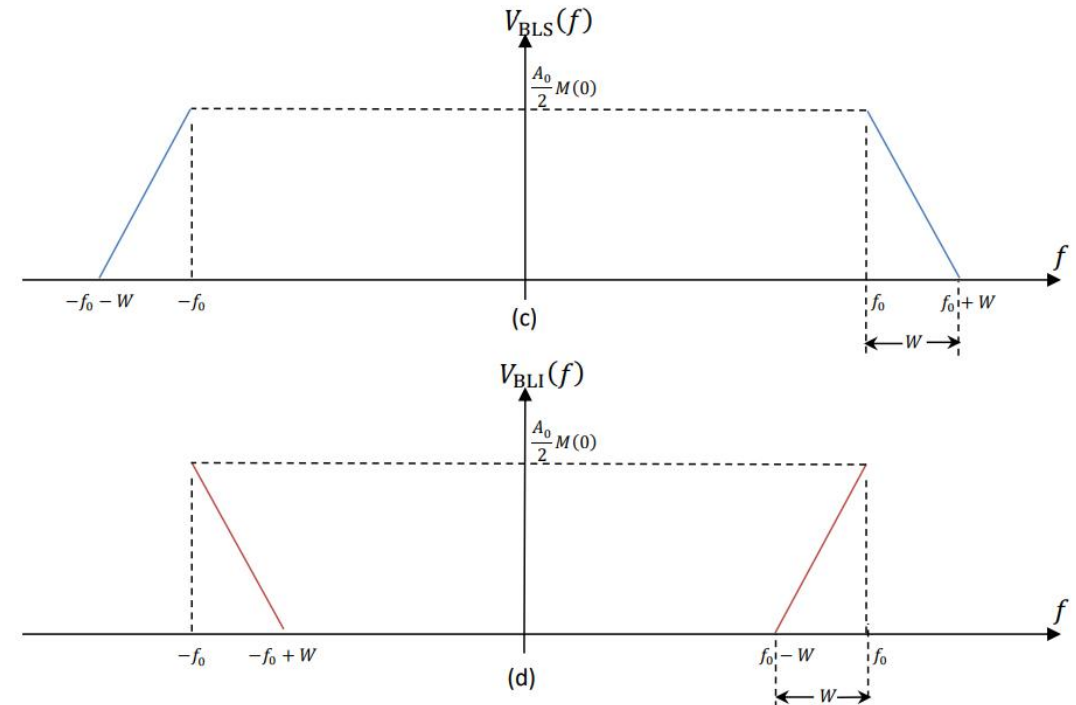
□ Modulation à bande latérale unique (BLU)

Transmission d'une seule bande (inférieure ou supérieure) "Single Side Band modulation (SSB)".

Réalisation couteuse et compliquée.



https://staff.univ-batna2.dz/sites/default/files/fortaki_tarek/files/ca_cours_site.pdf



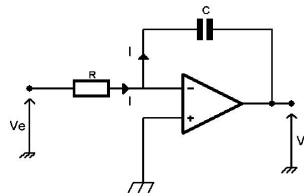
Communication analogique : Rappels

Modulation de Fréquence

La fréquence instantanée $f_i(t)$ varie linéairement avec le message $m(t)$

$$f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$$

$$v(t) = A_0 \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha \right)$$



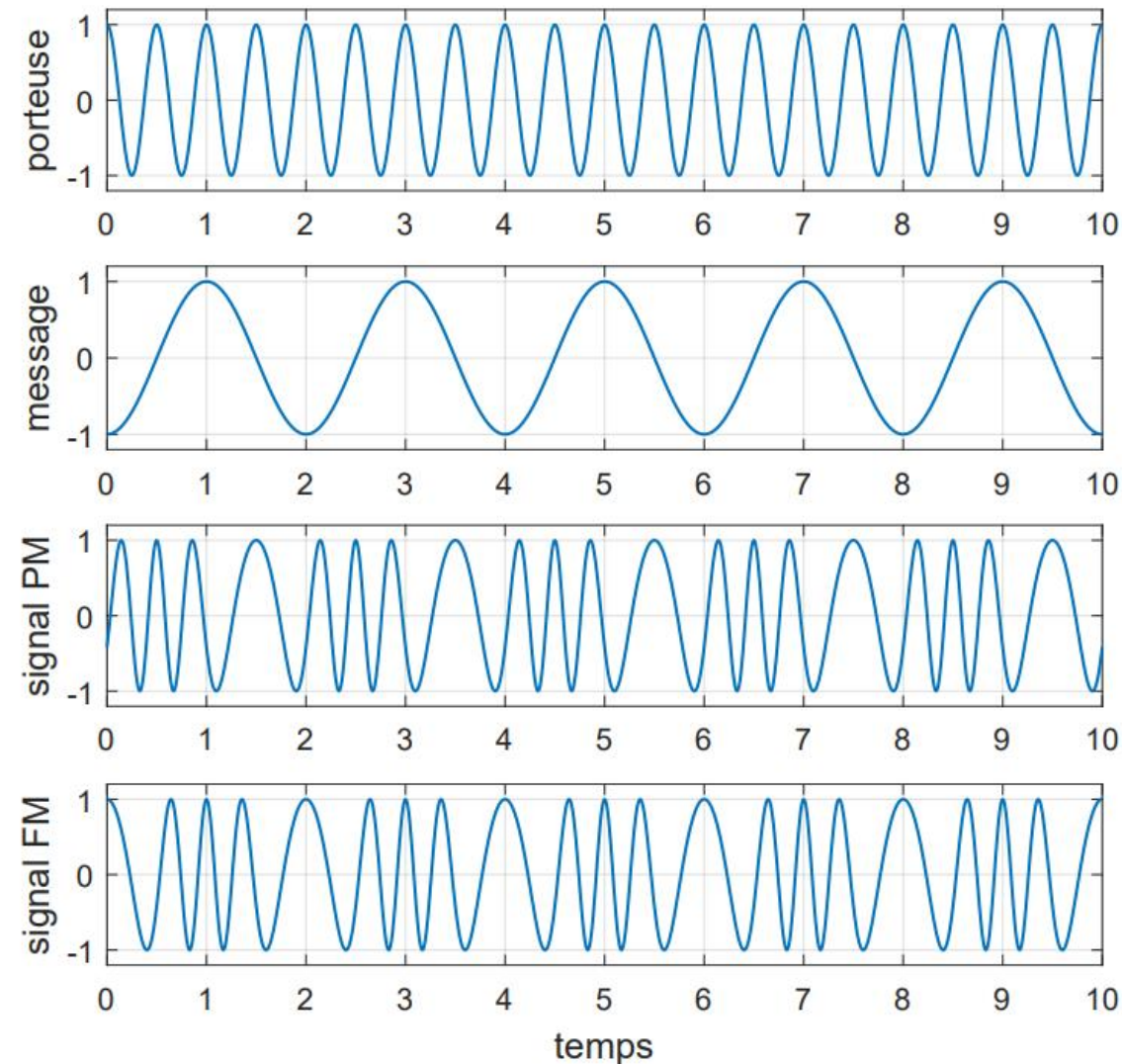
Modulation de Phase

L'angle instantané $\theta_i(t)$ varie linéairement avec le message $m(t)$

$$\theta_i(t) = 2\pi f_0 t + k_p m(t)$$

où k_p : Constante de la modulation de phase.

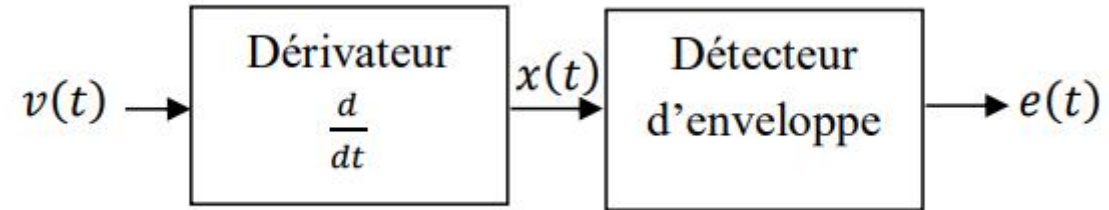
$$v(t) = A_0 \cos (2\pi f_0 t + k_p m(t))$$



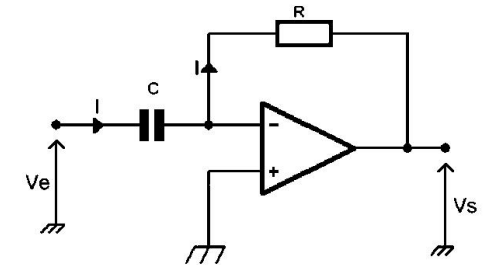
Communication analogique : Rappels

□ Démodulation de Fréquence

$$v(t) = A_0 \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha \right)$$



$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A_0 \left(2\pi f_0 + 2\pi k_f m(t) \right) \sin \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha \right)$$



A la sortie du détecteur d'enveloppe : $-A_0 2\pi f_0 - A_0 2\pi k_f m(t)$

- **Modulation de Fréquence à bande étroite** : $v(t) = A_0 \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha \right)$ où $\beta = \frac{k_f A_m}{f_m} \ll 1$
- **Modulation de Fréquence à large bande** : Le signal FM est constitué de contenu fréquentiel à $f_0, f_0 \pm f_m, f_0 \pm 2 f_m, f_0 \pm 3 f_m, \dots$ et $(-f_0, -f_0 \pm f_m, f_0 \pm 2 f_m, f_0 \pm 3 f_m, \dots)$

Pour un β donné, il y a un nombre fini N de bandes latérales significatives. Il y a $2N$ bandes latérales et donc la largeur de bande du signal FM est $2N f_m$.

Communication Numérique : Avantages

- ✓ Robustesse pour le bruit des canaux et les interférences externes;
- ✓ Une transmission sans erreur est possible avec le code de correction d'aide;
- ✓ Sécurité de l'information lors de sa transmission de source vers destination à travers le cryptage.
- ✓ Des circuits numériques relativement peu coûteux peuvent être utilisés
- ✓ Précision : garantie par le nombre de bits et elle est déterminée à priori;
- ✓ Souplesse : plusieurs tâches simultanées possibles puisque les différents types de signaux numériques sont traités de manière identique. Communications numériques permet l'intégration de la voix, de la vidéo et des données sur un seul système.
- ✓ Flexibilité : changements aisés des paramètres des algorithmes;
- ✓ Permet d'enchaîner des algorithmes de traitement beaucoup plus complexes (ex FFT);
- ✓ Stockage des données, processeurs DSP à faible coût, Intégration : système VLSI;

Inconvénients : En général, une bande passante plus importante est requise que pour les systèmes analogiques, ainsi qu'une synchronisation.

Le langage binaire utilisé en informatique possède un défaut: il est immatériel. Le problème de la transmission se pose alors, comment envoyer des informations insaisissables ?

Il faut savoir que par abus de langage, on parle de modulation numérique alors qu'en réalité, seule l'information à transmettre est numérique. Le principe est identique à la modulation analogique dans le sens où la porteuse reste analogique.

Chaine de Transmission Numérique

Le numérique emploie un support physique, généralement des signaux de tensions, pour transférer des données. Cette conversion des états logiques, immatériels donc non-transmissibles, en un signal numérique (ou analogique), nécessite l'utilisation d'un codage.

Source : Pour une transmission numérique, le message à transmettre doit être sous forme numérique.

Si le signal à transmettre est analogique (parole ou image,...), il doit être numérisé.

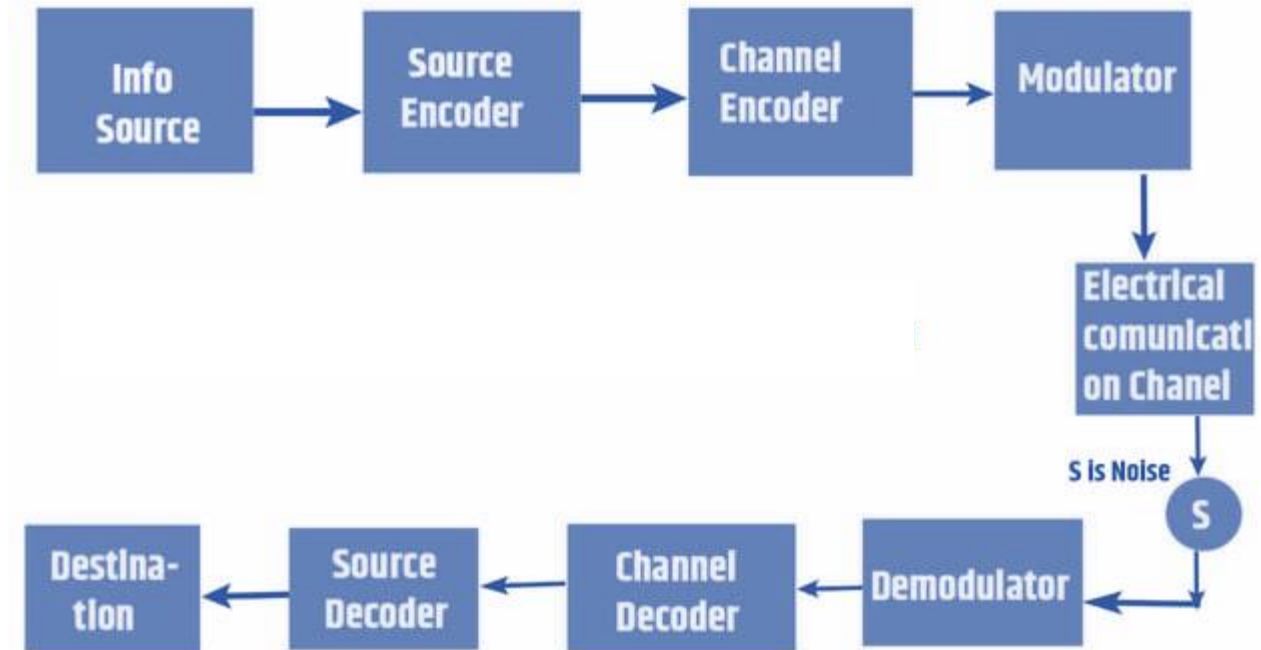
L'opération de numérisation d'un signal analogique est composée de trois étapes principales:

- l'échantillonnage,
- la quantification et
- le codage

Codeur de Source : Le codage de source, ou compression des données est basé sur la théorie de l'information, sert à fournir une représentation efficace des données (un taux de compression important) tout en préservant l'information essentielle qu'elles portent.

Exemple :

- AAAAABBBCC → 5A3B2C (Run-Length Encoding)
- MP4, JPEG



Chaine de Transmission Numérique

Le numérique emploie un support physique, généralement des signaux de tensions, pour transférer des données. Cette conversion des états logiques, immatériels donc non-transmissibles, en un signal numérique (ou analogique), nécessite l'utilisation d'un codage.

Source : Pour une transmission numérique, le message à transmettre doit être sous forme numérique.

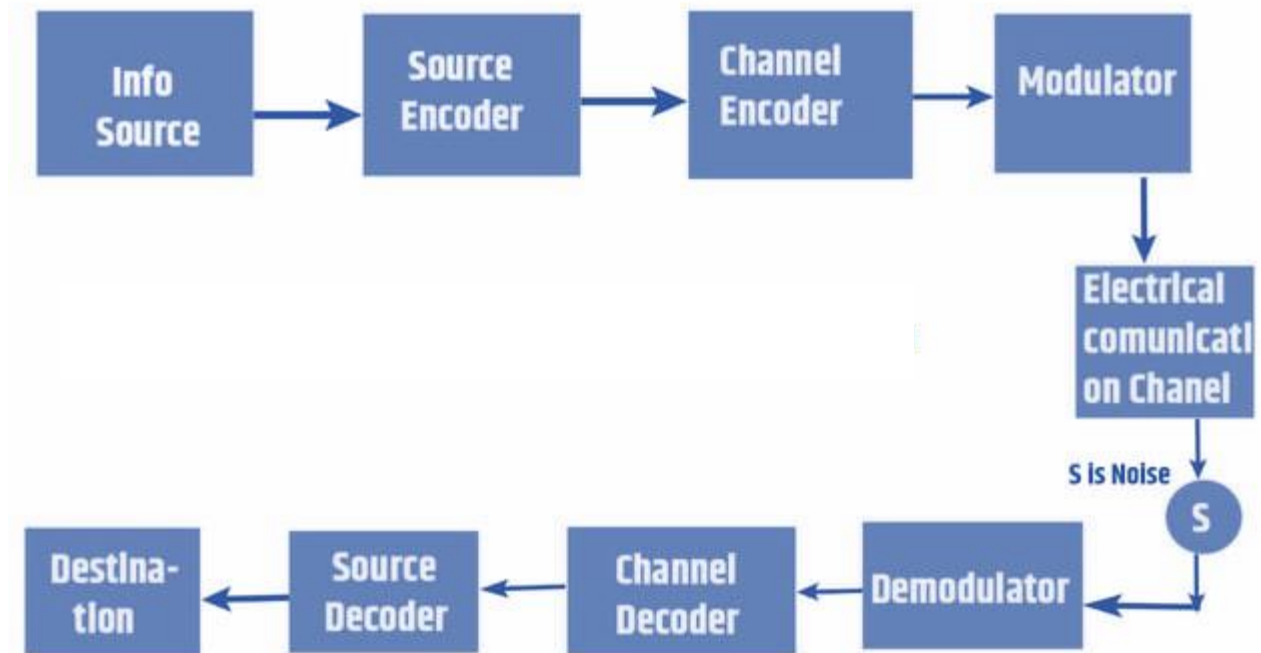
Si le signal à transmettre est analogique (parole ou image,...), il doit être numérisé.

L'opération de numérisation d'un signal analogique est composée de trois étapes principales:

- l'échantillonnage,
- la quantification et
- le codage

Codeur de Source : Le codage de source, ou compression des données est basé sur la théorie de l'information, sert à fournir une représentation efficace des données (un taux de compression important) tout en préservant l'information essentielle qu'elles portent.

Après le codage, certains éléments binaires peu significatifs du message seront supprimés. Le message est sous une forme concise. Il est constitué par une suite d'éléments binaires mutuellement indépendants et identiquement distribués $\{0,1\}$



Chaine de Transmission Numérique

Le numérique emploie un support physique, généralement des signaux de tensions, pour transférer des données. Cette conversion des états logiques, immatériels donc non-transmissibles, en un signal numérique (ou analogique), nécessite l'utilisation d'un codage.

Codeur de Canal : Le codage canal consiste à ajouter de la redondance dans le message binaire émis afin de le protéger contre le bruit et les perturbateurs présents sur le canal de transmission (exemple : le codage correcteur d'erreurs). Cette opération n'a pas d'équivalent en transmission analogique. Contrairement au codage source, le codage canal consiste à insérer des éléments binaires dits de redondance et ce suivant une certaine loi.

Ex : code de Hamming (7,4)

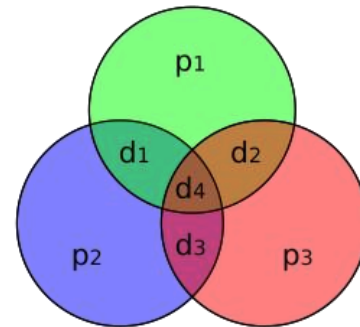
Bits : 1011

$P1 = D1 \oplus D2 \oplus D4 = 0$

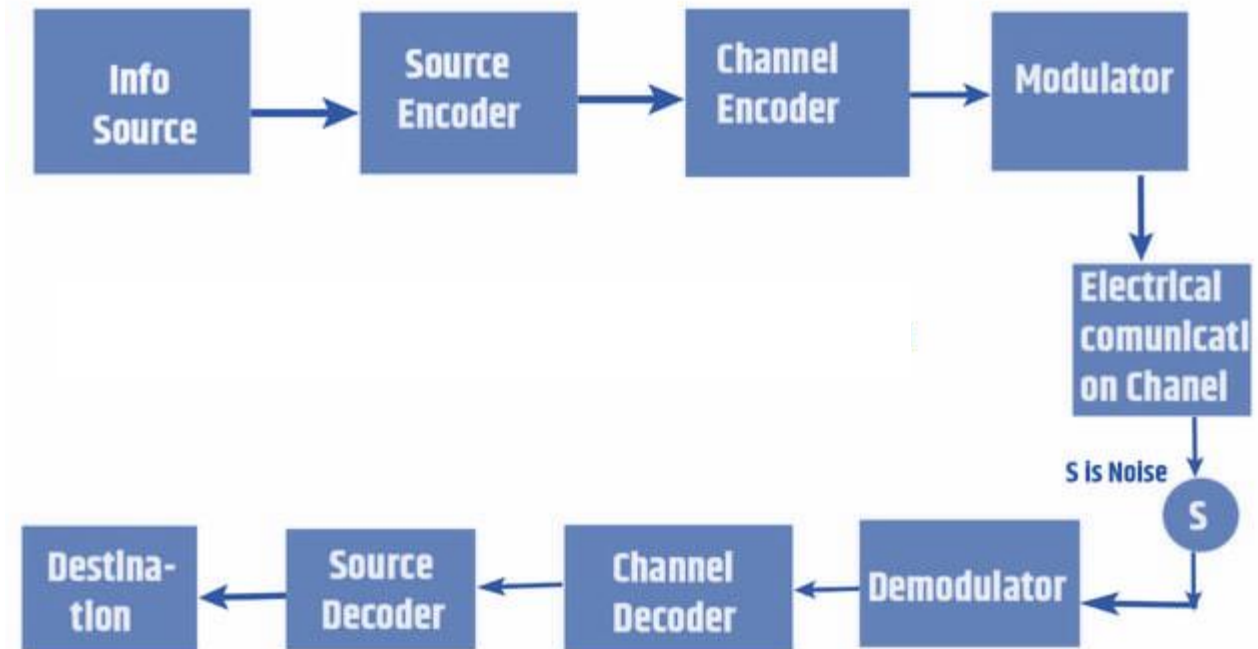
$P2 = D1 \oplus D3 \oplus D4 = 1$

$P3 = D2 \oplus D3 \oplus D4 = 0$

Codage canal : 0110011



Modulateur : Pour transmettre un message numérique sous forme d'une suite d'éléments binaires il est nécessaire de lui associer une représentation physique, sous forme d'un signal électrique. Cette opération est appelée généralement modulation.



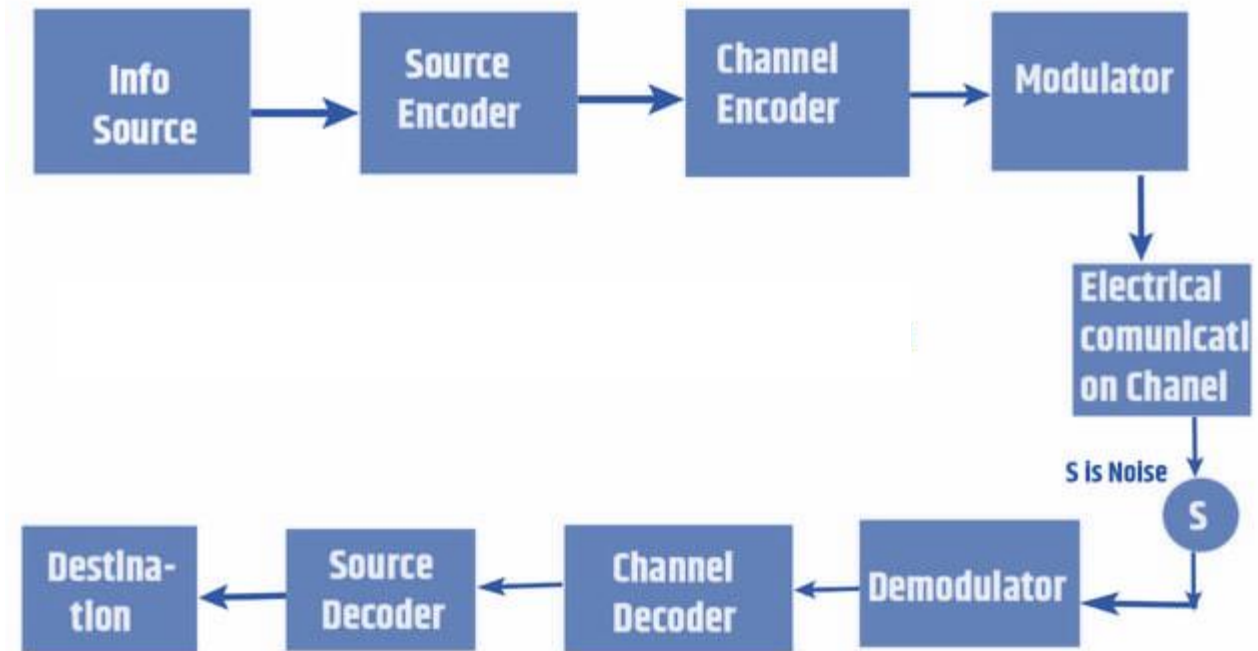
Chaine de Transmission Numérique

Le numérique emploie un support physique, généralement des signaux de tensions, pour transférer des données. Cette conversion des états logiques, immatériels donc non-transmissibles, en un signal numérique (ou analogique), nécessite l'utilisation d'un codage.

Canal de Transmission : Le canal ou le milieu de transmission représente le lien physique entre l'émetteur et le récepteur ; il est pratiquement constitué par l'un des supports suivants: câble de transmission, un câble coaxial, une fibre optique ou l'espace libre. Le canal de transmission peut inclure aussi le bruit dont les origines sont nécessaires pour la transmission.

Démodulateur et Détecteur : Le détecteur a pour fonction de reconstituer le message émis où les valeurs des éléments transmis sont identifiées à partir des échantillons reçus. La décision est binaire ou M-aires.

Décodeurs canal et source : Les décodeurs canal et source font l'opération inverse des codeurs canal et source.



Chaine de Transmission Numérique

Le numérique emploie un support physique, généralement des signaux de tensions, pour transférer des données. Cette conversion des états logiques, immatériels donc non-transmissibles, en un signal numérique (ou analogique), nécessite l'utilisation d'un codage.

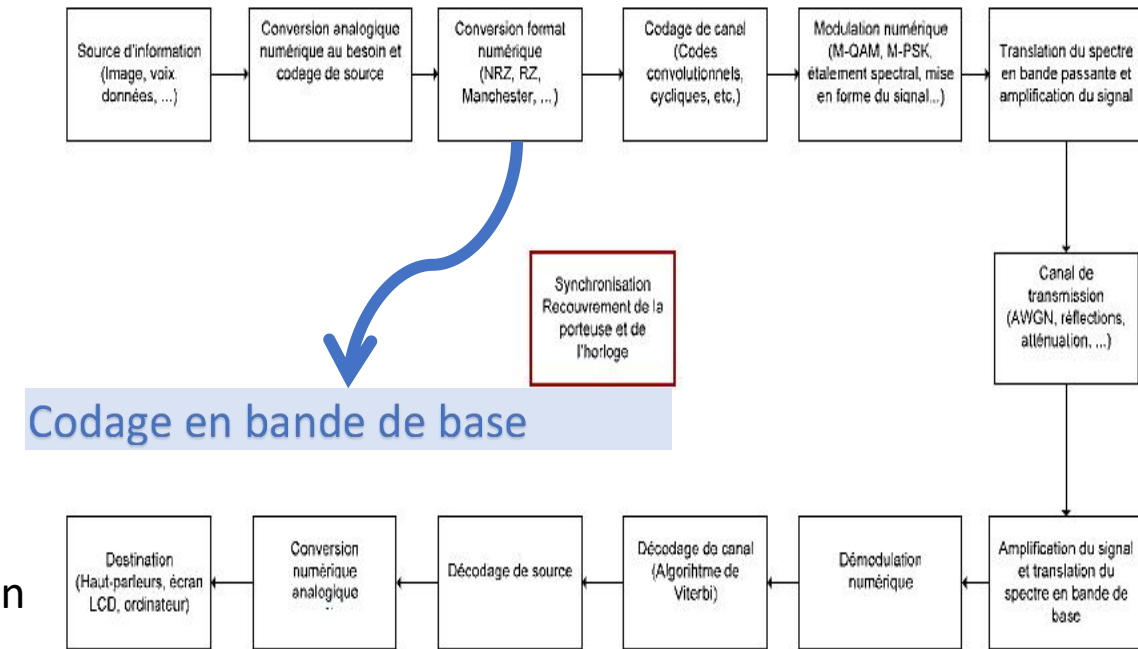
Moduler ou pas ? :

La question de la modulation se pose lorsque :

- l'on veut faire transmettre plusieurs informations simultanément dans le même canal de transmission ;
- l'on veut transmettre l'information à des distances importantes
- l'on veut diminuer le bruit dont est affectée l'information lors de sa transmission.

La modulation consiste alors à adapter l'information à transmettre à un canal de communication mais ce n'est pas une obligation.

Moduler, c'est le moyen de séparer des informations provenant de différentes sources et ayant le même spectre qui utilisent le même support de transmission de façon à permettre à différents émetteurs de retrouver l'information qui les concerne.

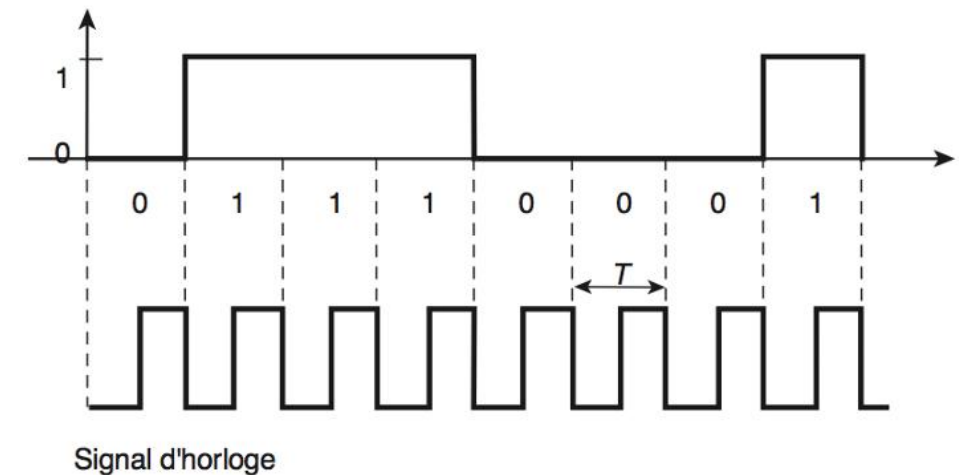
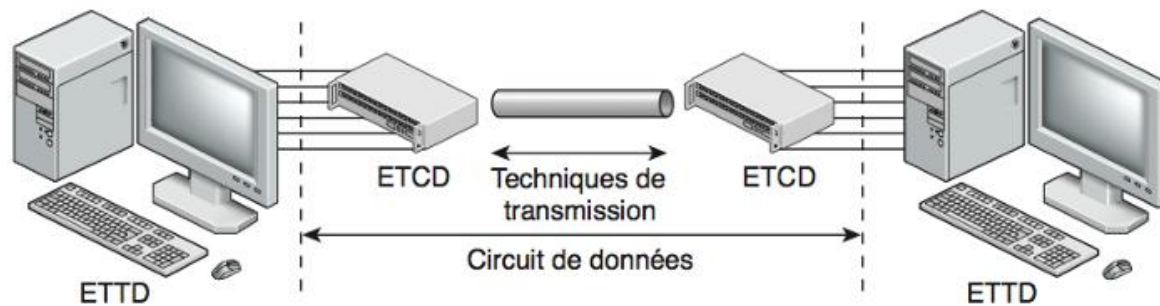


1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande de base

L'ETTD (équipement terminal de traitement des données) fournit à l'ETCD (équipement de terminaison du circuit de données) régulièrement dans le temps, les données à trans mettre. L'ETCD les émet sous forme d'un signal à deux valeurs (correspondant à 0 et 1), appelé message de données synchrone.



Si la distance entre les deux ETCDs le permet, le signal numérique est transmis directement, la transmission est appelée dans ce cas **bande de base** (dans la même bande du signal original. Dans le cas contraire, le signal est modulé et la transmission est appelée en large (ou étroite) bande ou en **bande transposée**.

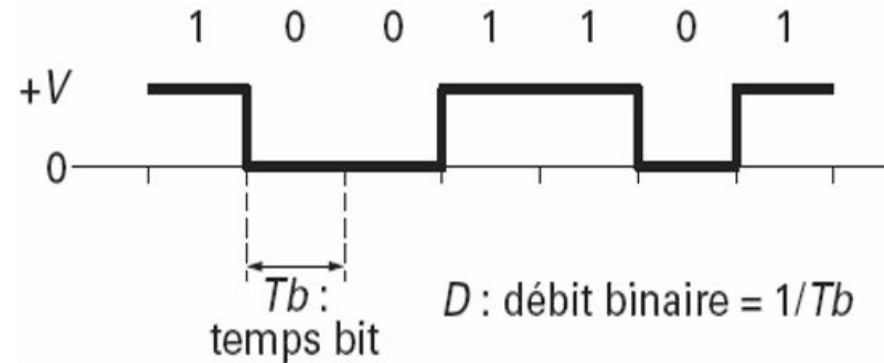
La transmission en bande de base rencontrée principalement dans les réseaux locaux permet d'obtenir des circuits de données à grand débit et faible portée (débits supérieurs à 1 Mbit/s pour des distances inférieures à 1 Km) en utilisant directement des supports physiques : de types métallique (paires torsadées ou câble coaxiaux) ou optique avec l'adjonction de répéteurs disposés sur des intervalles allant de 500 mètres à quelques kilomètres.

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande de base

La transmission est dite en bande de base si elle ne subit aucune transposition de fréquence par modulation (codage canal).



Le signal est envoyé directement sur le canal après **Codage en ligne** avec durée de bit T_b constante sans passer par un codage canal.

Remarques

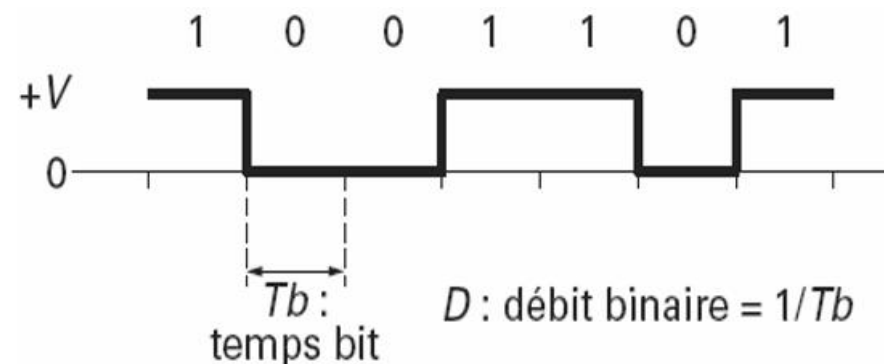
- Les fréquences initiales du signal émis sont préservées. La transmission en **bande de base** ne peut donc par essence être utilisée que sur support **filaire**.
- Les signaux **bande de base** sont sujets à une **atténuation** dont l'importance dépend du support employé et doivent donc être régénérés périodiquement sur une longue distance.
- Exemples : Signaux électriques et lumineux : câbles USB, Ethernet, fibres optiques, etc...
- Bande transposée (ou large bande) : Ondes électromagnétiques, signaux électriques et optiques : réseau hertzien, infra-rouge, laser, câbles ADSL, etc.

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande de base

La transmission est dite en bande de base si elle ne subit aucune transposition de fréquence par modulation (codage canal).



Le signal est envoyé directement sur le canal après **Codage en ligne** avec durée de bit T_b constante sans passer par un codage canal.

- Le débit binaire D se définit comme étant le nombre de bits transmis par seconde. Le "débit binaire" $D=1/T_b$ s'exprime en "bits par seconde".

$$D = R \log_2(V) = R \frac{\ln(V)}{\ln(2)} = R \frac{\ln(M)}{\ln(2)}$$

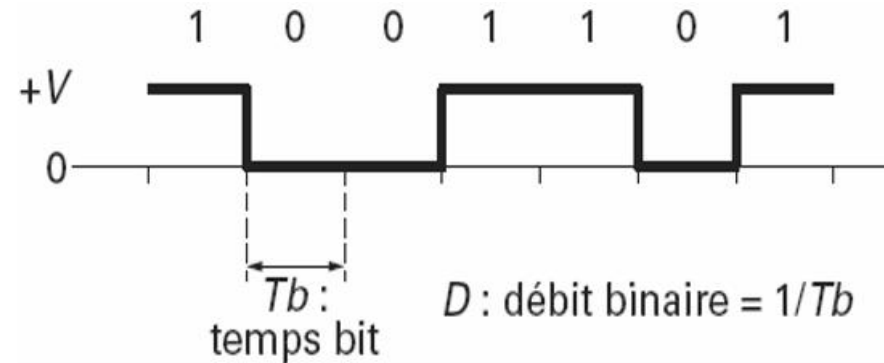
- Un symbole est un élément d'un alphabet.
- Si M (ou V) est la taille de l'alphabet, le symbole est alors dit M -aire.
- Lorsque $M=2$, le symbole est dit binaire. En groupant, sous forme d'un bloc, n symboles binaires indépendants, on obtient un alphabet de $M = 2^n$ symboles.
- Un symbole M -aire véhicule l'équivalent de $n = \log_2 M$ bits.

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande de base

La transmission est dite en bande de base si elle ne subit aucune transposition de fréquence par modulation (codage canal).



Le signal est envoyé directement sur le canal après **Codage en ligne** avec durée de bit T_b constante sans passer par un codage canal.

- Le débit binaire D se définit comme étant le nombre de bits transmis par seconde. Le "débit binaire" $D=1/T_b$ s'exprime en "bits par seconde".

$$D = R \log_2(V) = R \frac{\ln(V)}{\ln(2)} = R \frac{\ln(M)}{\ln(2)}$$

- La 'rapidité de modulation R ' se définit comme étant le nombre de changements d'états par seconde d'un ou de plusieurs paramètres modifiés simultanément. Elle s'exprime en Bauds.

$$R = 1/T = D/n$$

avec

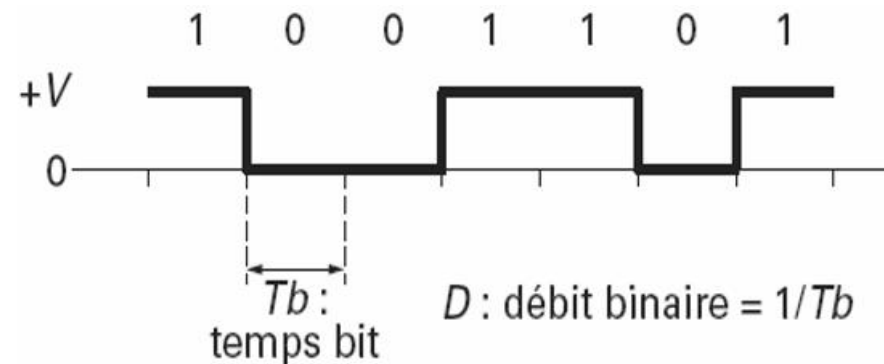
$$T = n T_b \text{ et } n = \log_2(V)$$

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande de base

La transmission est dite en bande de base si elle ne subit aucune transposition de fréquence par modulation (codage canal).



Exemple d'application :

On considère un canal de transmission numérique de débit binaire 9600 bits/s.

- Quelle rapidité de modulation est nécessaire si les signaux transmis sont binaires ?

$$D = R \log_2 V = R \frac{\ln V}{\ln 2} \rightarrow \text{Signaux transmis sont binaires} \Rightarrow \text{rapidité de modulation} = \text{débit binaire} \rightarrow R = 9600 \text{ bits/s.}$$

- Quelle doit être la valeur minimale du rapport S/B, si la largeur de la bande passante de la liaison est de 1000 Hz, afin d'obtenir ce même débit binaire?

$$C = B * \log_2 \left(1 + \left(\frac{S}{N} \right) \right) \text{ bits/s} \rightarrow 9600 = 1000 \log_2(1+S/N) \text{ et } S/N_{\text{db}} = 775 \text{ d'ou } S/B = 29 \text{ dB}$$

- Reprendre ces questions pour un signal quadrivalent ($V=4$) au lieu de bivalent ?

$V=4$, chaque valeur du signal sur le canal de transmission peut être utilisé pour transporter 2 bits $\rightarrow D = 2 R \rightarrow R = 4800$ bauds

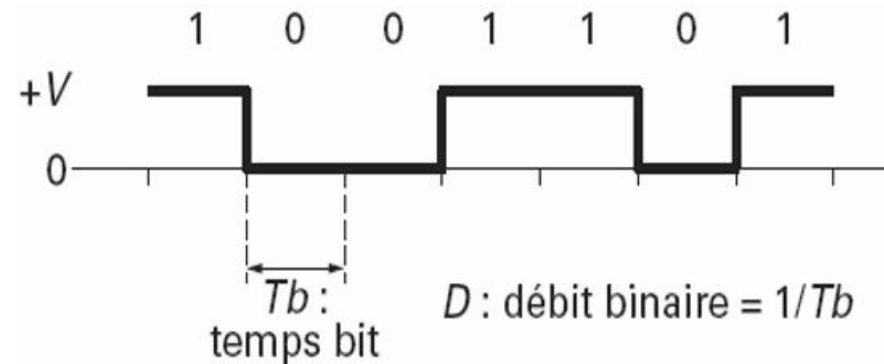
Même SNR.

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande de base

La transmission est dite en bande de base si elle ne subit aucune transposition de fréquence par modulation (codage canal).



Exemple d'application :

Soit une ligne téléphonique analogique de fréquence extrême de la bande passante 300 - 3400 Hz. La rapidité de modulation est de 1200 bauds et les signaux sont de valence 16.

- Quel est le débit binaire de la ligne ? $D = R \log_2 V \rightarrow D = 1200 * 4 = 4800 \text{ bit/s}$

- On suppose que la ligne présente un rapport et S/N_{db} de 34 dB. Quelle est la capacité théorique de cette ligne?

$C = B * \log_2(1 + (S/N))$; $S/N = 2511.88$ et $C = 35 \text{ kbit/s}$

- On veut numériser la voix téléphonique en utilisant la méthode MIC (modulation impulsion et codage), calculer la valeur du débit de la numérisation de la parole sachant que l'échantillonnage a lieu tous les 125 micro-secondes et que le codage se fait sur 8 bits.

$T_e = 125 \text{ micro-secondes} \rightarrow f_e = 8000 \text{ Hz} \rightarrow \text{Débit de la numérisation} = \text{Nombre de bits par échantillon} / T_e = 8000 \text{ échantillons/s} * 8 \text{ bits/échantillon} = 64\,000 \text{ bit/s} = 64 \text{ kbit/s}$

c) Que peut-on faire pour réduire le débit? Quel est l'inconvénient de cette méthode? **Réduire le débit = compression mais peut induire une perte de qualité audio.**

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

Le numérique emploie un support physique, généralement des signaux de tensions, pour transférer des données. Cette conversion des états logiques, immatériels donc non-transmissibles, en un signal numérique (ou analogique), nécessite l'utilisation d'un codage.

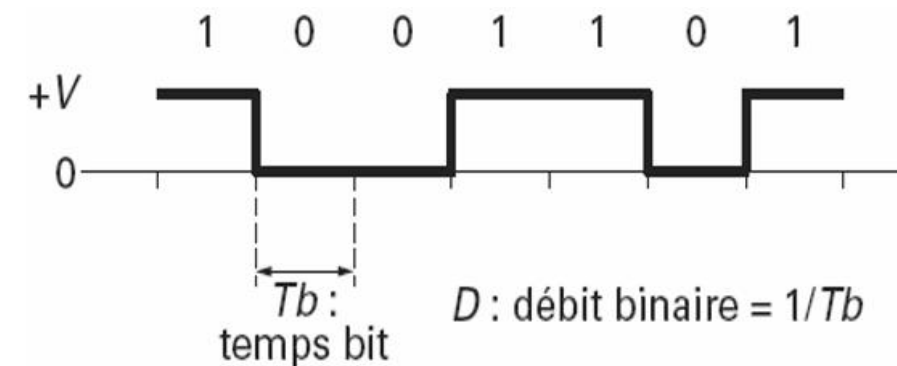
Le codage établit la correspondance entre un état logique (0 ou 1), ou un groupe d'états logiques, et une valeur physique

Pour transmettre ces états logiques, on les code en leur associant un niveau de tension, et ce sont les états électriques qui seront effectivement transmis sur le support de transmission choisi.

Après codage électrique, on a par exemple à transmettre des états électriques de durée élémentaire T_b

Codage en ligne : Consiste à adapter la forme du signal à la ligne, ou plus généralement au milieu de propagation.

L'évaluation et le choix d'un code en ligne se font en fonction de la densité spectrale du code et la résistance au bruit.



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

Le numérique emploie un support physique, généralement des signaux de tensions, pour transférer des données. Cette conversion des états logiques, immatériels donc non-transmissibles, en un signal numérique (ou analogique), nécessite l'utilisation d'un codage.

Le codage établit la correspondance entre un état logique (0 ou 1), ou un groupe d'états logiques, et une valeur physique

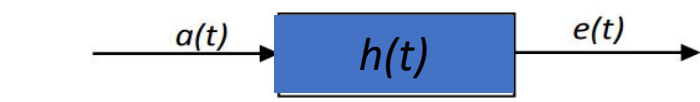
Codage en ligne : Consiste à adapter la forme du signal à la ligne, ou plus généralement au milieu de propagation. L'évaluation et le choix d'un code en ligne se font en fonction de la densité spectrale du code et la résistance au bruit.

Le codeur en ligne génère le signal $e(t)$ ayant l'expression suivante :

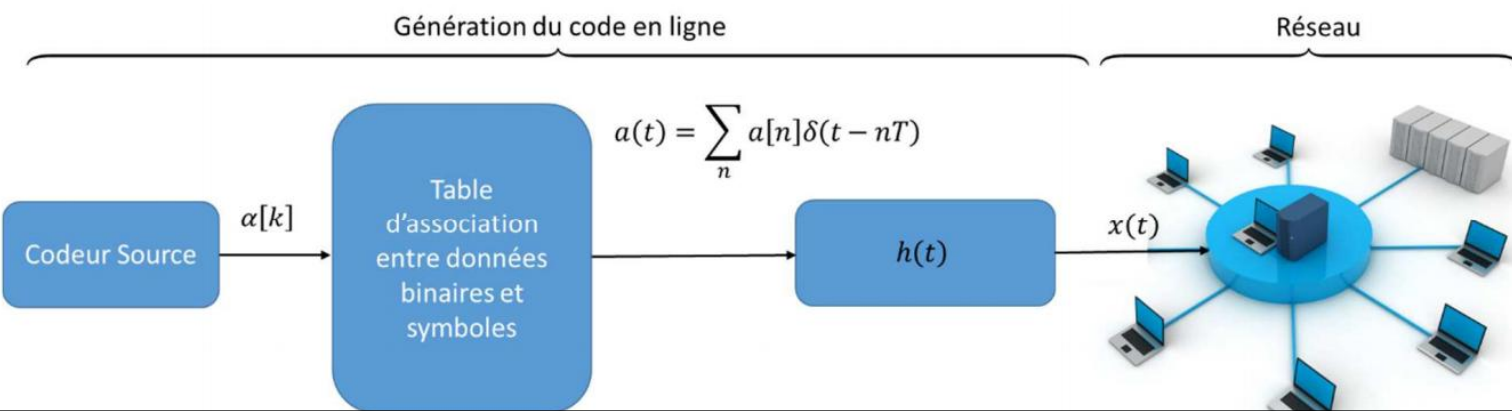
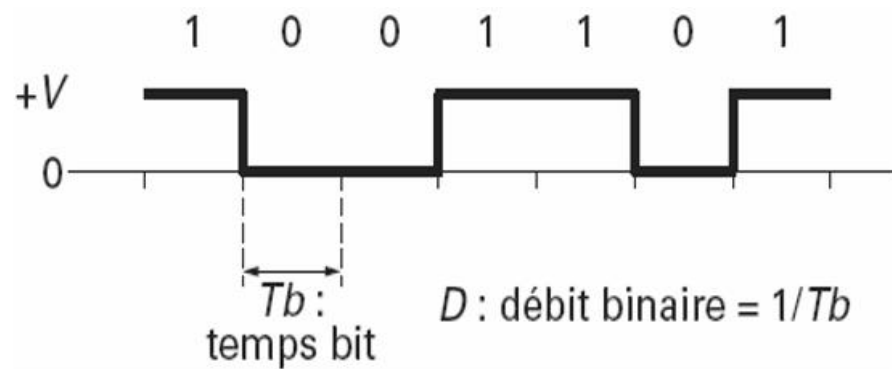
$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT_b); \quad m = 0,1$$

Les signaux $h_m(t)$ peuvent aussi s'exprimer en fonction d'une forme d'onde unique

$$e(t) = \sum_k a_m h(t - kT_b); \quad m = 0,1$$



avec $a(t) = \sum_k a_m \delta(t - kT_b)$

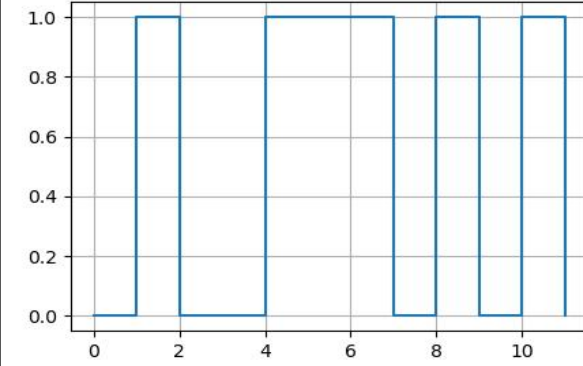


1. Transmission Numérique en bande de base

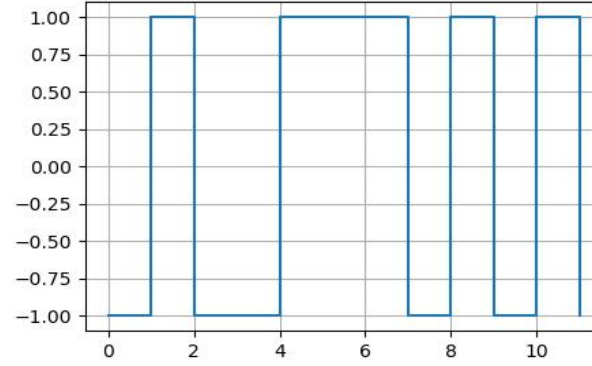
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

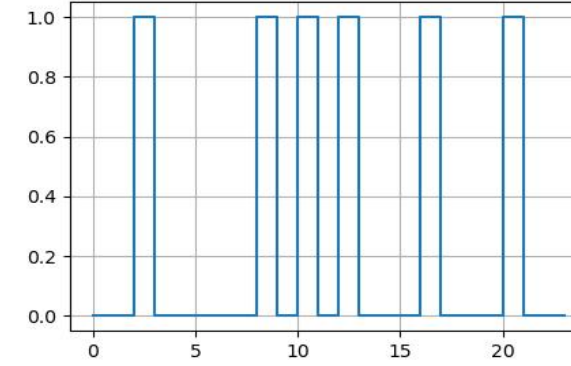
NRZ Unipolaire



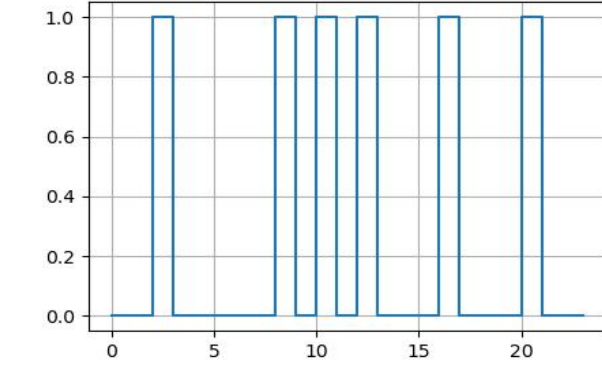
NRZ Polaire



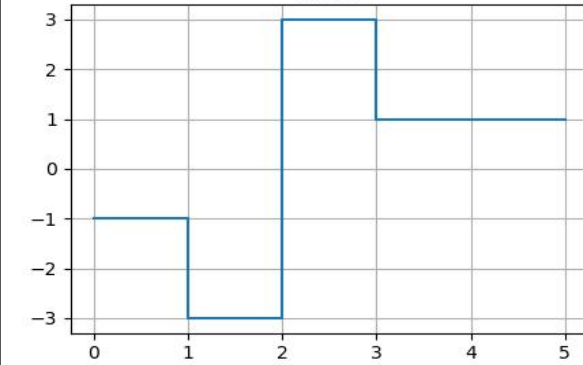
RZ Unipolaire



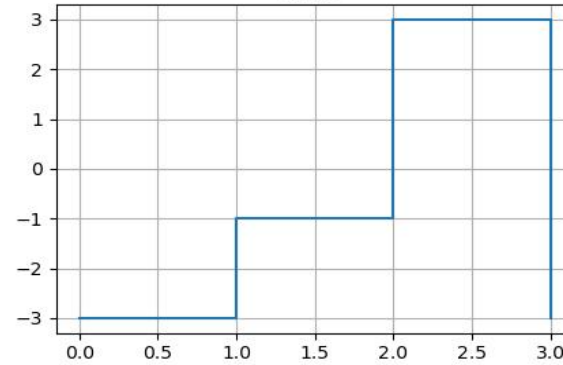
RZ Polaire



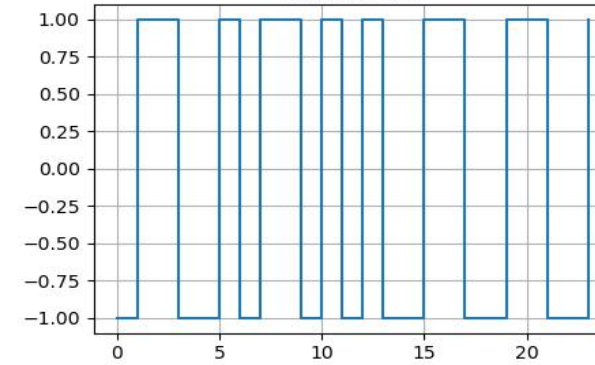
PAM4



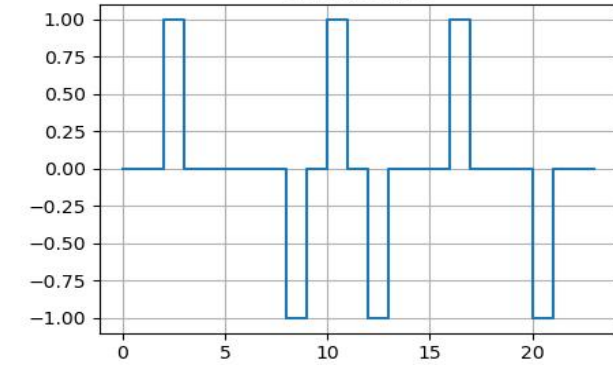
PAM8



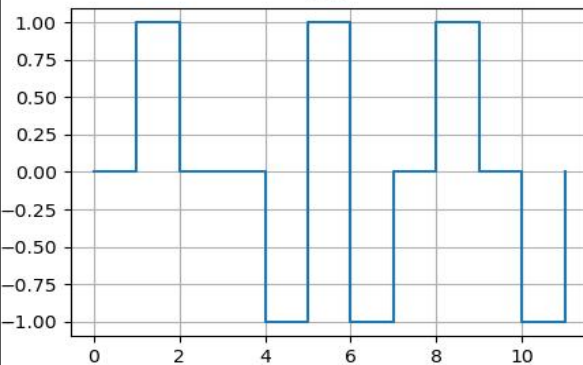
Manchester



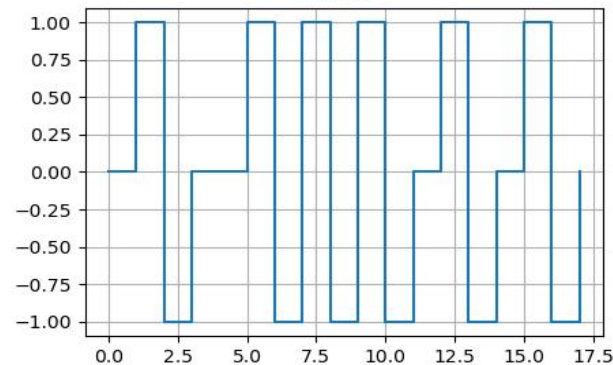
RZ Bipolaire



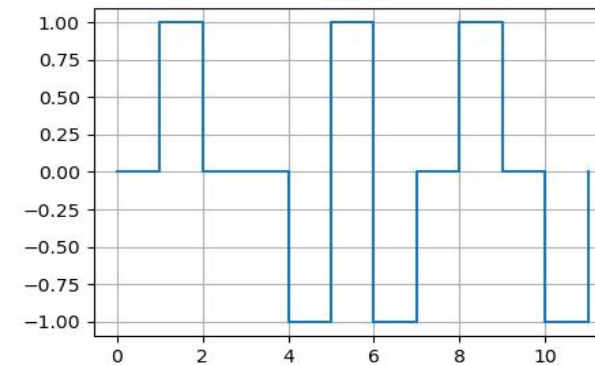
AMI



Miller



HDB3



1. Transmission Numérique en bande de base

Codage en ligne

Codage	Utilisation	Avantages	Inconvénients	Capacité de Détection d'Erreurs	Efficacité Spectrale	Consommation d'Énergie
NRZ Unipolaire	RS-232, stockage	Simple, faible coût	Mauvaise synchronisation, dérive DC	Aucune	Élevée (1 bit/symbol)	Faible (peu de transitions)
NRZ Polaire	USB, RS-422	Pas de composante continue	Mauvaise synchronisation	Aucune	Élevée (1 bit/symbol)	Faible (peu de transitions)
RZ Unipolaire	Anciennes transmissions	Meilleure synchronisation	Double bande passante	Faible	Moyenne (0.5 bit/symbol)	Élevée (retour à zéro consomme plus d'énergie)
RZ Polaire	Télécommunications	Bonne synchronisation	Moins efficace sur longue distance	Faible	Moyenne (0.5 bit/symbol)	Élevée (retour à zéro constant)
Code 4-Aires	PAM-4, fibre optique	Réduit la bande passante	Plus sensible aux erreurs	Faible	Très Élevée (2 bits/symbol)	Élevée
Code 8-Aires	Transmissions à très haut débit	Excellente efficacité spectrale, réduction de la bande passante	Sensible au bruit, complexité élevée	Moyenne	Très Élevée (4 bits/symbol)	Très Élevée
Manchester	Ethernet 10BASE-T, RFID	Synchronisation parfaite	Double la bande passante	Bonne (transition systématique)	Faible (0.5 bit/symbol)	Très Élevée (transition à chaque bit)
RZ Bipolaire	Réseaux télécom	Évite la dérive DC	Utilise plus de bande passante	Moyenne	Moyenne (0.5 bit/symbol)	Élevée (plus de transitions)
AMI	Télécom (T1, E1)	Pas de composante continue	Peut perdre la synchronisation avec trop de 0	Moyenne	Élevée (1 bit/symbol)	Faible (codage bipolaire réduit la puissance)
Miller	RFID, cartes à puce	Bonne synchronisation, réduit bande passante	Complexe à implémenter	Moyenne	Moyenne (0.5-1 bit/symbol selon transitions)	Moyenne (moins de transitions que Manchester)
HDBn	Télécom (E1, T1)	Évite longues séquences de 0	Complexe	Bonne	Élevée (1 bit/symbol)	Faible à Moyenne (moins de transitions)
8B/10B	PCIe, Fibre Channel	Très bonne détection d'erreurs	20% d'overhead	Très Bonne (codage redondant)	Moyenne (0.8 bit/symbol, 80%)	Moyenne à Élevée (plus de transitions pour équilibrer le signal)
64B/66B	Ethernet 10G+, Fibre optique	Meilleure efficacité (3%overhead), bonne détection d'erreurs	Plus complexe que 8B/10B	Très Bonne (bits de synchronisation)	Très Élevée (0.97 bit/symbol, 97%)	Moyenne (moins de transitions que 8B/10B)

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

Les signaux $s_m(t)$ peuvent aussi s'exprimer en fonction d'une forme d'onde unique : $e(t) = \sum_k a_k h(t - kT_b)$; $k = 0, 1$



Rappelons que le message numérique est constitué par une suite stationnaire d'éléments binaires a_k stationnaires au sens large.

- $\mu_a = E\{a_k\}$ est la moyenne statistique
- $\sigma_a^2 = E\{(a_k - \mu_a)^2\}$ est la variance
- $C_a(k) = E\{(a_n - \mu_a)(a_{n-k} - \mu_a)\}$ est l'autocorrélation statistique des symboles centrés a_k (voir vidéo)

$$S_a(f) = TFTD[R_a(k)] = TFTD[C_a(k) + \mu_a^2]$$

$$S_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [C_a(k) + \mu_a^2] e^{-2\pi j f k T_b} = C_a(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_a(k) \cos(2\pi f k T_b) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_a^2 e^{-2\pi j f k T_b}$$

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_a(k) \cos(2\pi f k T_b) + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

1. Codes en lignes à symboles indépendants

Les symboles a_k sont indépendants et ainsi la fonction de corrélation $C_a(k) = 0, \forall k \neq 0$.

$$\rightarrow S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

• Code NRZ unipolaire (Non return to zero)

On associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, T_b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

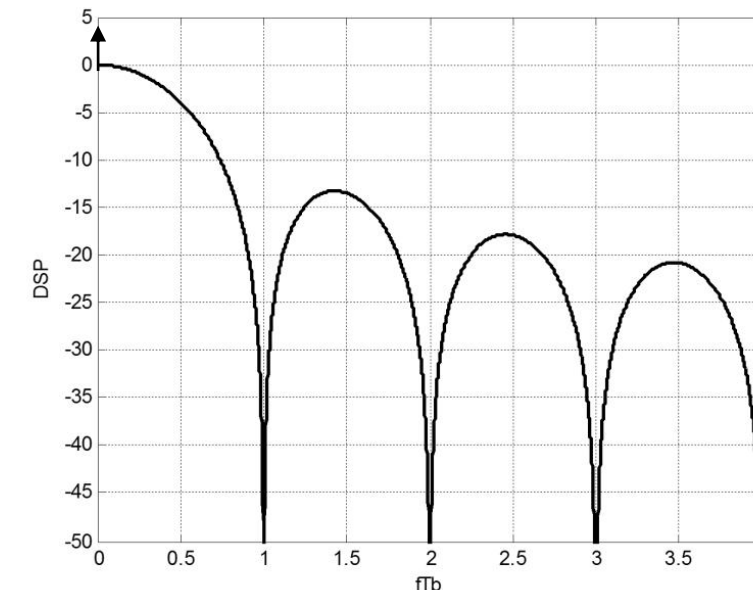
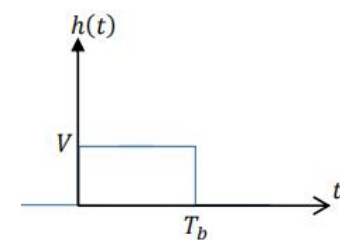
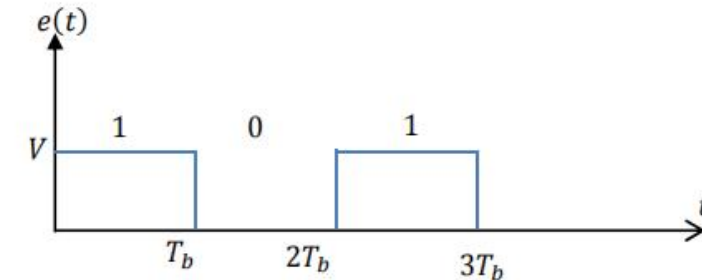
Symboles $a_k = \{1, 0\}$ équiprobables avec avec $p(a_k = 1) = p(a_k = 0) = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_a = 1/2, \sigma_a^2 = 1/4$

$$\rightarrow S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) + \frac{V^2}{4} \text{sinc}^2(T_b f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

$$S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) + \frac{V^2}{4} \delta(f)$$

Avantage du code NRZ

- Simplicité à mettre en œuvre et bonne efficacité spectrale jusqu'à de 2 bits / Hz
- Bande spectrale moindre que RZ
- Aucun problème de chute de signal



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

• Code NRZ unipolaire

On associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, T_b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Symboles $a_k = \{1, 0\}$ équiprobables avec avec $p(a_k = 1) = p(a_k = 0) = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_a = 1/2, \sigma_a^2 = 1/4$

$$\rightarrow S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) + \frac{V^2}{4} \text{sinc}^2(T_b f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

$$S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) + \frac{V^2}{4} \delta(f)$$

Inconvénient du code NRZ

- Possibilité de perte de synchronisation pour les longues chaînes de « 0 » et « 1 ».
- Capacité de correction d'erreur limitée (pour le format NRZ unipolaire)
- Aucun composant d'horloge à synchroniser sur le récepteur → Analyse les changements d'état pour en déduire une horloge.
- Composante DC → Non adapté au AC. Codage de moins en moins utilisé.

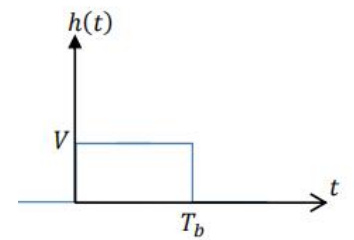
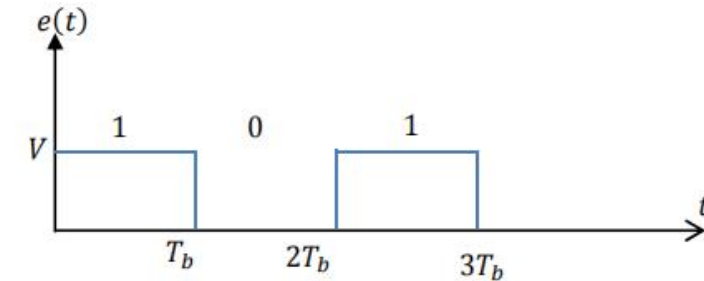
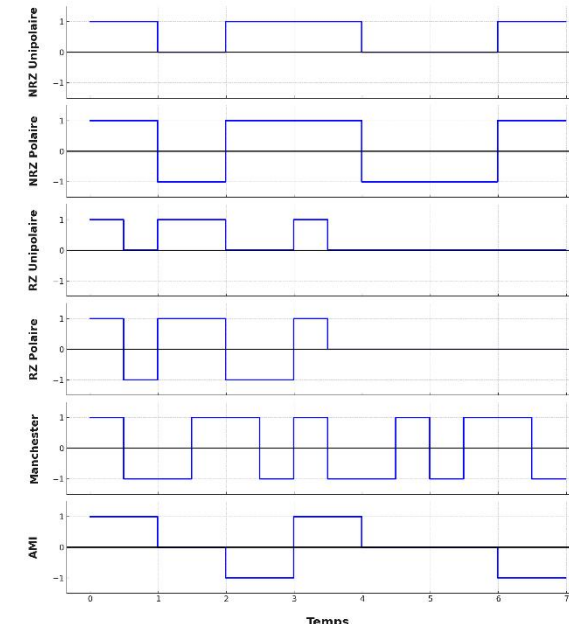


Illustration des Codages en Ligne



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

- Code NRZ **polaire**

On associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que : $\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = -1 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b : $\begin{cases} V & \text{si } t \in [0, T_b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Symboles $a_k = \{1, -1\}$ équiprobables avec avec $p(a_k = 1) = p(a_k = -1) = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1$

$$\rightarrow S_e(f) = V^2 T_b \text{sinc}^2(f T_b)$$

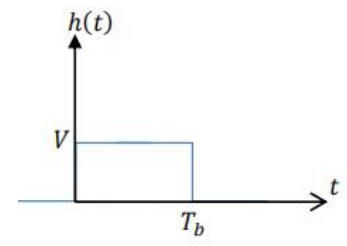
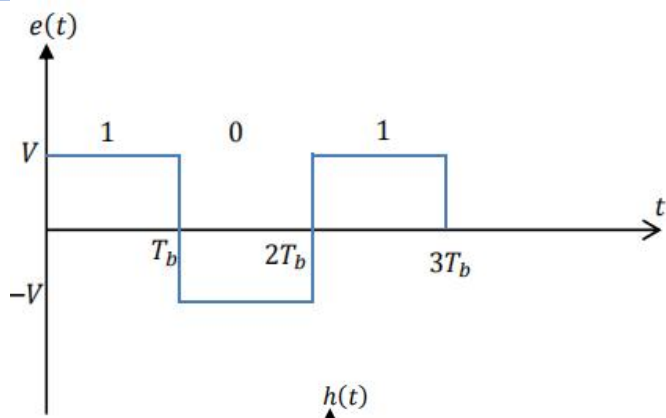
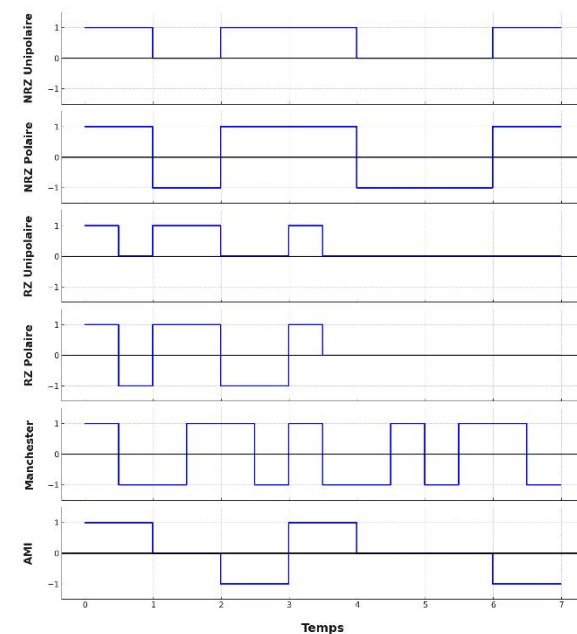


Illustration des Codages en Ligne



Exemple : Un chronogramme du code NRZ binaire 1011001

- Une bonne résistance au bruit;
- Une mauvaise adaptation au support (spectre centré sur la fréquence nulle);
- Peu de transitions, donc difficulté de synchronisation d'horloge.
- Utilisé anciennement dans les microcontrôleurs et les interfaces RS-232

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

- Code NRZ **polaire**

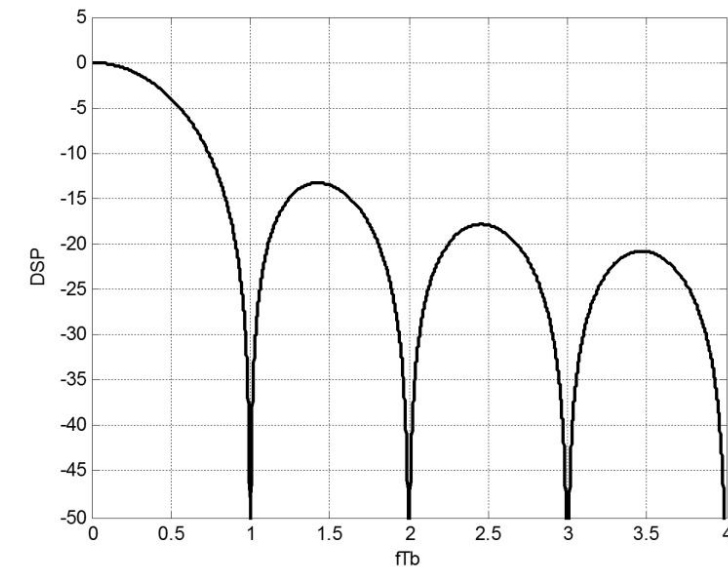
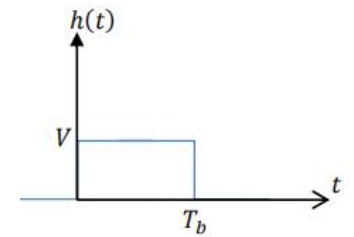
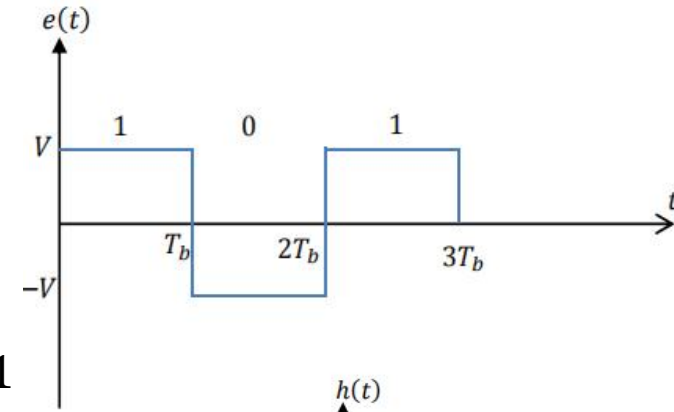
On associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que : $\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = -1 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b : $\begin{cases} V & \text{si } t \in [0, T_b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Symboles $a_k = \{1, -1\}$ équiprobables avec avec $p(a_k = 1) = p(a_k = -1) = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1$

$$\rightarrow S_e(f) = V^2 T_b \text{sinc}^2(f T_b)$$

- Le lobe principal est de largeur $2/T_b$ et contient 91% de la puissance du signal.
- Plus la vitesse de modulation R est faible, plus l'intervalle de temps T_b entre deux symboles successifs est grand et plus l'ordre de grandeur de la bande d'occupation du signal NRZ diminue.



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

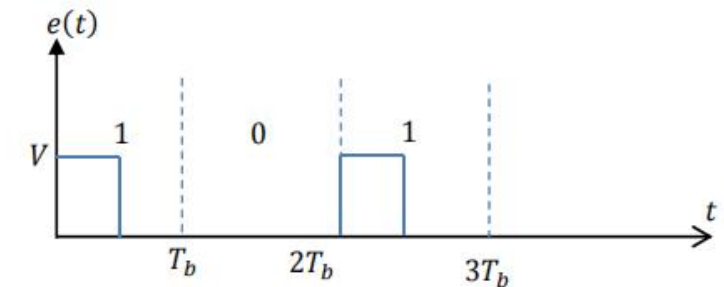
1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

- Code RZ unipolaire (Return to Zero)

on associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$a_k = 1$	si	$\alpha_k = 1$
$a_k = 0$	si	$\alpha_k = 0$



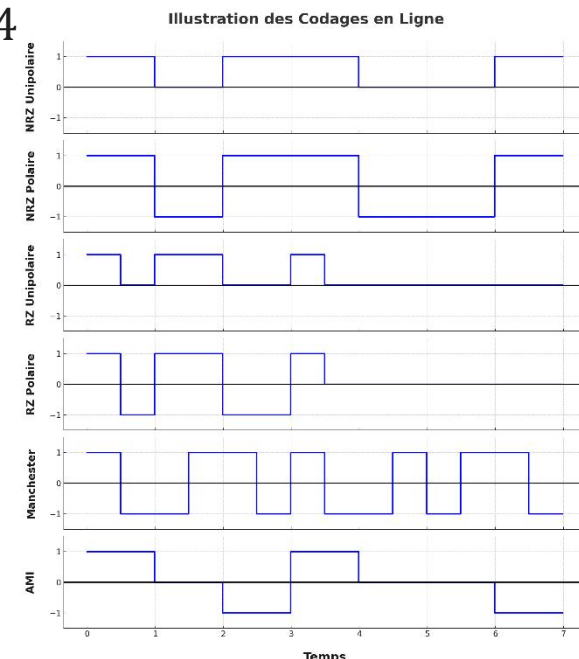
La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :
$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, \lambda T_b] \\ 0 & \text{si } t \in [\lambda T_b, T_b] \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1$$

Symboles $a_k = \{1, 0\}$ équiprobables avec $p(a_k = 1) = p(a_k = 0) = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_a = 1/2, \sigma_a^2 = 1/4$

$$\rightarrow S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) + \frac{V^2}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

$$S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) + \frac{V^2}{16} \delta(f) + \frac{V^2}{16} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k\pi + 1/2)^2} \delta\left(f - \frac{2k + 1}{T_b}\right)$$

- Deux fois plus de bande passante pour atteindre le même débit de données que NRZ
- Présence d'une composante continue



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

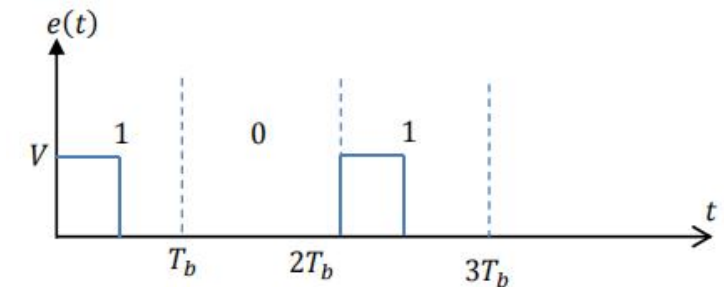
1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

- Code RZ unipolaire (Return to Zero)

on associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$a_k = 1$	si	$\alpha_k = 1$
$a_k = 0$	si	$\alpha_k = 0$



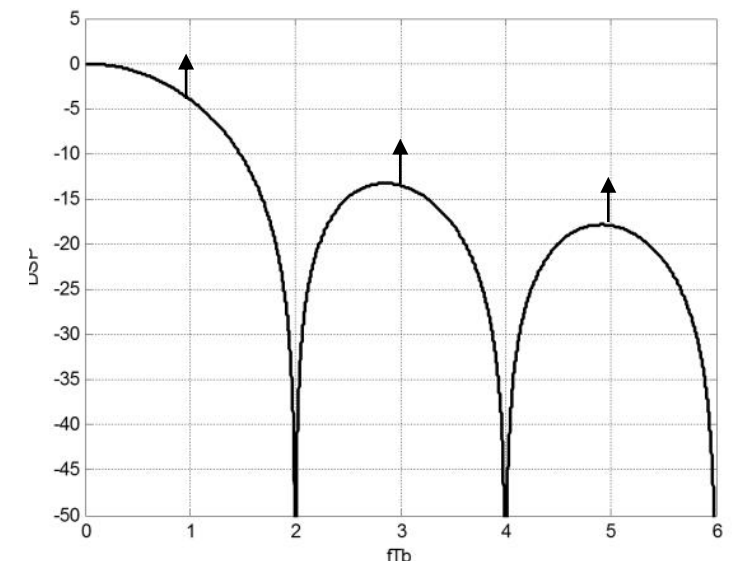
La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :
$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, \lambda T_b] \\ 0 & \text{si } t \in [\lambda T_b, T_b] \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1$$

Symboles $a_k \in \{1, 0\}$ équiprobables avec $p(a_k = 1) = p(a_k = 0) = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_a = 1/2, \sigma_a^2 = 1/4$

$$\rightarrow S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) + \frac{V^2}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

$$S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) + \frac{V^2}{16} \delta(f) + \frac{V^2}{16} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k\pi + 1/2)^2} \delta\left(f - \frac{2k+1}{T_b}\right)$$

- Récupération de l'horloge avec PLL qui verrouille sa phase sur les '1' mais devient instable si suite de zéros ou sinon avant la transmission des données, un motif de synchronisation (ex: alternance de '1' et '0') est envoyé pour aligner l'horloge du récepteur.



1. Transmission Numérique en bande de base

Codage en ligne

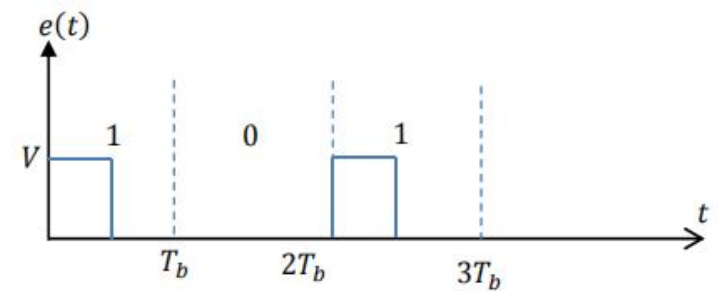
1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

- Code RZ unipolaire (Return to Zero)

on associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$a_k = 1$	si	$\alpha_k = 1$
$a_k = 0$	si	$\alpha_k = 0$



La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

V	si	$t \in [0, \lambda T_b]$
0	si	$t \in [\lambda T_b, T_b]$

avec $0 < \lambda < 1$

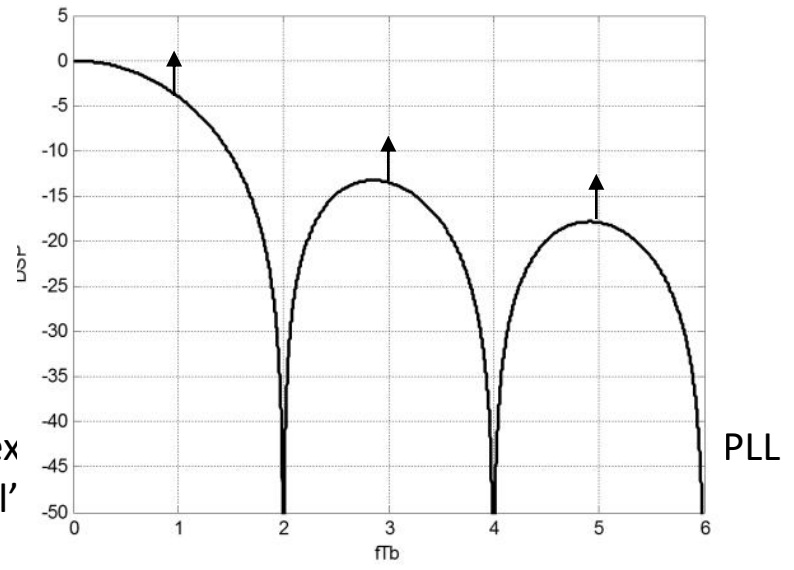
Symboles $a_k \in \{1, 0\}$ équiprobables avec $p(a_k = 1) = p(a_k = 0) = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_a = 1/2, \sigma_a^2 = 1/4$

$$\rightarrow S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) + \frac{V^2}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

$$S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{16} \text{sinc}^2(T_b f / 2) + \frac{V^2}{16} \delta(f) + \frac{V^2}{16} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k\pi + 1/2)^2} \delta\left(f - \frac{2k+1}{T_b}\right)$$

Remarque

- Une PLL (boucle à verrouillage de phase) est un circuit qui s'accroche aux transitions du signal et ex compare le signal reçu avec un oscillateur local et ajuste progressivement la fréquence pour suivre l'
- Scrambling : Mélange les bits de manière pseudo-aléatoire



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

• Code RZ polaire

on associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = -1 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

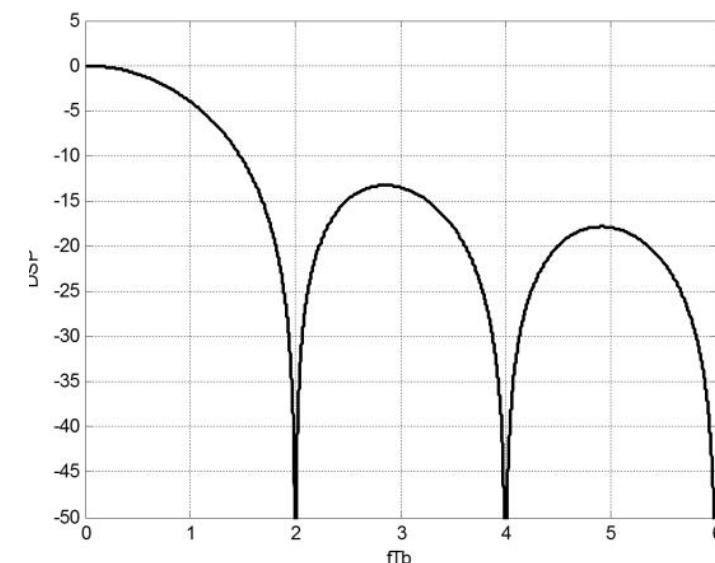
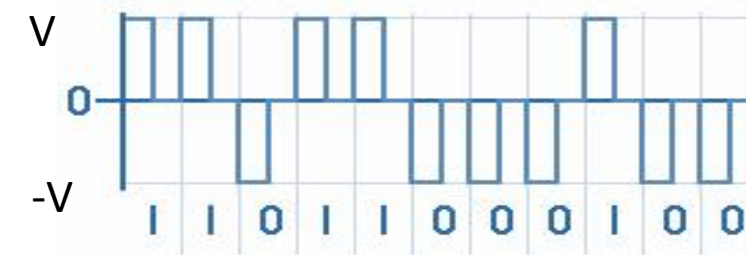
La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, \lambda T_b] \\ 0 & \text{si } t \in [\lambda T_b, T_b] \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1$$

Symboles $a_k = \{1, -1\}$ équiprobables avec $p(a_k = 1) = p(a_k = -1) = \frac{1}{2} \rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1$

$$S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f / 2)$$

- Garanti au moins une transition par bit.
- Il consomme le double de la bande passante
- Récupération de l'horloge par PLL
- Ne nécessite pas l'envoi d'une horloge séparée
- De moins en moins utilisé dans les systèmes modernes



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

- Code Manchester ou Biphase binaire

on associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = -1 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

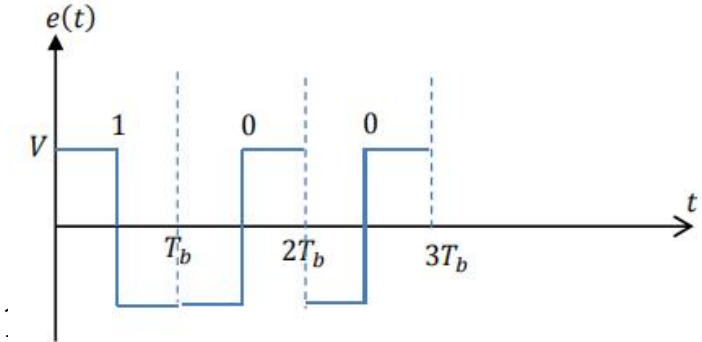
La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$\begin{cases} V & \text{si } t \in \left[0, \frac{T_b}{2}\right] \\ -V & \text{si } t \in \left[\frac{T_b}{2}, T_b\right] \end{cases}$$

Symboles a_k equiprobables $\rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1$

$$\rightarrow S_e(f) = V^2 T_b \sin^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{f T_b}{2}\right)$$

- DSP nulle en $f=0$
- Permettant de décaler le spectre du signal vers les fréquences plus élevées
- Élargissement de la bande passante.
- Détection d'erreurs de transmission (ex : transition au milieu manquante ou >1 , direction de la transition).
- Beaucoup de transitions, donc facilité de synchronisation d'horloge (pas d'envoi d'horloge séparée)
- Ethernet (IEEE 802.3), Bluetooth, RFID, RS 232, RS 485



forme d'onde $h(t)$

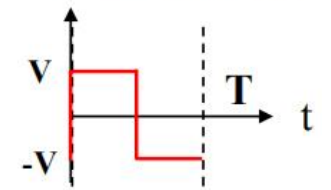
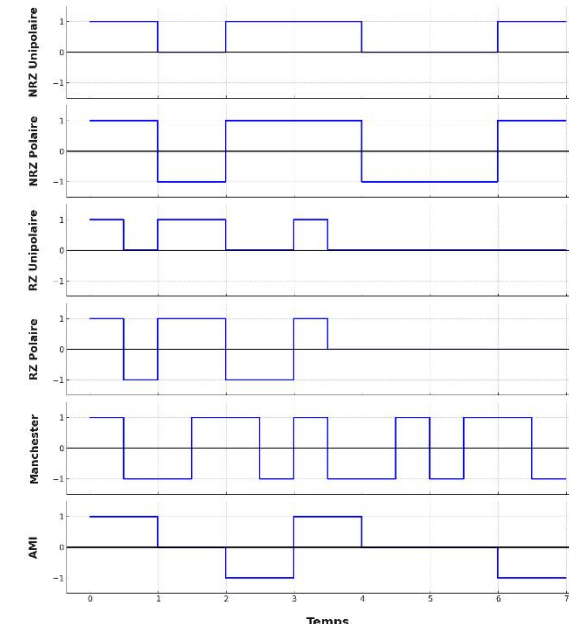


Illustration des Codages en Ligne



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_b} |H(f)|^2 S_a(f)$$

• Code Manchester ou Biphase binaire

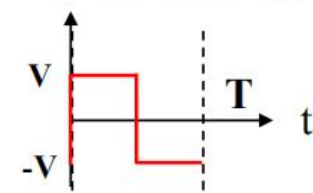
on associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = -1 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$\begin{cases} V & \text{si } t \in \left[0, \frac{T_b}{2}\right] \\ -V & \text{si } t \in \left[\frac{T_b}{2}, T_b\right] \end{cases}$$

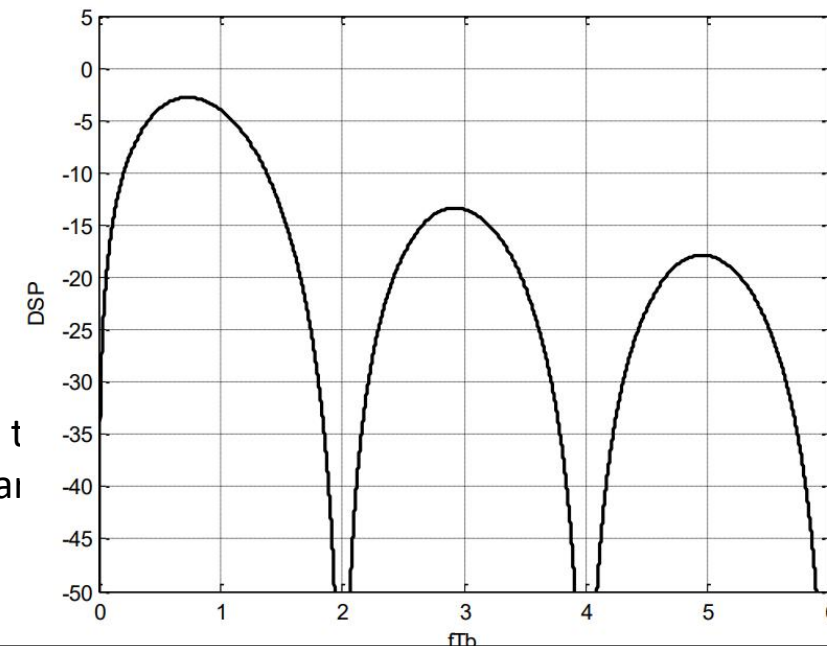
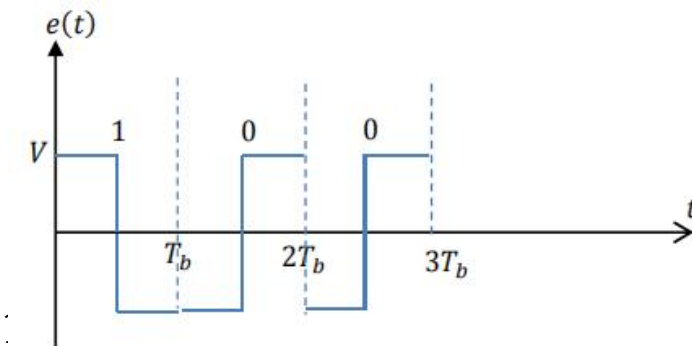
forme d'onde $h(t)$



Symboles a_k equiprobables $\rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1$

$$\rightarrow S_e(f) = V^2 T_b \sin^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{f T_b}{2}\right)$$

- DSP nulle en $f=0$
- Permettant de décaler le spectre du signal vers les fréquences plus élevées
- Élargissement de la bande passante.
- Détection d'erreurs de transmission (ex : transition au milieu manquante ou >1 , direction de la t
- Beaucoup de transitions, donc facilité de synchronisation d'horloge (pas d'envoi d'horloge sépai
- Ethernet (IEEE 802.3), Bluetooth, RFID, RS 232, RS 485



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

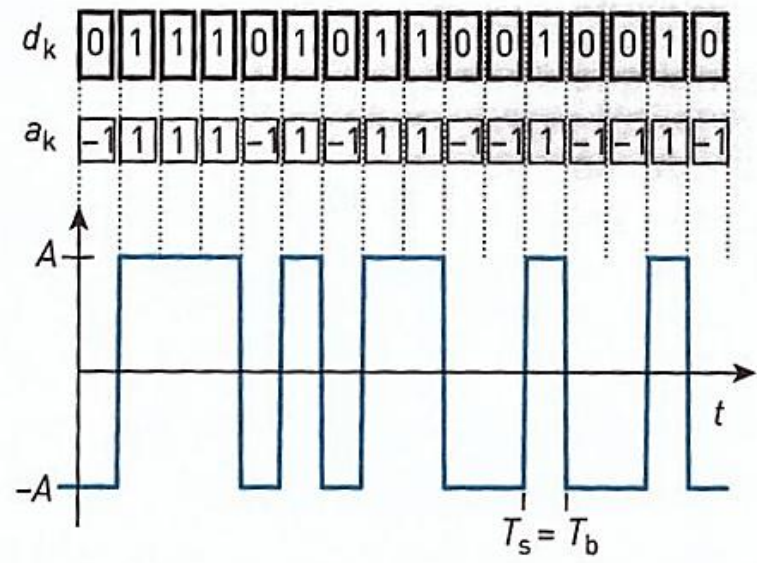
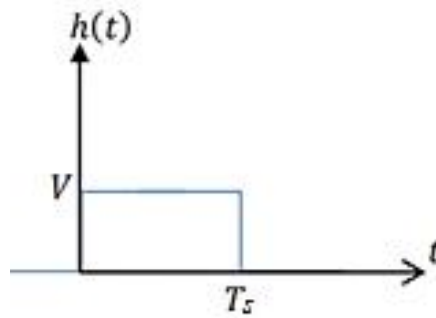
Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

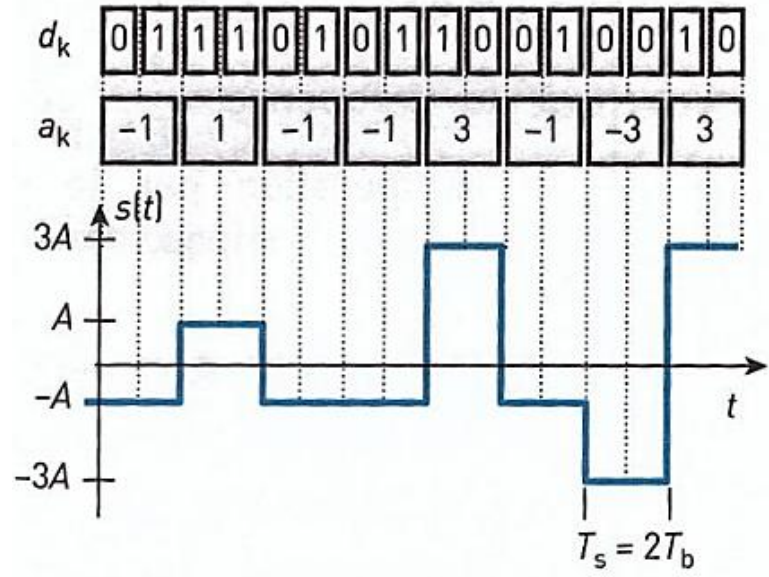
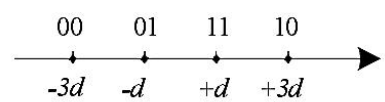
$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_s} |H(f)|^2 S_a(f)$$

- Code M-Aires : Pulse Position Modulation

Il s'agit d'une généralisation du codage polaire NRZ pour transmettre n bits à la fois .Il nécessite donc $M=2^n$ symboles.



$M=4$



Code gray : Deux valeurs successives ne diffèrent que d'un seul bit $\rightarrow G=B \oplus (B \gg 1)$

Exemple : 1011 $\rightarrow$ décalage à droite 0101 $\rightarrow$ XOR : 1101

Binaire $\rightarrow$ 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

Gray $\rightarrow$ 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100

But : Minimiser les erreurs de bits adjacents.

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

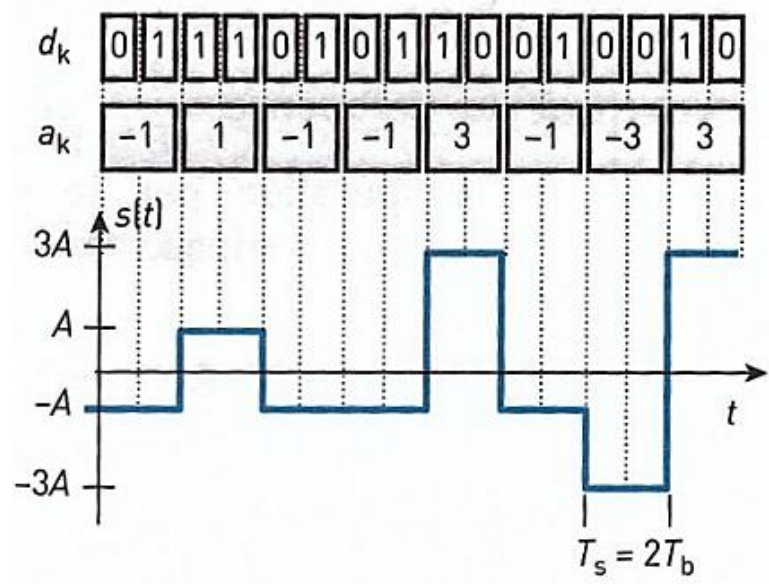
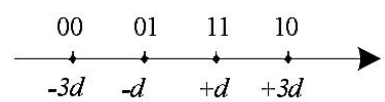
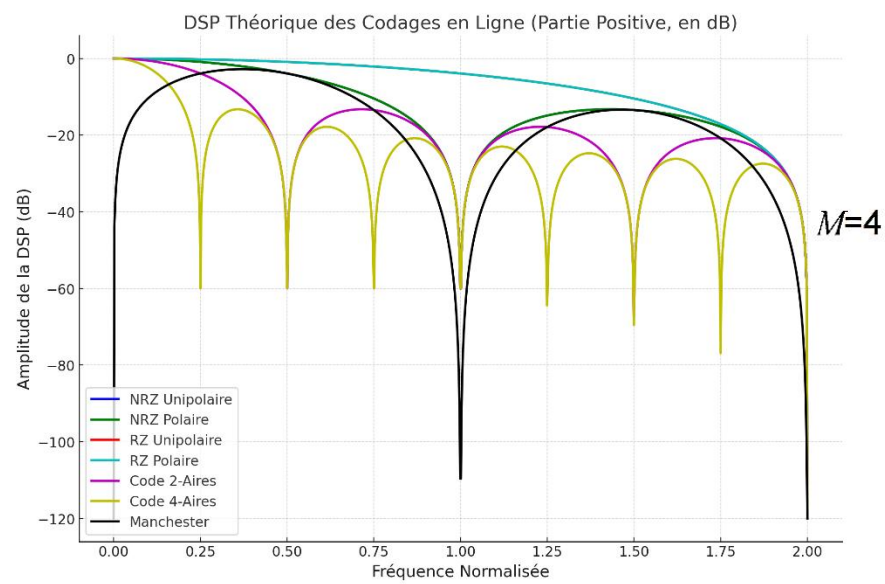
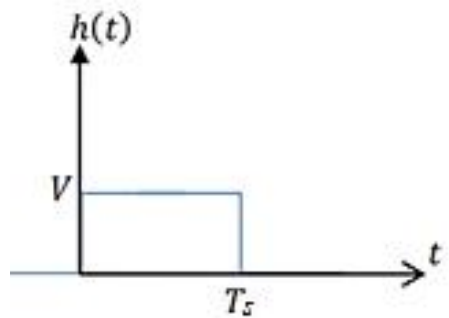
Codage en ligne

1. Codes en lignes à symboles indépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad \text{et} \quad S_e(f) = \frac{1}{T_s} |H(f)|^2 S_a(f)$$

- Code M-Aires : Pulse Position Modulation

Il s'agit d'une généralisation du codage polaire NRZ pour transmettre n bits à la fois .Il nécessite donc $M=2^n$ symboles.



$\mu_a = 0 \Rightarrow S_e(f) = \frac{M^2-1}{3} V^2 T_s \text{sinc}^2(T_s f) \text{ avec } T_s = \log_2(M). T_b, \sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{3}$ Exemple : $\sigma_a^2 = \frac{((-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2)}{4} = 5$

Intérêt : ralentir l'émission des données tout en conservant le débit, bande passante réduite au détriment de la robustesse et de la simplicité.
Adapté aux canaux limités en bande (ex. lignes téléphoniques pour l'ADSL). Mais sensibilité au bruit $\Rightarrow$ SNR requis plus élevé, Risque de DC

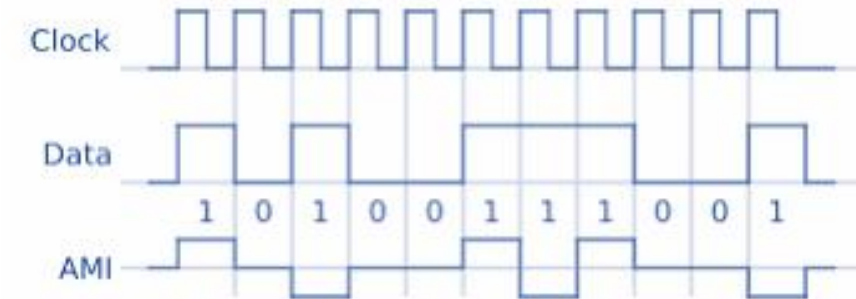
1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

2. Codes en lignes à symboles dépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \textcolor{red}{C}_a(k) \cos(2\pi k f T_b) + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$



- Code NRZ bipolaire ou AMI (Alternate Marked Inversion)

On associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$\begin{cases} a_k = \pm 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, T_b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Symboles a_k dépendants avec $p(a_k = \pm 1) = 1/4$, $p(a_k = 0) = 1/2 \rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1/2$

Les symboles a_k adjacents peuvent avoir les valeurs $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, \mp 1)$, $(0, \pm 1)$, $(0, 0)$

$$\rightarrow E\{a_n a_{n+1}\} = -1/4 \quad p(a_n = \pm 1, a_{n+1} = \mp 1) = 1/4$$

$$\rightarrow S_e(f) = \left(\frac{1}{2T_b} - \frac{1}{2T_b} \cos(2\pi f T_b) \right) |H(f)|^2 = \left(\frac{1}{T_b} \sin^2(\pi f T_b) \right) |H(f)|^2 \quad \text{où } |H(f)|^2 = V^2 T_b^2 \text{sinc}^2(T_b f)$$

- Transitions fréquentes plus fréquentes.
- Support plus étroit, pas de composante DC.
- Détection facile des erreurs : Si deux "1" consécutifs ont le même signe, c'est une erreur.
- Utilisation : réseaux télécoms et les liaisons longue distance.

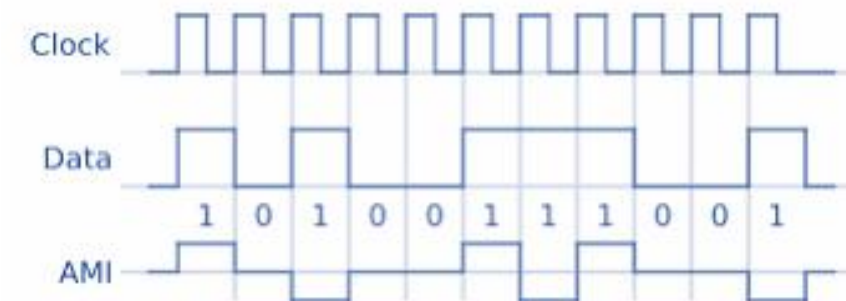
1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

2. Codes en lignes à symboles dépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_a(k) \cos(2\pi k f T_b) + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$



- Code NRZ bipolaire ou AMI (Alternate Marked Inversion)

On associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$\begin{cases} a_k = \pm 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, T_b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

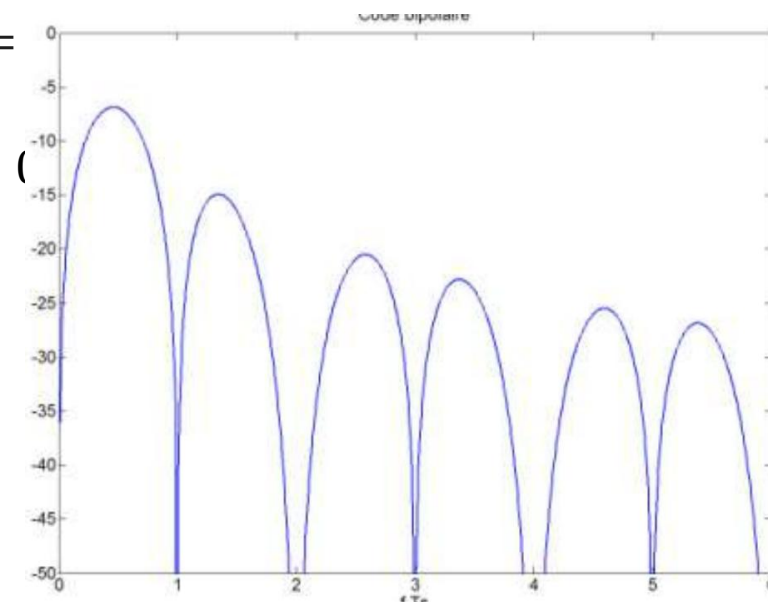
Symboles a_k dépendants avec $p(a_k = \pm 1) = 1/4$, $p(a_k = 0) = 1/2 \rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 =$

Les symboles a_k adjacents peuvent avoir les valeurs $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, \mp 1)$, $(0, \pm 1)$, $(0, 0)$

$\rightarrow E\{a_n a_{n+1}\} = -1/4$ $p(a_n = \pm 1, a_{n+1} = \mp 1) = 1/4$

$\rightarrow S_e(f) = \left(\frac{1}{T_b} \sin^2(\pi f T_b)\right) |H(f)|^2$ où $|H(f)|^2 = V^2 T_b^2 \text{sinc}^2(T_b f)$

- Difficulté de synchroniser si suite de zéros
- Variante améliorée HDB3



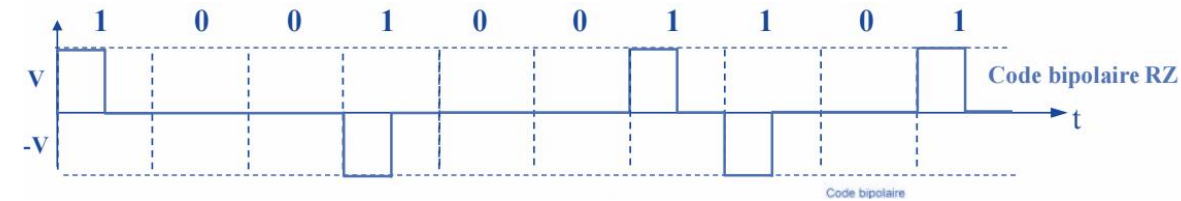
1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

2. Codes en lignes à symboles dépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_a(k) \cos(2\pi k f T_b) + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$



• Code RZ bipolaire

On associe à chaque élément binaire α_k , un symbole a_k tel que :

$$\begin{cases} a_k = \pm 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$\begin{cases} V & \text{si } t \in \left[0, \frac{T_b}{2}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left[\frac{T_b}{2}, T_b\right] \end{cases}$$

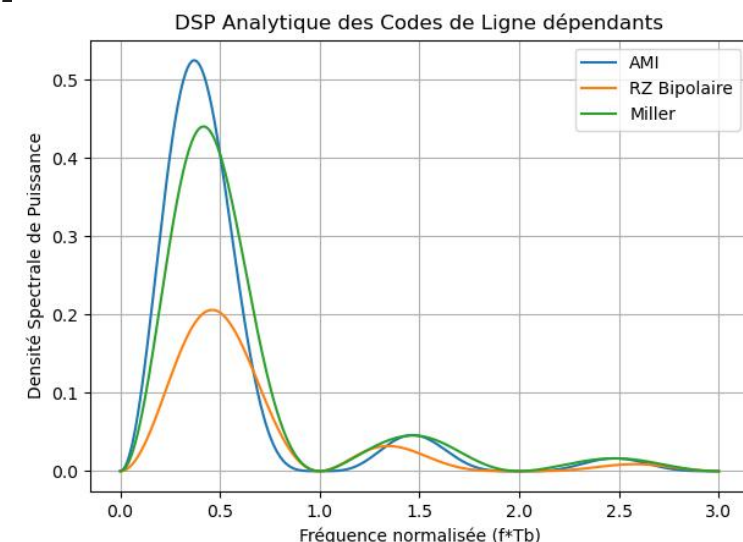
Symboles a_k dépendants avec $p(a_k = \pm 1) = 1/4$, $p(a_k = 0) = 1/2 \rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1/2$

Les symboles a_k adjacents peuvent avoir les valeurs $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, \mp 1)$, $(0, \pm 1)$, $(0, 0)$

$$\rightarrow E\{a_n a_{n\pm 1}\} = -1.1 p(a_n = \pm 1, a_{n\pm 1} = \mp 1) = -1/4$$

$$\rightarrow S_e(f) = \left(\frac{1}{T_b} \sin^2(\pi f T_b)\right) |H(f)|^2 \quad \text{où } |H(f)|^2 = \frac{V^2 T_b^2}{4} \text{sinc}^2(T_b f / 2)$$

- Meilleure synchronisation mais bande passante doublée
- Communication industrielle et aérospatiale.
- Réseaux TDM (Multiplexage par répartition dans le temps) : T1 (1,544 Mbps), E1 (2,048 Mbps).
- Liaisons cuivre historiques (téléphonie, modems). Systèmes nécessitant une faible composante DC.



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

2. Codes en lignes à symboles dépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_a(k) \cos(2\pi k f T_b) + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

- Code HDBn (bipolaire à haute densité d'ordre n)

On interdit plus de n symboles successifs nuls Le (n+1) ième d'une suite est codé par un niveau ±V

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, \lambda T_b] \\ 0 & \text{si } t \in [\lambda T_b, T_b] \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1$$

Code bipolaire : règle d'alternance bipolaire sur les "1" émis

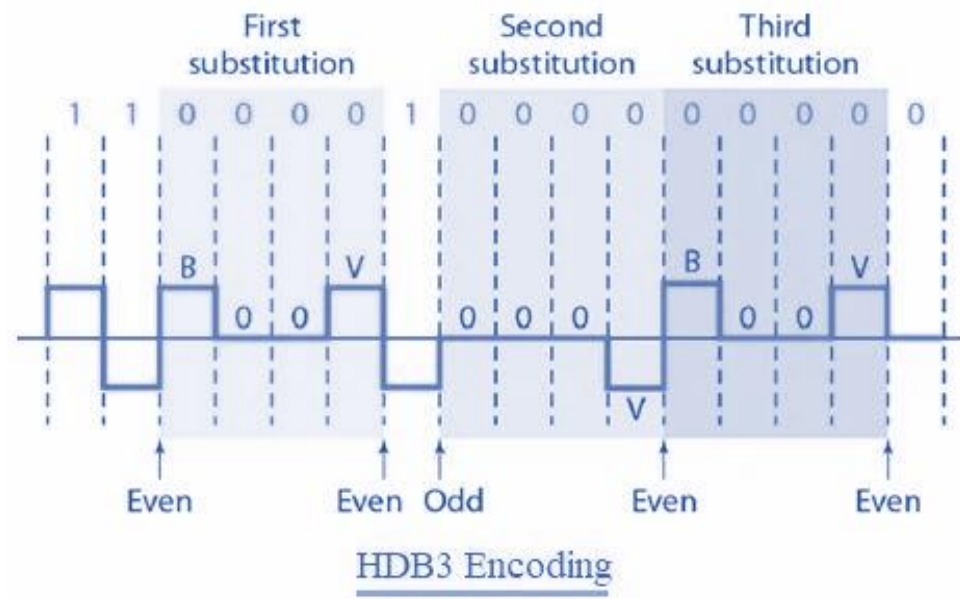
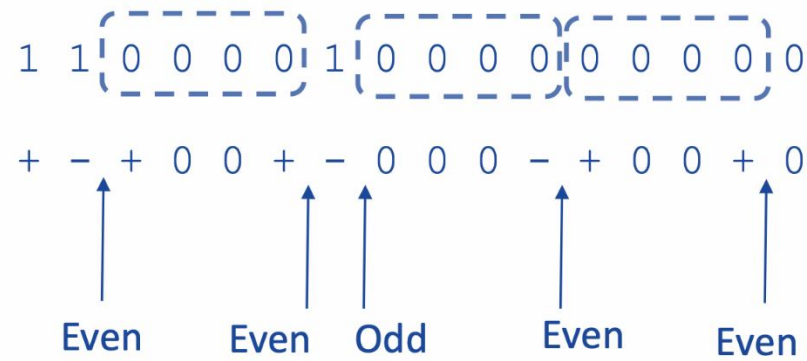
Bits d'entorse en (n+1)ième position (d'où le HDBn) lorsque n+1 "0" consécutifs sont transmis.

Bits de bourrage afin de ne pas confondre un "1" avec un bit d'entorse

Les bits d'entorse respectent la règle d'alternance bipolaire.

- 000V si le nombre de "1" précédent est impair (ou impair) sans changer de polarité
- B00V si le nombre de "1" précédent est pair (ou pair) en changeant de polarité

$$S_e(f) \approx S_e(f)_{AMI}$$



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

2. Codes en lignes à symboles dépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_a(k) \cos(2\pi k f T_b) + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

- Code HDBn (bipolaire à haute densité d'ordre n)

On interdit plus de n symboles successifs nuls Le (n+1) ième d'une suite est codé par un niveau $\pm V$

La forme d'onde $h(t)$ est une fonction rectangulaire d'amplitude V et de durée T_b :

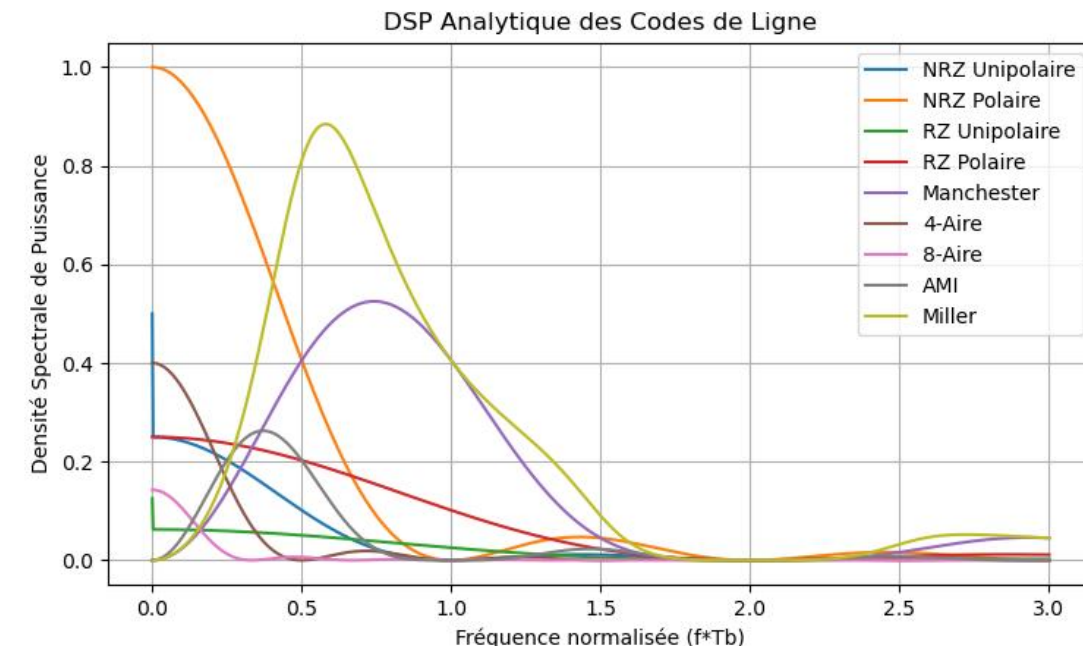
$$h(t) = \begin{cases} V & \text{si } t \in [0, \lambda T_b] \\ 0 & \text{si } t \in [\lambda T_b, T_b] \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \lambda < 1$$

Code bipolaire : règle d'alternance bipolaire sur les "1" émis

Bits d'entorse en (n+1)ième position (d'où le HDBn) lorsque n+1 "0" consécutifs sont transmis.

Bits de bourrage afin de ne pas confondre un "1" avec un bit d'entorse
Les bits d'entorse respectent la règle d'alternance bipolaire.

- Il permet principalement la récupération d'horloge
- Le HDB3 est utilisé dans le RTC (réseau téléphonique commuté)
- Ce code n'introduit pas de bits supplémentaires, seuls certains bits sont modifiés. Débit utile du signal est conservé, bande passante inchangée



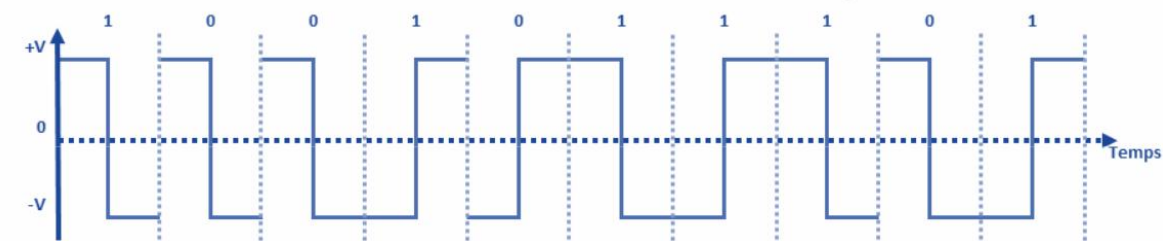
1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

2. Codes en lignes à symboles dépendants

$$S_a(f) = \sigma_a^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_a(k) \cos(2\pi k f T_b) + \frac{\mu_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$



- Code Manchester Différentiel

Le bit 1 est codé par un changement d'état en début d'horloge. Le bit 0 est codé par une conservation de l'état précédent en début d'horloge.

- Mêmes avantages et inconvénients que le code Manchester hormis le fait que ce code est indifférent aux inversions de fils dans le câblage
- Token ring (technologie d'accès au réseau basé sur le principe de la communication au tour à tour)

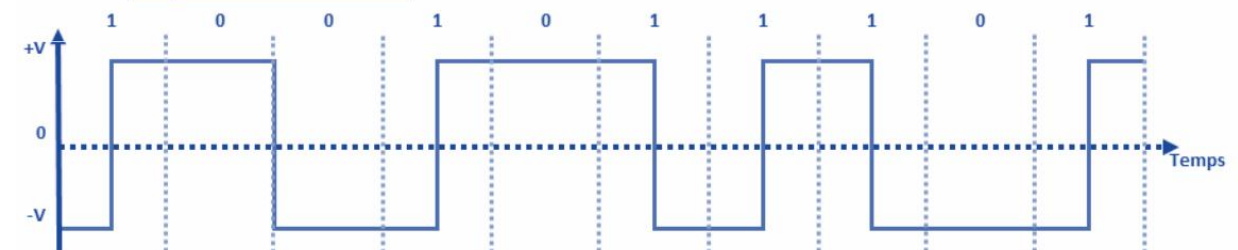
- Code de Miller (Delay Mode)

Le code de Miller s'obtient à partir du codage Manchester dans lequel on supprime une transition sur deux.

- Si le bit de donnée vaut 1, alors on insère une transition au milieu de l'intervalle significatif
- Si le bit de donnée vaut 0, alors pas de transition au milieu de l'intervalle significatif, mais si le bit suivant vaut 0, alors on place une transition à la fin de l'intervalle significatif.

$$S_e(f) = \left(\frac{V^2}{\pi^2 f^2 T_b} \sin^2(\pi f T_b / 2) \right)$$

- Permet des débits élevés sur support à bande passante limitée
- Puissance non nulle est transmise pour la fréquence nulle, ce qui peut introduire des distorsions
- Bon compromis optimal pour les applications nécessitant **synchronisation fiable**, **efficacité spectrale**, et **robustesse au bruit**. Utilisée en RFID



1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

2. Codes en lignes à symboles dépendants

- Code 8B/10B

Coder, à l'aide d'une table de correspondance. Les combinaisons utilisées sont telles que chaque symbole de 10 bits comprend au minimum quatre transitions d'un état logique (*zéro* ou *un*) vers l'autre, et que le flux codé ne présente jamais plus de six fois consécutives le même état logique (*zéro* ou *un*).

- Il y a donc 1024 (2^{10}) valeurs possibles ; seules 256 (2^8) sont utilisées.
- Aucun symbole ne finit par quatre zéros ou ne commence par trois zéros
- Bonne récupération du signal d'horloge en réception à très haut débit
- Equilibrage du nombre de zéros et de uns pour éviter la présence d'un courant continu sur la ligne
- Détection d'erreurs : Certains motifs invalides ne sont jamais générés, facilitant la détection d'erreurs.
- Protocoles de communication à haut débit : PCI Express, Fibre Channel, SATA et Ethernet 1 Gbit/s.

- Code 64B/66B

01 : indique un bloc de données

10 : indique un bloc de contrôle (trame, erreur, régler flux, etc.)

Efficacité améliorée : Codage 8B/10B (80%) → 64B/66B (97%).

1^{er} bloc de 5b/6b

Input		RD = -1	RD = +1	Input		RD = -1	RD = +1
Dx	EDCBA	Output (ABCDEI)		Dx	EDCBA	Output (ABCDEI)	
D.00	00000	100111	011000	D.16	10000	011011	100100
D.01	00001	011101	100010	D.17	10001	100011	
D.02	00010	101101	010010	D.18	10010	010011	
D.03	00011	110001		D.19	10011	110010	
D.04	00100	110101	001010	D.20	10100	001011	
D.05	00101	101001		D.21	10101	101010	
D.06	00110	011001		D.22	10110	011010	
D.07	00111	111000	000111	D.23 †	10111	111010	000101
D.08	01000	111001	000110	D.24	11000	110011	001100
D.09	01001	100101		D.25	11001	100110	
D.10	01010	010101		D.26	11010	010110	
D.11	01011	110100		D.27 †	11011	110110	001001
D.12	01100	001101		D.28	11100	001110	
D.13	01101	101100		D.29 †	11101	101110	010001
D.14	01110	011100		D.30 †	11110	011110	100001
D.15	01111	010111	101000	D.31	11111	101011	010100

2^e bloc de 3b/4b

Input		Output (FGHJ)	
Dx.y	HGF	rd=-1	rd=+1
D.x.0	000	1011	0100
D.x.1	001	1001	
D.x.2	010	0101	
D.x.3	011	1100	0011
D.x.4	100	1101	0010
D.x.5	101	1010	
D.x.6	110	0110	
D.x.P7	111	1110	0001
D.x.A7	111	0111	1000

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

2. Codes en lignes à symboles dépendants

- Code 8B/10B

Coder, à l'aide d'une table de correspondance. Les combinaisons utilisées sont telles que chaque symbole de 10 bits comprend au minimum quatre transitions d'un état logique (*zéro* ou *un*) vers l'autre, et que le flux codé ne présente jamais plus de six fois consécutives le même état logique (*zéro* ou *un*).

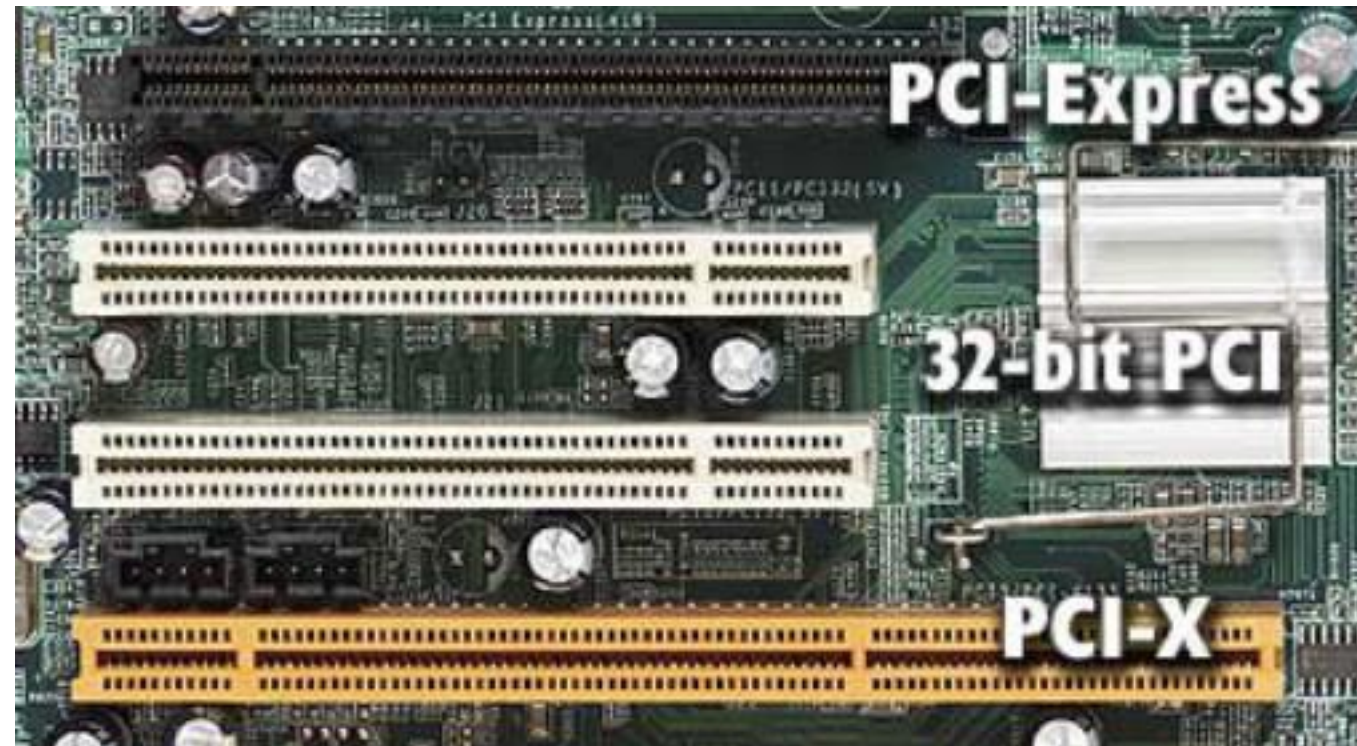
- Il y a donc 1024 (2^{10}) valeurs possibles ; seules 256 (2^8) sont utilisées.
- Aucun symbole ne finit par quatre zéros ou ne commence par trois zéros
- Bonne récupération du signal d'horloge en réception à très haut débit
- Equilibrage du nombre de zéros et de uns pour éviter la présence d'un courant continu sur la ligne
- Détection d'erreurs : Certains motifs invalides ne sont jamais générés, facilitant la détection d'erreurs.
- Protocoles de communication à haut débit : PCI Express, Fibre Channel, SATA et Ethernet 1 Gbit/s.

- Code 64B/66B

01 : indique un bloc de données

10 : indique un bloc de contrôle (trame, erreur, régler flux, etc.)

Efficacité améliorée : Codage 8B/10B (80%) → 64B/66B (97%).



1. Transmission Numérique en bande de base

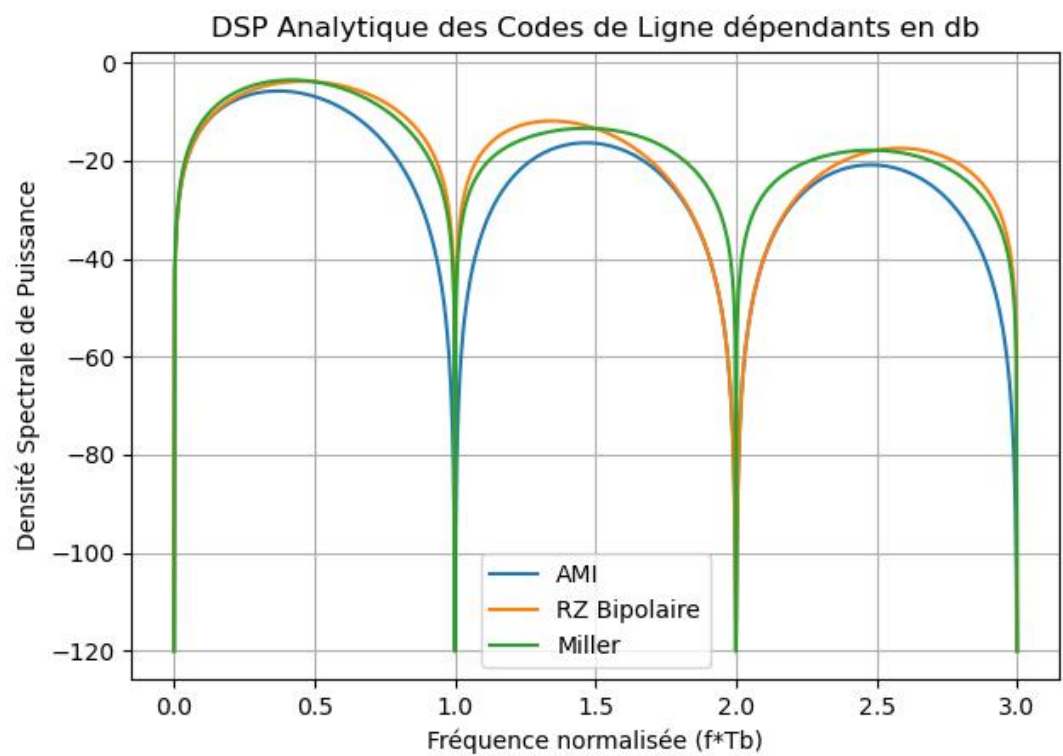
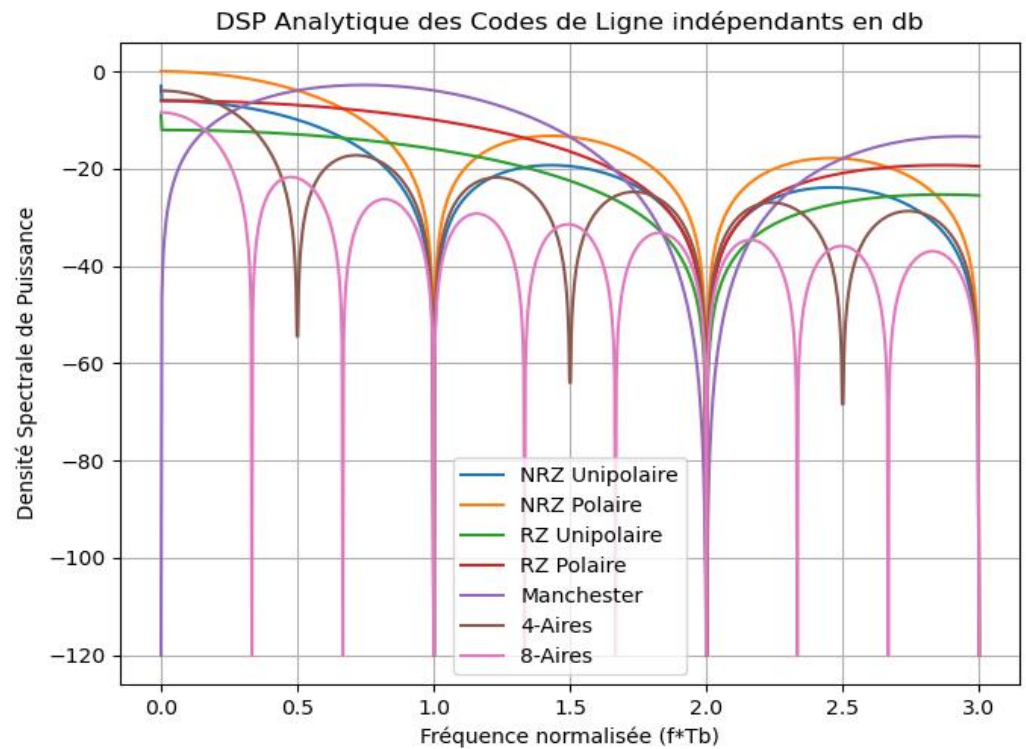
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

Représentation fréquentielle

Un signal numérique porteur d'information est un signal aléatoire donc de puissance finie. On s'intéressera au calcul de sa DSP (densité spectrale de puissance)

Chaque code → la plus grande répartition de l'énergie → Bande de fréquence à privilégier pour le support de transmission.
 Le filtre de mise en forme utilisé conditionne la forme de la DSP : en particulier, lorsque l'on utilise un filtre NRZ, RZ ou biphase Manchester, on obtient un signal en bande de base, où la majorité de la puissance est répartie dans la bande $[-B, +B]$ où B est la largeur de bande du signal.



Critères de choix d'un code en ligne

1. Composante continue DC nulle : Pour des transmissions grandes distance, les lignes de transmissions peuvent contenir une tension d'alimentation continue qui peut être utilisée pour alimenter des répéteurs par exemple → Interférence entre le signal associé au code ligne et le courant continu.
2. Auto-synchronisation : Pour réaliser le décodage, le récepteur doit connaître le rythme de la transmission : la fréquence $1/T_b$, à laquelle les symboles a_k ont été émis. La présence d'une raie à cette fréquence dans le spectre du code en ligne facilite la récupération de ce rythme au niveau du récepteur.
3. Compression de la bande passante : Certains codes en ligne augmentent l'efficacité de la bande passante disponible en permettant davantage d'informations à transmettre, par rapport à d'autres codes utilisant le même support de transmission.
4. Détection d'erreur : Certains codes en ligne ont la possibilité de détecter les erreurs de données sans introduire des bits supplémentaires nécessaires pour cette opération. Par exemple pour le code bipolaire, une infraction à la règle de code est considérée dans la détection comme erreur.
5. Immunité (Résistance) au bruit : Certains codes en ligne présentent un taux d'erreur plus faible que d'autres codes utilisant le même support de transmission et ce pour un rapport signal sur bruit fixe.
6. Transparence : Un code en ligne est dit transparent si les données peuvent être restituées pour chaque suite possible des séquences de bits.

1. Transmission Numérique en bande de base

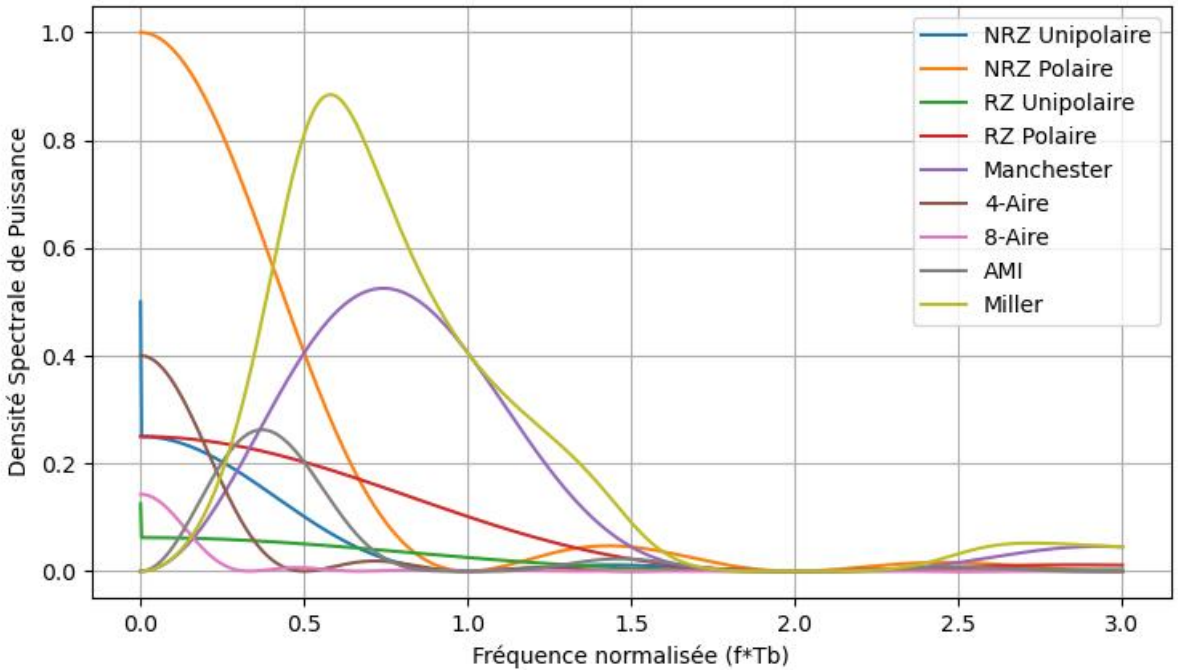
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Critères de choix d'un code en ligne

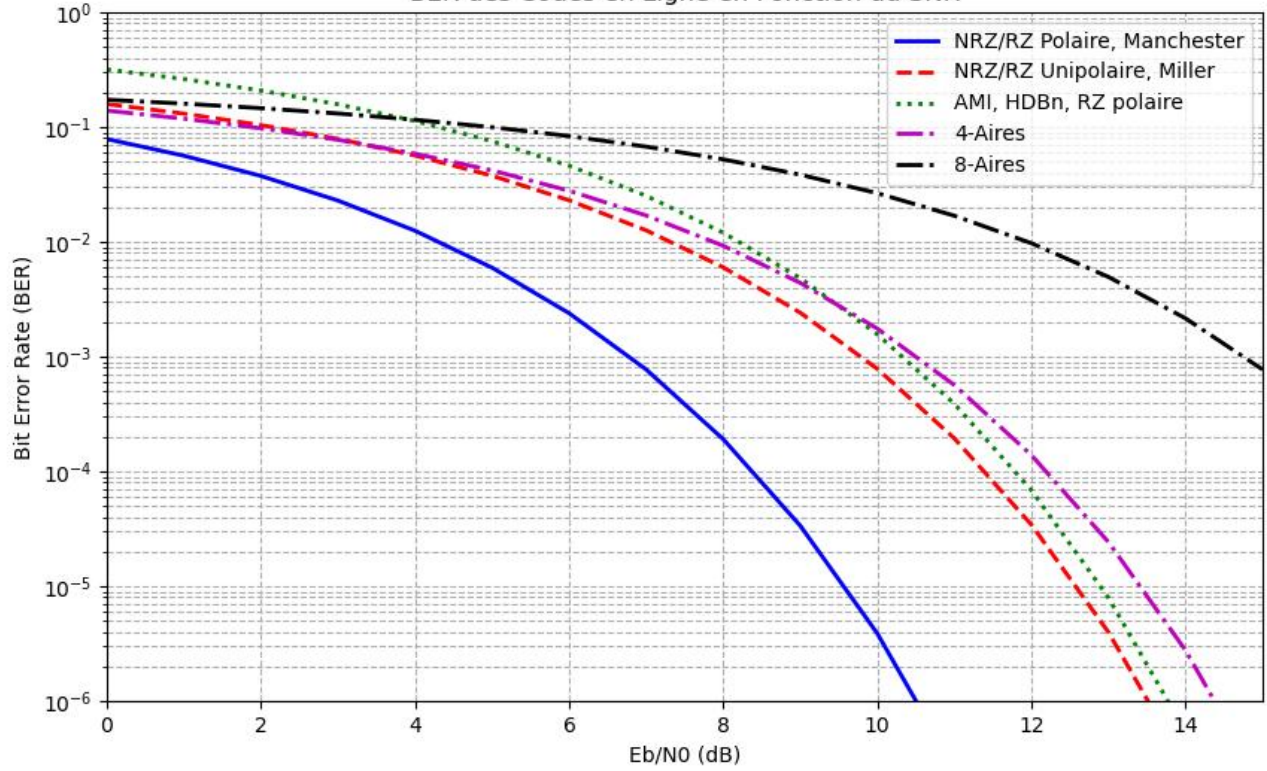
3. **Occupation de la bande passante** : Certains codes en ligne augmentent l'efficacité de la bande passante disponible en permettant davantage d'informations à transmettre, par rapport à d'autres codes utilisant le même support de transmission

5. **Immunité (Résistance) au bruit** : Certains codes en ligne présentent un taux d'erreur plus faible que d'autres codes utilisant le même support de transmission et ce pour un rapport signal sur bruit fixe.

DSP Analytique des Codes de Ligne



BER des Codes en Ligne en Fonction du SNR



Type de Liaison	SNR Typique	Applications
Paire torsadée (UTP)	20–40 dB	Ethernet (Cat5e/Cat6), téléphonie
Coaxial	30–50 dB	TV câble, Internet (DOCSIS)
Fibre optique	> 50 dB (jusqu'à 100 dB)	Réseaux haut débit, data centers
Ligne DSL (cuivre)	15–25 dB	ADSL/VDSL (téléphonie fixe)

1. Transmission Numérique en bande de base

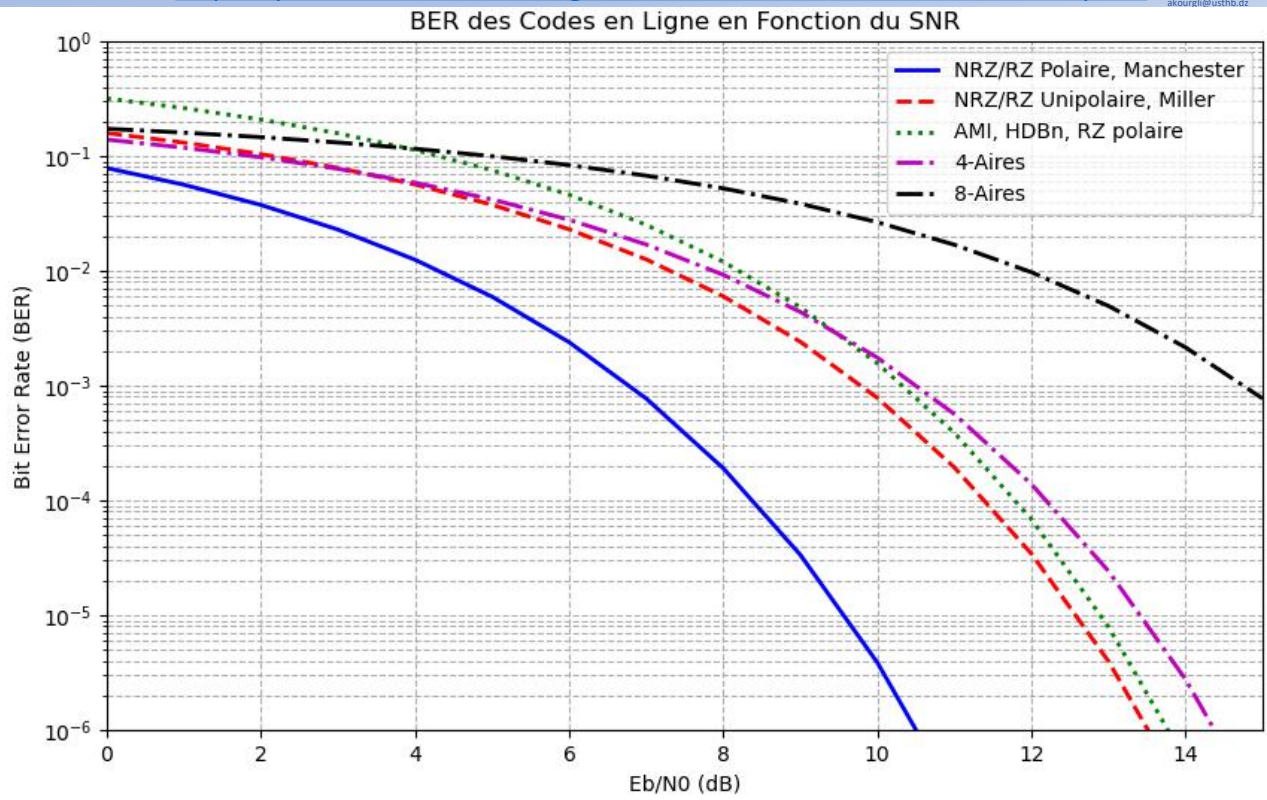
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Critères de choix d'un code en ligne

3. **Occupation de la bande passante** : Certains codes en ligne augmentent l'efficacité de la bande passante disponible en permettant davantage d'informations à transmettre, par rapport à d'autres codes utilisant le même support de transmission

$$E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_i E_{a_i} E_h \rightarrow E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_i E_{a_i} E_h$$

Groupe	Codes Associés	Formule BER	Remarques
Codes Binaires Unipolaires	NRZ Unipolaire, RZ Unipolaire, Miller	$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$	Synchronisation parfaite, énergie réduite pour RZ.
Codes Binaires Polaires	NRZ Polaire, RZ Polaire, Manchester	$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$	Meilleure performance grâce à la distance accrue entre symboles.
Codes Ternaires	AMI, HDBn, RZ Bipolaire	$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$	Pénalité due à la détection à trois niveaux.
Multiniveaux (M-PAM)	4-Aire (4-PAM), 8-Aires (8-PAM)	$P_e \approx \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{0.8E_b}{N_0}}\right)$	Performance dégradée à cause des distances inter-symboles réduites.
		(4-Aire)	
		$P_e \approx \frac{7}{12}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{7N_0}}\right)$	
		(8-Aires)	



- NRZ/RZ Polaire : Même BER car la distance minimale (2A) domine.
- Manchester : Synchronisation améliorée sans perte de BER.
- Miller : Utilisé pour les RFID (ISO 18000-6C) malgré sa perte de 6 dB.
- HDB3 : Supprime les longues suites de zéros, utile en transmissions TDM.

Pour des applications critiques en SNR, privilégiez les codes du Groupe 1.
 Pour un équilibre bande passante/SNR → modulations M-Aire

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

Notion d'énergie par bit

□ Energie totale du signal en bande de base $e(t) = \sum_k a_k h(t - kT_b)$?

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_k a_k h(t - kT_b) \right|^2 dt$$

Si la durée temporelle de $h(t)$ est $T_b \rightarrow E_e = \sum_k |a_k|^2 E_h \rightarrow a_k$ aléatoires $\rightarrow$ Remplacer énergie totale par *énergie moyenne*

□ **Energie à l'émission d'un seul symbole** $\rightarrow E_{a_i} = \int_{-\infty}^{\infty} |a_i h(t - iT_b)|^2 dt = |a_i|^2 E_h$

Si tous les symboles sont équiprobables $\rightarrow E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_i E_{a_i} E_h$

L'énergie moyenne par symbole E_{sym} correspond à l'énergie moyenne nécessaire pour envoyer un symbole

□ Un symbole correspond à $m = \log_2 M$ bits $\rightarrow$ Définir **l'énergie moyenne par bit** : $E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_i E_{a_i} E_h$

□ Chaque symbole est émis durant une période $T_b \rightarrow$ **Puissance moyenne totale** $P_e = \frac{E_{sym}}{T_b}$ ou $P_e = \frac{E_{bit}}{T_b \log_2 M}$

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

Notion d'énergie par bit

L'énergie moyenne par symbole $E_{sym} \rightarrow E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_i E_{a_i} E_h$ et $E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_i E_{a_i} E_h$

Exemples :

○ NRZ unipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$

NRZ polaire $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$

○ RZ unipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{4}$

RZ polaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$

○ Manchester $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$

4-Aires $\rightarrow E_{sym} = 5 V^2 T_s$

8-Aires $\rightarrow E_{sym} = 21 V^2 T_s$

○ AMI $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$

RZ bipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{4}$

○ HDB3 $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$

Miller $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

Notion d'énergie par bit

L'énergie moyenne par symbole $E_{sym} \rightarrow E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_i E_{a_i} E_h$ et $E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_i E_{a_i} E_h$

Exemples :

○ NRZ unipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$

NRZ polaire $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$

○ RZ unipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{4}$

RZ polaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$

○ Manchester $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$

4-Aires $\rightarrow E_{bit} = 5/2 V^2 T_b$

8-Aires $\rightarrow E_{bit} = 7 V^2 T_b$

○ AMI $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$

RZ bipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{4}$

○ HDB3 $\rightarrow E_{bit} \approx \frac{V^2 T_b}{2} \approx \frac{35}{64} \frac{V^2 T_b}{2}$

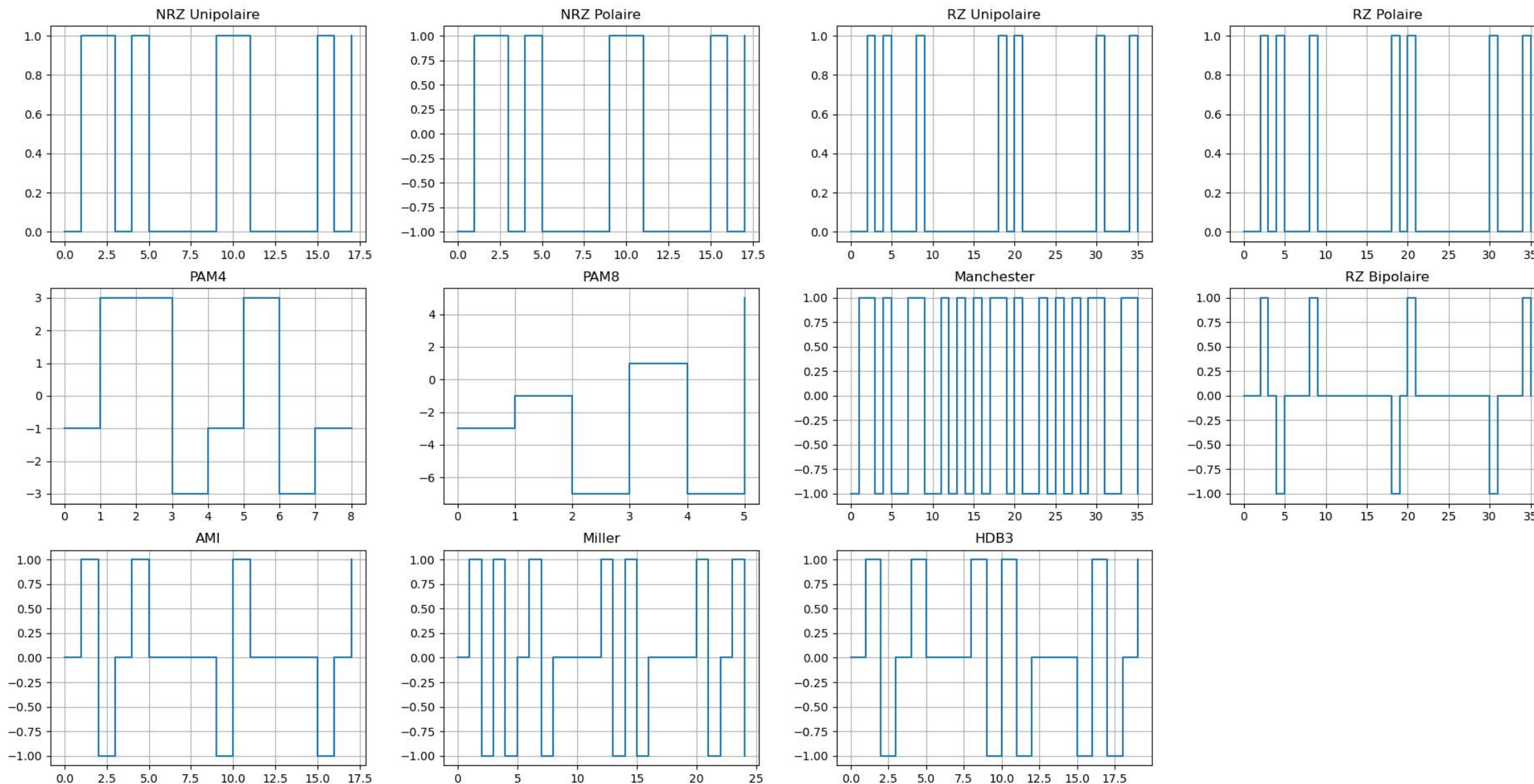
Miller $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$

1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Codage en ligne

Exemple : Coder la séquence binaire 011010000110000101 en utilisant successivement les différents codages présentés.

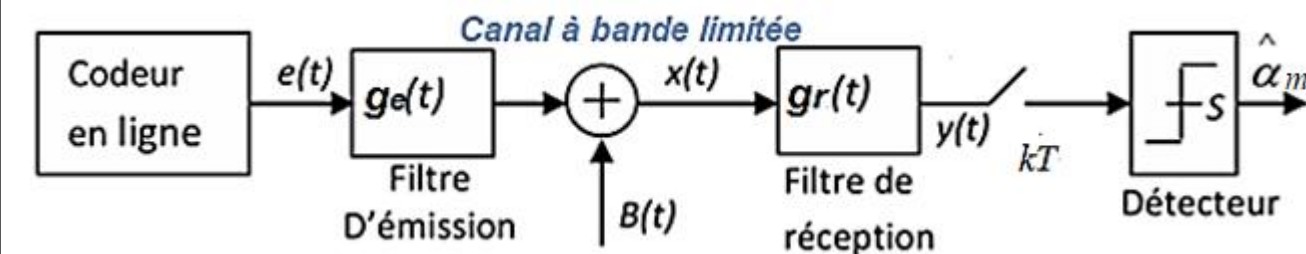


1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande de base

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



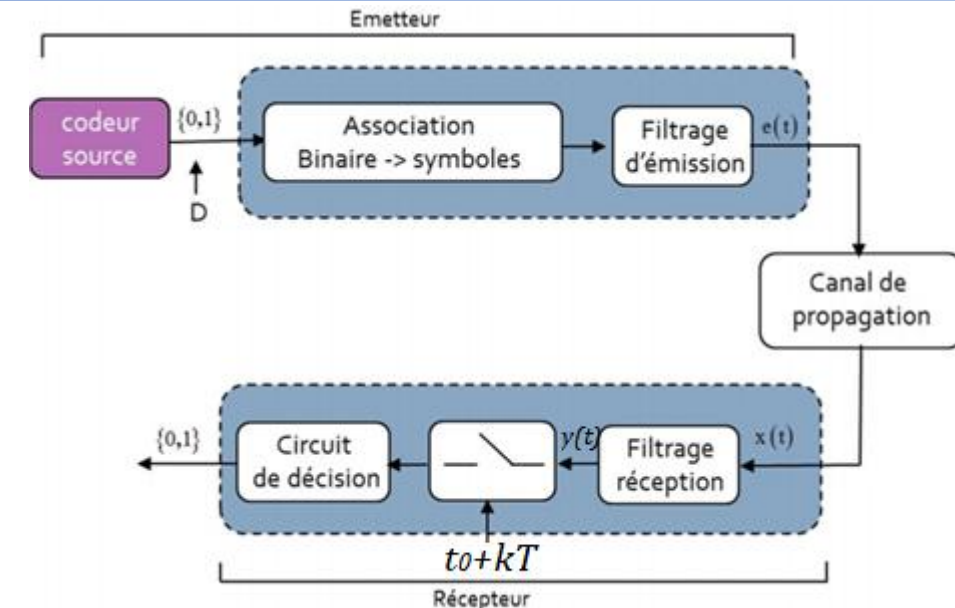
Émetteur :

- **Codeur en ligne** : Transforme les bits en impulsions (ex. : NRZ, Manchester, AMI).
- **Filtre d'émission/de mise en forme** : Réduit l'interférence inter-symbole (ISI) avec des filtres comme le cosinus surélevé (prochain chapitre).

Canal : Support physique (câble cuivre, fibre optique).

Récepteur :

- **Filtre de réception** : Maximise le rapport signal/bruit.
- **Échantillonneur** : Prélève le signal aux instants optimaux.
- **Déecteur** : Reconstitue les bits à partir des échantillons.

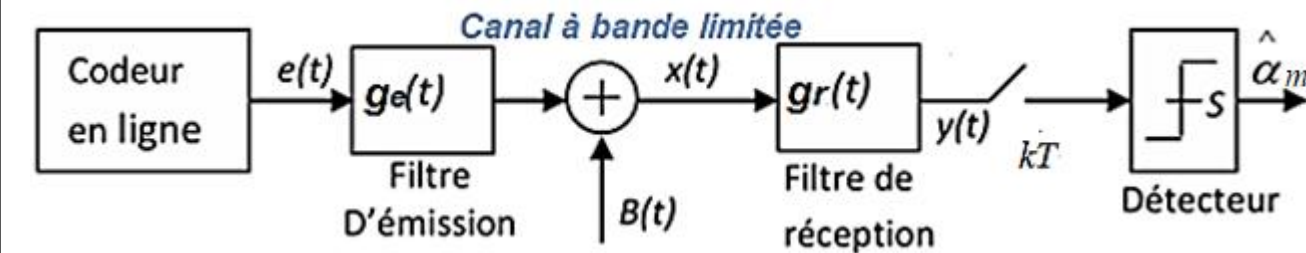


1. Transmission Numérique en bande de base

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande de base

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



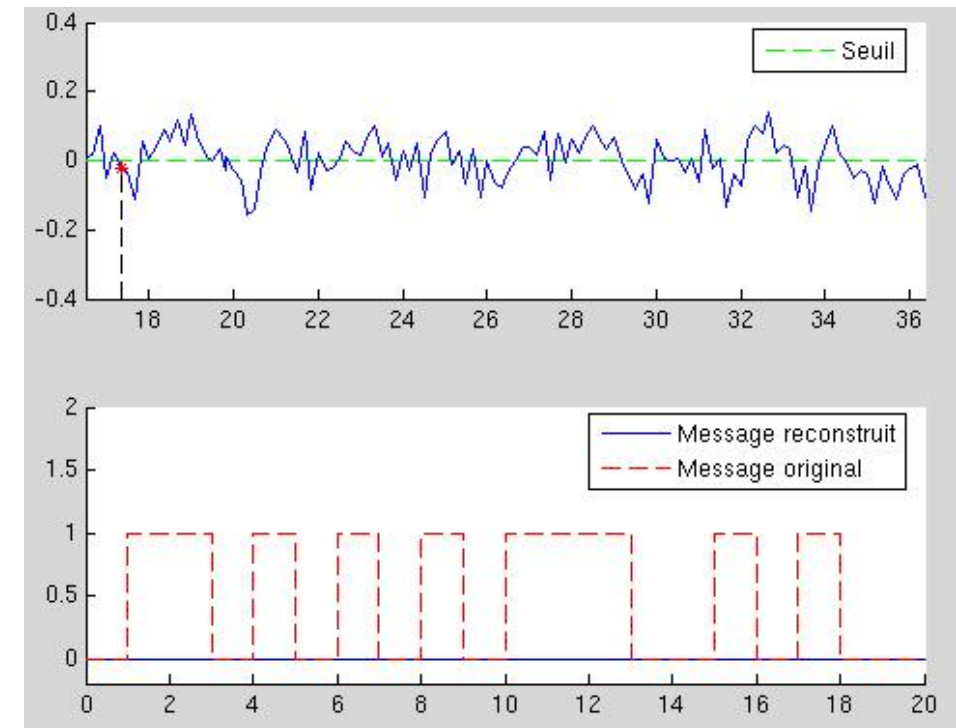
Le symbole reçu doit être estimé. On doit :

1. Repérer les transitions du signal $\Rightarrow$ récupérer la cadence d'horloge
2. A partir de la connaissance de cette cadence : échantillonner le signal reçu.
3. Comparer les valeurs échantillonnées aux valeurs possibles et décider de la valeur effective attribuée.
4. Reconstituer le signal numérique en faisant le moins d'erreurs possibles.

Quel filtre de réception pour minimiser les erreurs ?

$\rightarrow$ Concevoir un filtre pour **minimiser la probabilité d'erreur** lors de la détection de symboles transmis, notamment en présence de bruit et d'interférence inter-symbole (ISI).

Message de 20 bits : 01101010101110010100

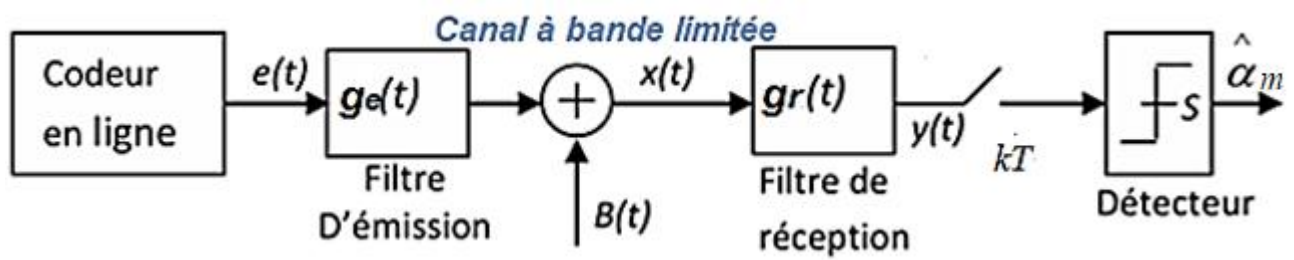


<https://xymaths.fr/MathAppli/communication-numerique-simulation/>

2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



Rappelons que le signal $e(t)$ en sortie du codeur en ligne a l'expression suivante:

$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT) = \sum_k a_m h(t - kT); \quad m = 0,1$$

Hypothèses .

Dans le cas idéal, le filtre est à bande passante infinie (*Irréaliste, car tout canal physique a une bande passante limitée*)

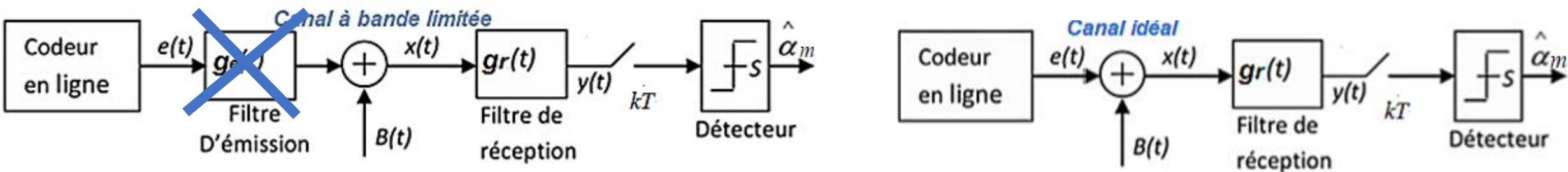
Si bp du signal < pb canal → Approximer canal à AWGN (Additive White Gaussian Noise)

- Pas de filtrage de mise en forme nécessaire (les impulsions restent rectangulaires) ($h(t) = \delta(t)$),
- Pas d'interférence inter-symbole (ISI) grâce à une bande passante infinie.
- Le bruit $B(t)$ est supposé blanc, gaussien, centré stationnaire, de DSP $S_B(f) = \sigma_B^2 = \frac{N_0}{2} \rightarrow BBAG$
- $g_r(t)$ est le **filtre de réception** suivi d'un échantillonneur et d'un comparateur.

2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



Rappelons que le signal $e(t)$ en sortie du codeur en ligne a l'expression suivante:

$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT) = \sum_k a_m h(t - kT); \quad m = 0,1$$

Hypothèses .

Dans le cas idéal, le filtre est à bande passante infinie (Irréaliste, car tout canal physique a une bande passante limitée)

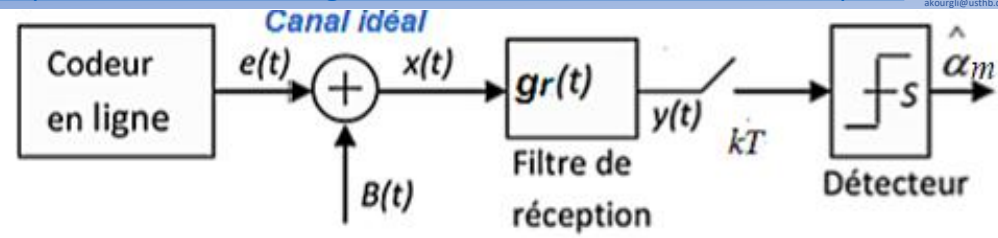
Si bp du signal < pb canal → Approximer canal à AWGN (Additive White Gaussian Noise)

- Pas de filtrage de mise en forme nécessaire (les impulsions restent rectangulaires) ($h(t) = \delta(t)$),
- Pas d'interférence inter-symbole (ISI) grâce à une bande passante infinie.
- Le bruit $B(t)$ est supposé blanc, gaussien, centré stationnaire, de DSP $S_B(f) = \sigma_B^2 = \frac{N_0}{2} \rightarrow BBAG$
- $g_r(t)$ est le **filtre de réception** suivi d'un échantillonneur et d'un comparateur.

2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT) = \sum_k a_m h(t - kT) \quad \text{pour } m = 0,1$$



Récepteur optimal

L'objectif d'un récepteur optimal est de retrouver la séquence émise en minimisant le taux d'erreurs. On cherche le filtre $g_r(t)$ qui maximise le rapport signal sur bruit à un instant t_0 . Soit la transmission du premier symbole ($k=0$)

$$y(t) = \overbrace{g_r(t) * h_m(t)}^{r_m(t)} + \overbrace{g_r(t) * B(t)}^{b(t)} \quad \text{or} \quad SNR_{t_0} = \frac{Puis(r_m(t_0))}{Puis(b(t_0))} = \frac{|\int H_m(f) G_r(f) e^{2\pi j f t_0} df|^2}{\int S_B(f) |G_r(f)|^2 df}$$

$$SNR_{t_0} = \frac{|\int H_m(f) G_r(f) e^{2\pi j f t_0} df|^2}{\int \sigma_B^2 |G_r(f)|^2 df} = \frac{|\int a(f) b^*(f) df|^2}{\int a(f) a^*(f) df} \quad \text{avec} \quad a(f) = G_r(f) \quad \text{et} \quad b(f) = H_m^*(f) e^{-2\pi j f t_0} / \sigma_B^2$$

Sachant que $|\int a(f) b^*(f) df|^2 \leq \int a(f) a^*(f) df \int b(f) b^*(f) df$

$$\rightarrow \text{Maximum } SNR_{t_0} = \frac{|\int H_m(f) G_r(f) e^{2\pi j f t_0} df|^2}{\int |G_r(f)|^2 df} = \int b(f) b^*(f) df \quad \text{si } a(f) = k' b(f)$$

<https://youtu.be/m1vm5h-orcl>

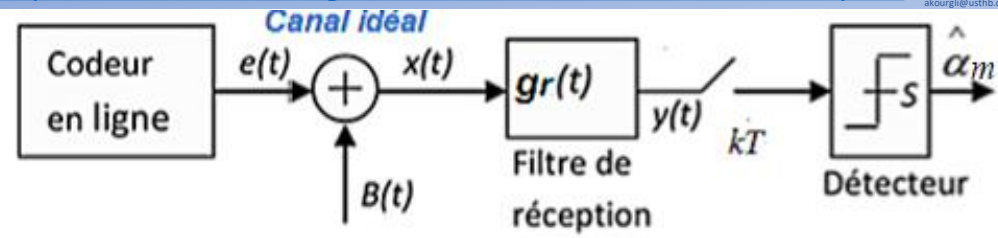
$$\rightarrow G_r(f) = \frac{k'}{\sigma_B^2} H_m^*(f) e^{-2\pi j f t_0} \rightarrow g_r(t) = \frac{k'}{\sigma_B^2} h_m^*(t_0 - t)$$

$\rightarrow$ Le filtre récepteur est le signal émis inversé et décalé (Filtrage adapté) et $SNR_{t_0} = \frac{1}{\sigma_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_m(t)|^2 dt = \frac{E_{hm}}{\sigma_B^2}$

2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT); \quad m = 0,1$$



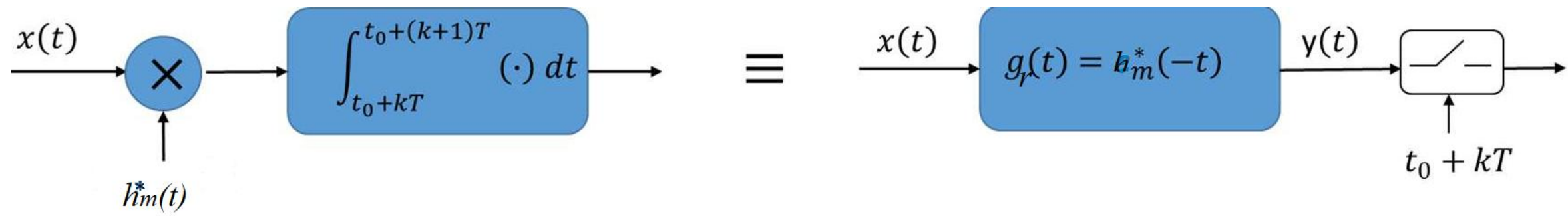
Récepteur optimal

Le filtre $g_r(t)$ devrait maximiser le rapport signal sur bruit à un instant t_0

$$g_r(t) = \frac{k'}{\sigma_B^2} h_m^*(t_0 - t) \rightarrow \text{Le filtre récepteur est le signal émis (Filtrage adapté)} \quad \text{et} \quad SNR_{t_0} = \frac{1}{\sigma_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_m(t)|^2 dt = \frac{E_{h_m}}{\sigma_B^2}$$

Remarque :

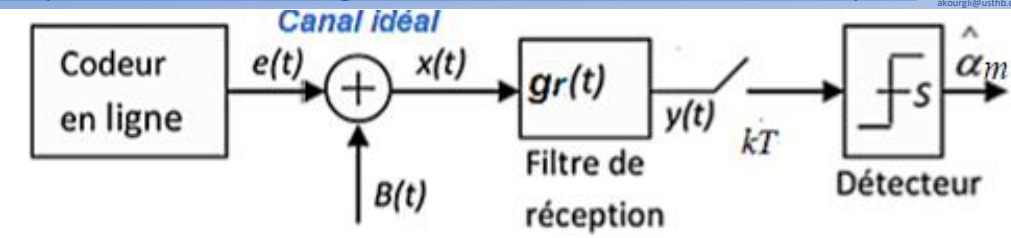
Convolution (On inverse le signal) $\rightarrow$ Remplacer le filtrage $g_r(t)$ par une **corrélacion** avec $g_r(-t) = \frac{k'}{\sigma_B^2} h_m(t + t_0)$



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

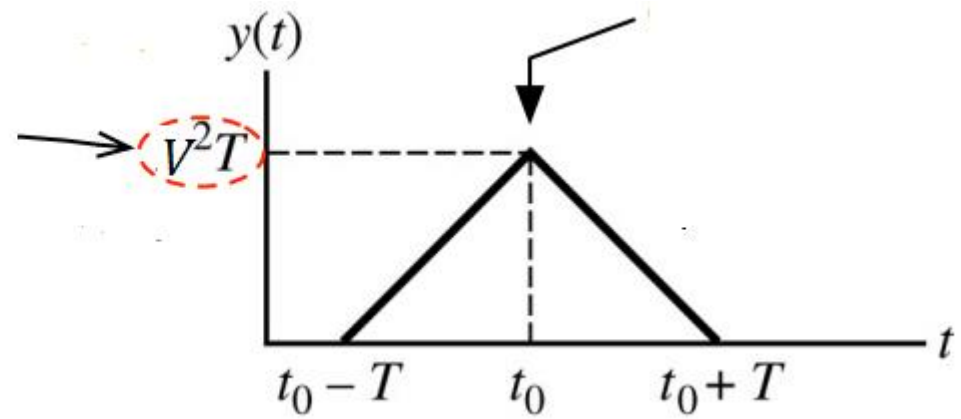
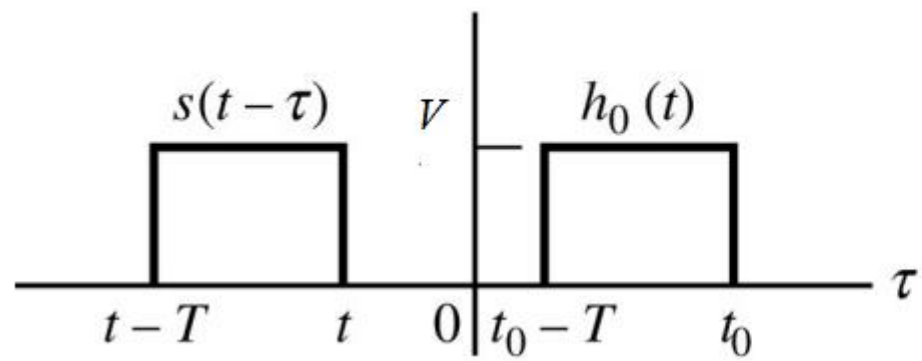
$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT); \quad m = 0,1$$



Récepteur optimal

Le filtre $g_r(t)$ devrait maximiser le rapport signal sur bruit à un instant t_0

$$g_r(t) = \frac{k'}{\sigma_B^2} h_m^*(t_0 - t) \rightarrow \text{Le filtre récepteur est le signal émis (Filtrage adapté)} \quad \text{et} \quad SNR_{t_0} = \frac{1}{\sigma_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_m(t)|^2 dt = \frac{E_{h_m}}{\sigma_B^2}$$



Remarque :

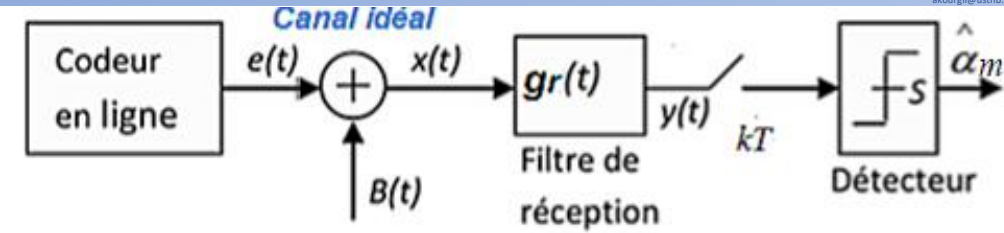
Convolution de 2 portes de largeur T donne un Triangle max en t_0 d'amplitude V^2T

2. Récepteur optimal

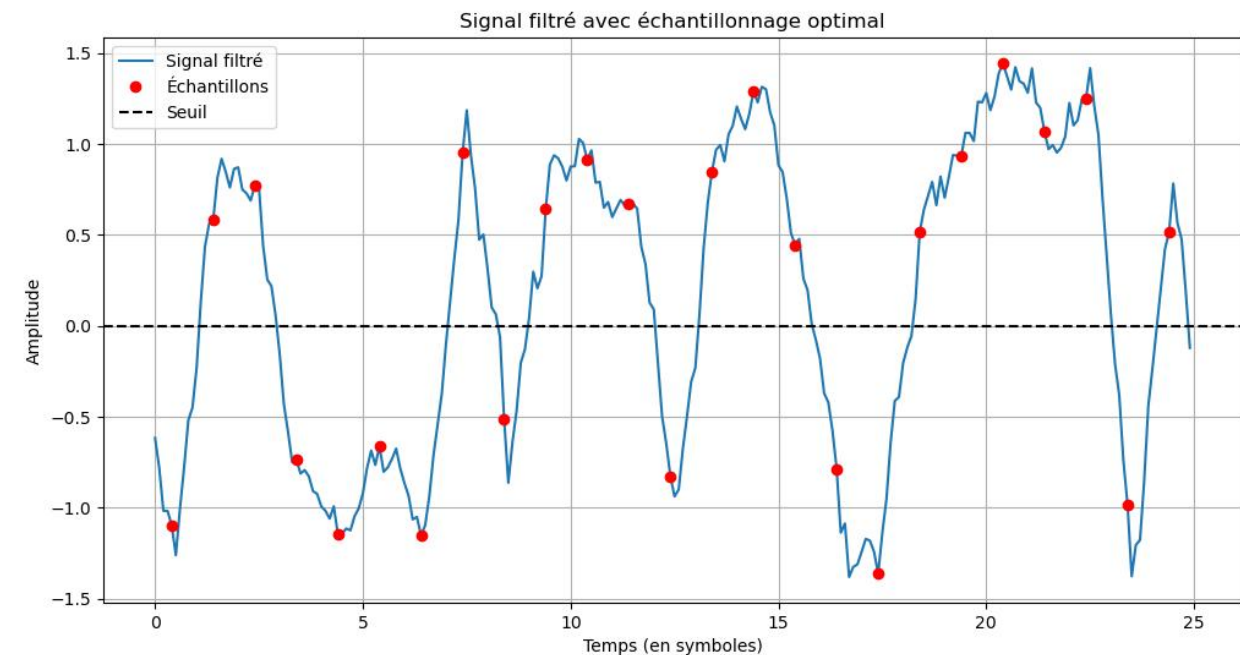
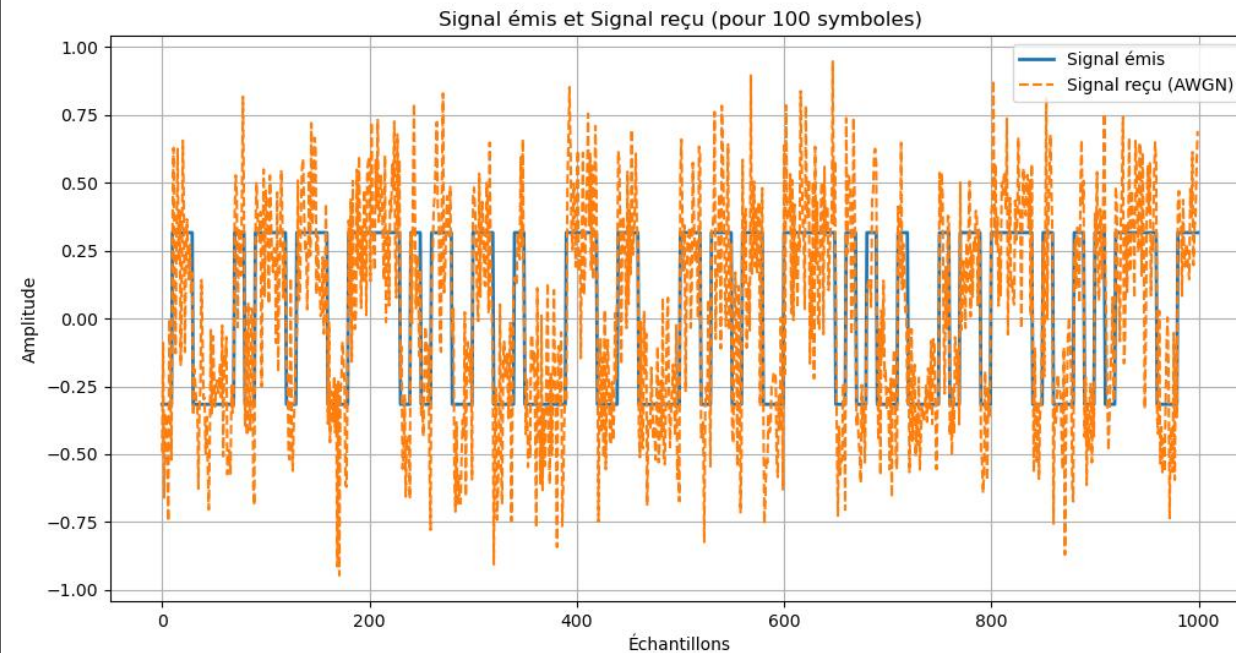
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT); \quad m = 0,1$$



Récepteur optimal



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

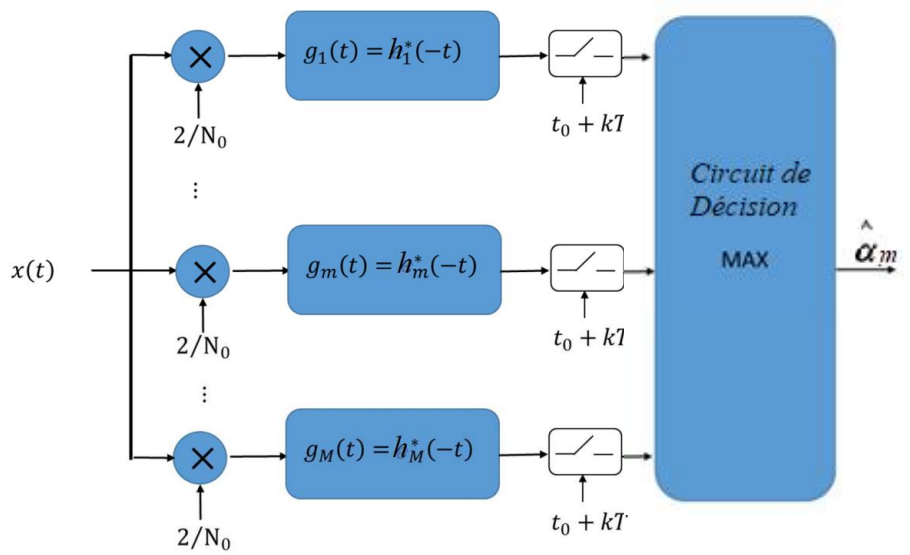
$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT); \quad m = 0,1$$

Récepteur optimal

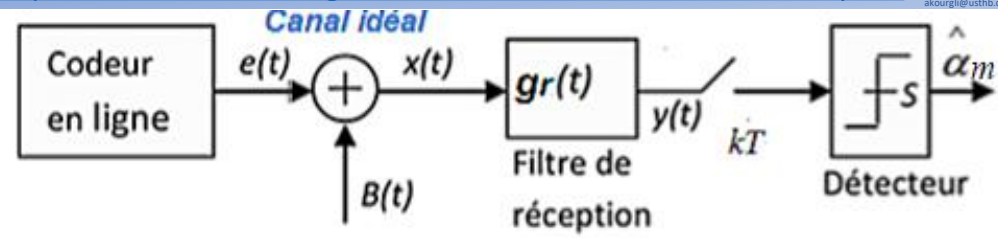
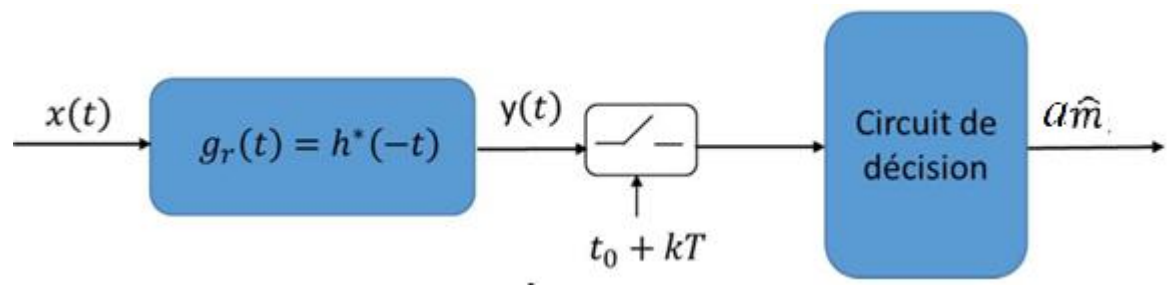
Le filtre $g_r(t)$ devrait maximiser le rapport signal sur bruit à un instant t_0

$$g_r(t) = \frac{k'}{\sigma_B^2} h_m^*(t_0 - t) \rightarrow \text{Le filtre récepteur est le signal émis (Filtrage adapté)} \quad \text{et} \quad SNR_{t_0} = \frac{1}{\sigma_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_m(t)|^2 dt = \frac{E_{h_m}}{\sigma_B^2}$$

Option 1 : Faire passer le signal $x(t)$ dans un banc de M filtres dont la réponse impulsionnelle est égale à l'inverse des fonctions de base (forme d'onde $h_m(t)$) du signal émis.



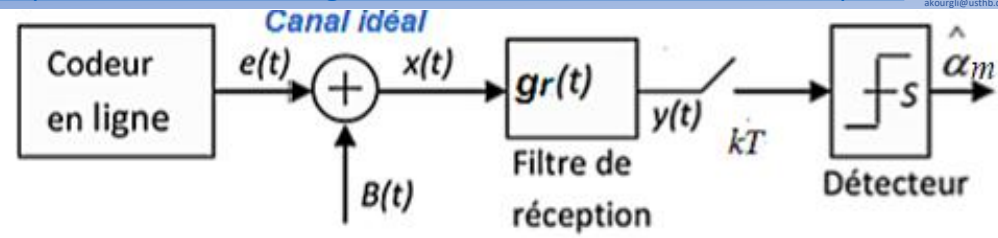
Si forme d'onde unique $\rightarrow h_1(t) = h_2(t) = \dots = h_M(t) = h(t)$



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT); \quad m = 0,1$$

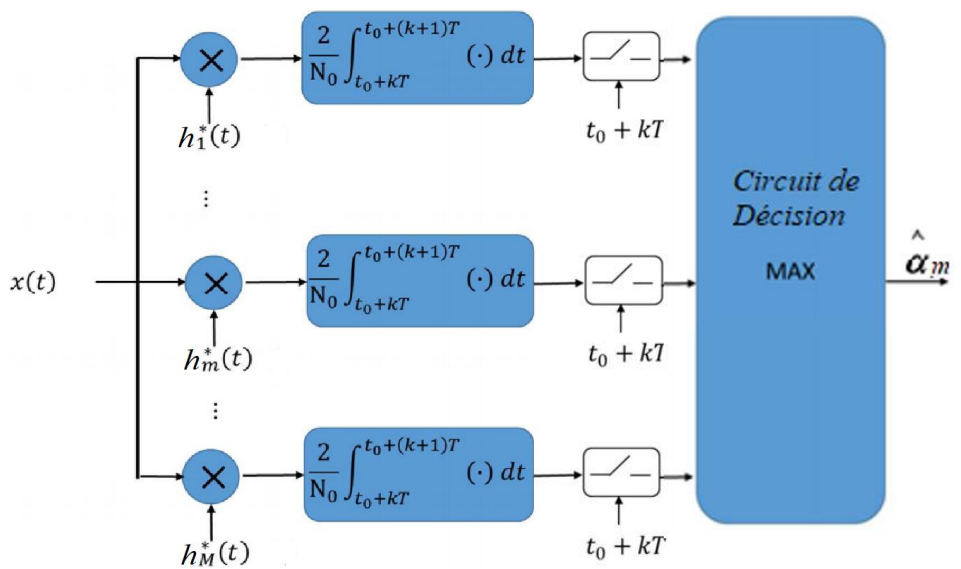


Récepteur optimal

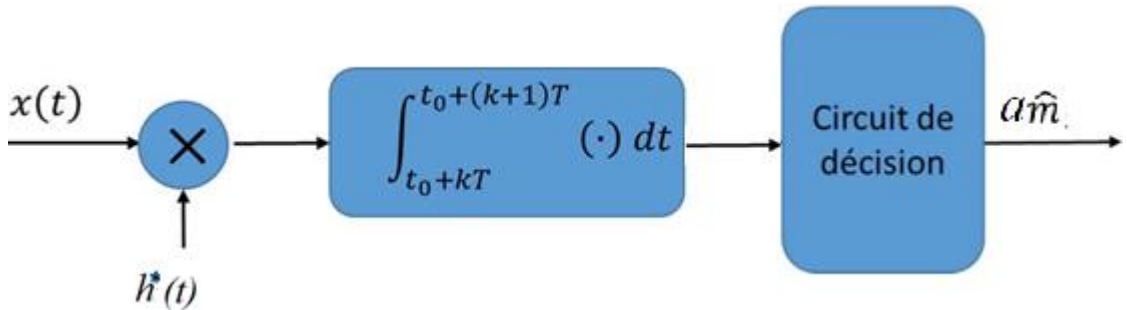
Le filtre $g_r(t)$ devrait maximiser le rapport signal sur bruit à un instant t_0

$$g_r(t) = \frac{k'}{\sigma_B^2} h_m^*(t_0 - t) \rightarrow \text{Le filtre récepteur est le signal émis (Filtrage adapté)} \quad \text{et} \quad SNR_{t_0} = \frac{1}{\sigma_B^2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_m(t)|^2 dt = \frac{E_{h_m}}{\sigma_B^2}$$

Option 2 : Faire passer le signal $x(t)$ à travers un banc de M corrélateurs en parallèle qui assurent la projection de $x(t)$ sur chacune des M fonctions de base constituant le signal. Elle sera accomplie sur un symbole ($0 < t \leq Tb$).



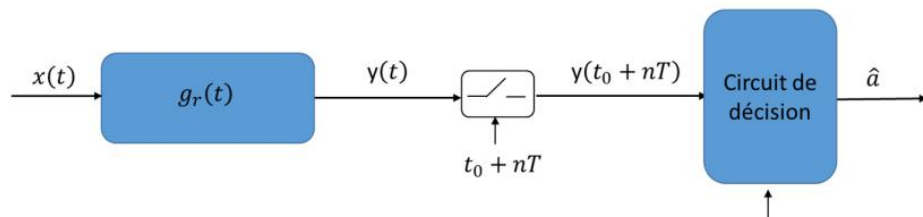
Si forme d'onde unique $\rightarrow h_1(t) = h_2(t) = \dots = h_M(t)$



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



Rappelons que le signal $e(t)$ en sortie du codeur en ligne a l'expression suivante:

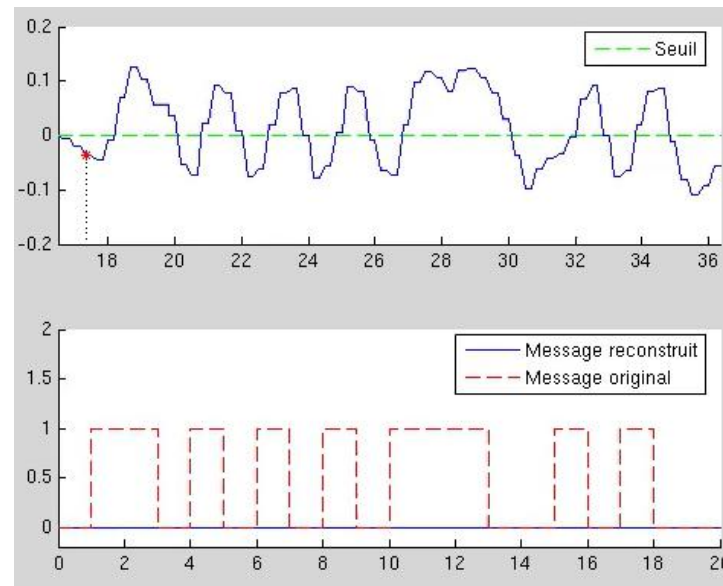
$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT) = \sum_k a_m h(t - kT); \quad m = 0,1$$

Considérons l'émission à l'instant $k = 0$ d'un symbole a_m correspondant à l'état binaire α_m . Sur $[0, T]$, le signal $x(t)$ à l'entrée du récepteur est : $x(t) = e(t) + B(t)$ $m = 0,1$.

$$y(t) = \overbrace{g_r(t) * h_m(t)}^{r_m(t)} + \overbrace{g_r(t) * B(t)}^{b(t)} = a_m \overbrace{g_r(t) * h(t)}^{r(t)} + \overbrace{g_r(t) * B(t)}^{b(t)}$$

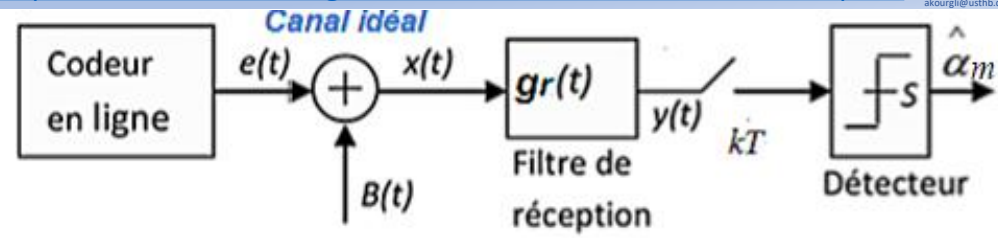
○ A la sortie du filtre adapté $g_r(t) = h^*(t_0 - t) \rightarrow r_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_m h(t - \tau) h^*(t_0 - \tau) d\tau \rightarrow r_m(t_0) = a_m E_h$

○ $b(t)$ est un bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance $\int S_B(f) |G_r(f)|^2 df \rightarrow \sigma_b^2 = \sigma_B^2 E_{Gr} = \sigma_B^2 E_h = \frac{N_0}{2} E_h$



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal



Détection du seuil optimal

Rappelons que le signal $e(t)$ en sortie du codeur en ligne a l'expression suivante:

$$e(t) = \sum_k h_m(t - kT) = \sum_k a_m h(t - kT); \quad m = 0,1$$

Considérons l'émission à l'instant $k = 0$ d'un symbole a_m correspondant à l'état binaire α_m .

Sur $[0, T]$, le signal $x(t)$ à l'entrée du récepteur est : $x(t) = e(t) + B(t) \quad m = 0,1$.

$$y(t) = \overbrace{g_r(t) * h_m(t)}^{r_m(t)} + \overbrace{g_r(t) * B(t)}^{b(t)} = a_m \overbrace{g_r(t) * h(t)}^{r(t)} + \overbrace{g_r(t) * B(t)}^{b(t)}$$

○ A la sortie du filtre adapté $g_r(t) = h^*(t_0 - t) \rightarrow r_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_m h(t - \tau) h^*(t_0 - \tau) d\tau \rightarrow r_m(t_0) = a_m E_h$

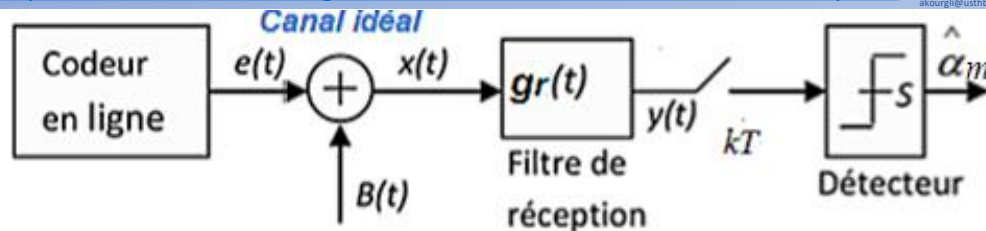
○ $b(t)$ est un bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance $\int S_B(f) |G_r(f)|^2 df \rightarrow \sigma_b^2 = \sigma_B^2 E_h = \frac{N_0}{2} E_h$
 $\rightarrow y(t_0) = a_m E_h + b(t_0) \rightarrow y(t_0)$ est donc une v.a. Gaussienne de moyenne $a_m E_h$ de variance $\frac{N_0}{2} E_h$

A l'instant t_0 , l'échantillon $y(t_0)$ est comparé à un seuil S et une décision sera prise pour décoder la valeur du symbole reçu α_m :

$$\begin{cases} y(t_0) > S & \text{alors} & a_m = a_1 \rightarrow \alpha_m = 1 \\ y(t_0) \leq S & \text{alors} & a_m = a_0 \rightarrow \alpha_m = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Détection du seuil optimal } S ?$$

2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal



Détection du seuil optimal

○ Rappels sur l'Estimateur du Maximum à posteriori (MAP)

L'objectif du détecteur optimal est de déterminer le symbole $\hat{a}_m$ qui a été le plus vraisemblablement émis.

Un détecteur *maximum a posteriori* (MAP) cherche parmi tous les messages possibles a_m , le message estimé $\hat{a}_m$ pour lequel la probabilité conditionnelle $p(a_m/y(t))$ est la plus grande : $\hat{a}_m = \arg \max_{a_m} p(a_m/y(t))$

En utilisant la loi de Bayes : $p(a_m/y(t)) = \frac{p(y(t)/a_m) p(a_m)}{p(y(t))}$

Sachant que tous les messages sont équiprobables et que $y(t)$ est commun $\rightarrow \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} p(y(t)/a_m)$

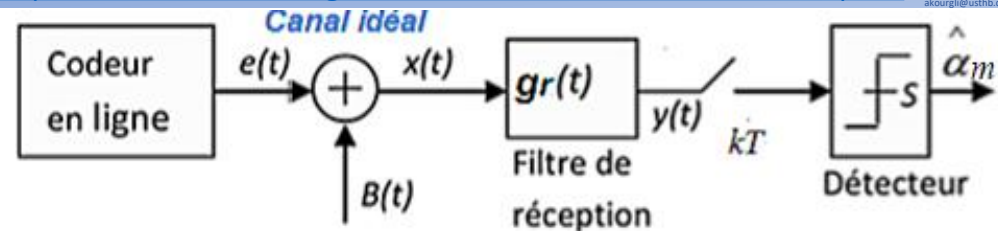
Un détecteur utilisant ce critère est appelé un détecteur à maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood*, ML). En effet, lorsque les messages sont équiprobables, les détecteurs **MAP** et **ML** sont identiques.

2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

Détection du seuil optimal

- Rappels sur l'Estimateur du Maximum de vraisemblance (ML)



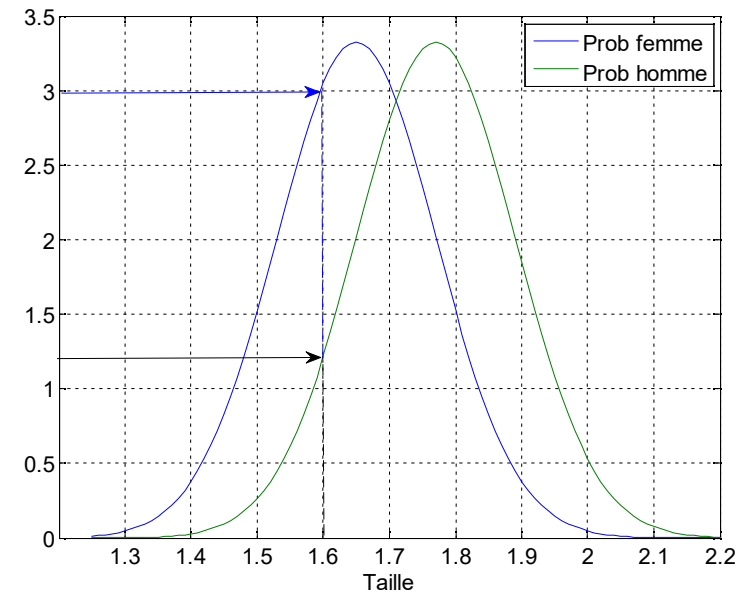
Supposons que lors d'une enquête policière, un suspect inconnu (femme ou homme) mesure environ 1.60 m, on aura plutôt tendance à rechercher une femme tandis que s'il mesure environ 1.80 m, on recherchera plutôt un homme. La notion de maximum de vraisemblance permet de formaliser cette intuition.

On peut modéliser la distribution des tailles (en mètres) :

- féminines par une loi gaussienne d'espérance $\mu_F = 1.65$ et d'écart type $\sigma_F = 0.12$
- masculines par une loi gaussienne d'espérance $\mu_H = 1.75$ et d'écart type $\sigma_H = 0.12$

Connaissant la taille x d'un suspect, on pourra supposer que ce suspect est une femme si la densité de probabilité des tailles féminines prise en x est supérieure à celle des tailles masculines et vice et versa.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_b^2}}$$



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

Détection du seuil optimal

- Rappels sur l'Estimateur du Maximum de vraisemblance (ML)

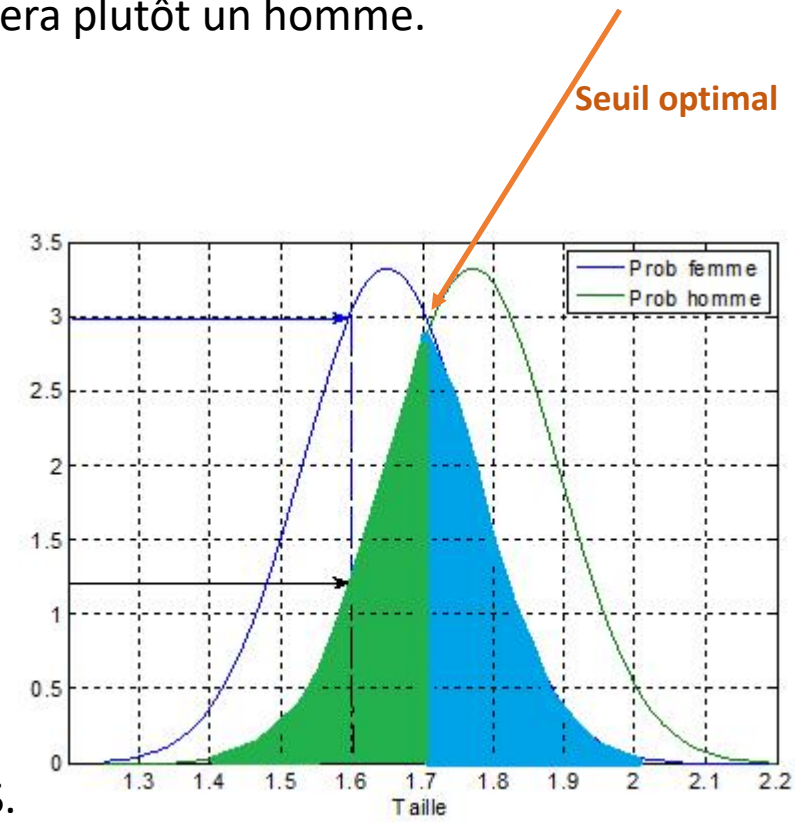
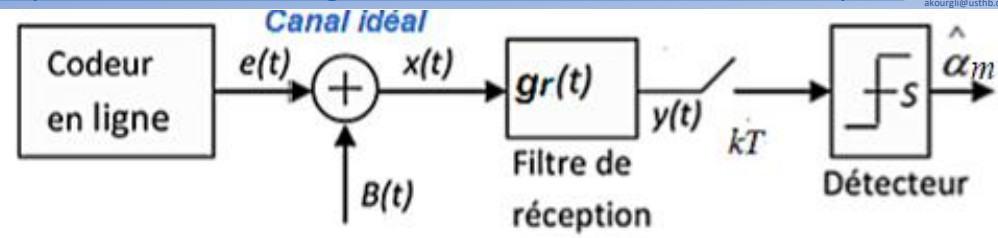
Supposons que lors d'une enquête policière, un suspect inconnu (femme ou homme) mesure environ 1.60 m, on aura plutôt tendance à rechercher une femme tandis que s'il mesure environ 1.80 m, on recherchera plutôt un homme. La notion de maximum de vraisemblance permet de formaliser cette intuition.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_b^2}}$$

Le **seuil de décision optimale** lorsque $\sigma_H = \sigma_F$ est $S = 1.60$ qui minimise la probabilité d'erreur. Soit

- $Q_D(S) = p(x > S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_S^\infty e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$ et
- $Q_G(S) = p(x < S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^S e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$

$Q_D(S)$ représente l'aire sous la courbe de la distribution gaussienne à **droite** du point S.
 $Q_G(S)$ représente l'aire sous la courbe de la distribution gaussienne à **gauche** du point S.



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

Détection du seuil optimal

- Rappels sur l'Estimateur du Maximum de vraisemblance (ML)

Supposons que lors d'une enquête policière, un suspect inconnu (femme ou homme) mesure environ 1.60 m, on aura plutôt tendance à rechercher une femme tandis que s'il mesure environ 1.80 m, on recherchera plutôt un homme. La notion de maximum de vraisemblance permet de formaliser cette intuition.

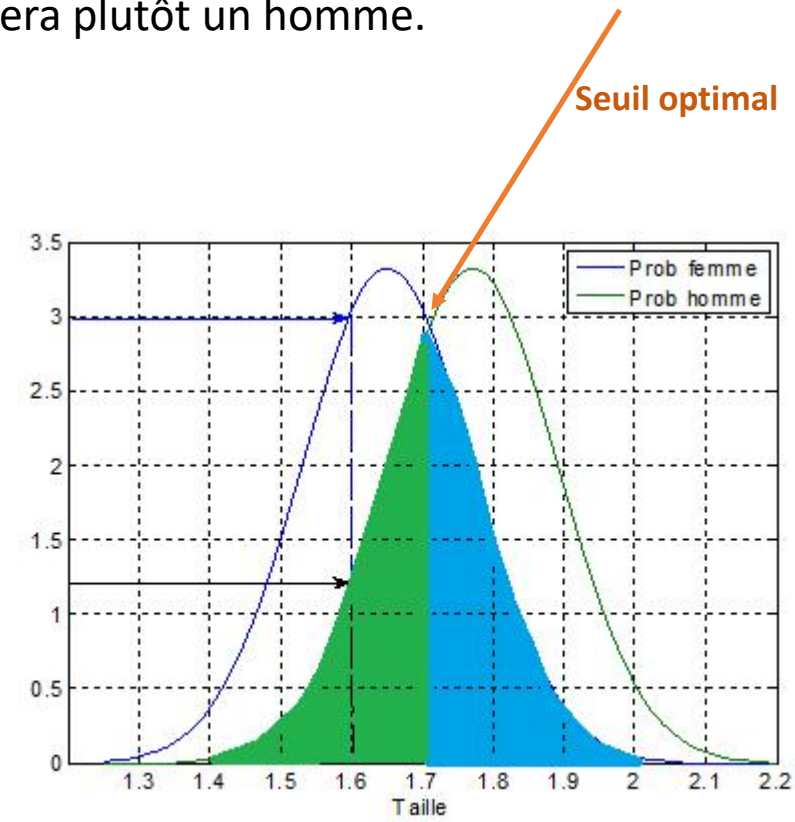
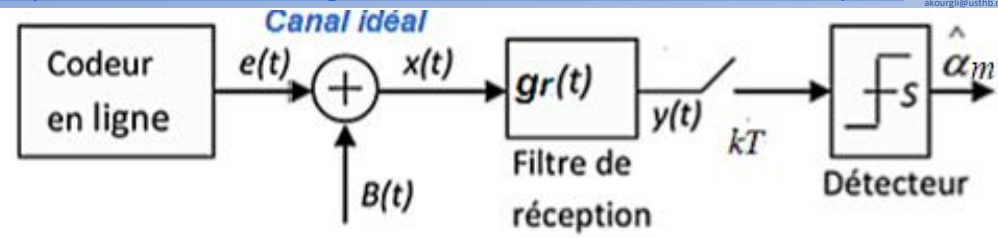
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_b^2}}$$

Le **seuil de décision optimale** lorsque $\sigma_H = \sigma_F$ est $S = 1.60$ qui minimise la probabilité d'erreur. Soit

$$Q_D(S) = p(x > S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_S^\infty e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

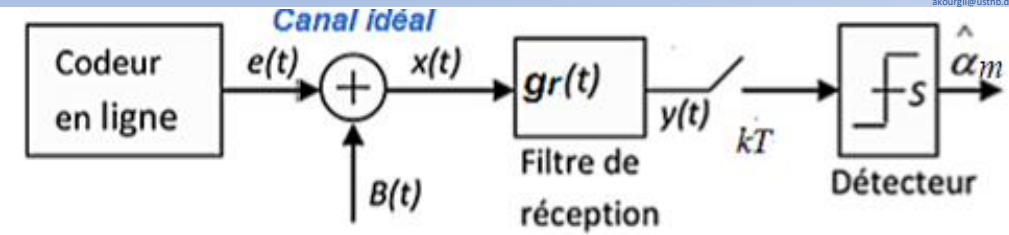
$$\text{On pose } Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \rightarrow Q_D(S) = Q\left(\frac{(x-\mu_x)}{\sigma_x}\right)$$

$Q(x)$ représente l'aire sous la courbe de la distribution gaussienne à **droite** du point x .



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal



Détection du seuil optimal

A l'instant t_0 , l'échantillon $y(t_0)$ est comparé à un seuil S et une décision sera prise pour décoder la valeur du symbole reçu

$$\begin{cases} y(t_0) > S & \text{alors } a_m = a_1 \\ y(t_0) \leq S & \text{alors } a_m = a_0 \end{cases}$$

$$y(t_0) = a_m \overbrace{g_r(t_0) * h(t_0)}^{r(t_0)} + \overbrace{g_r(t_0) * B(t_0)}^{b(t_0)}$$

Soient P_{e0} et P_{e1} les deux probabilités conditionnelles de décision erronée :

$$\begin{cases} P_{e0} = p(\hat{a}_m = a_1 / a_m = a_0) \\ P_{e1} = p(\hat{a}_m = a_0 / a_m = a_1) \end{cases}$$

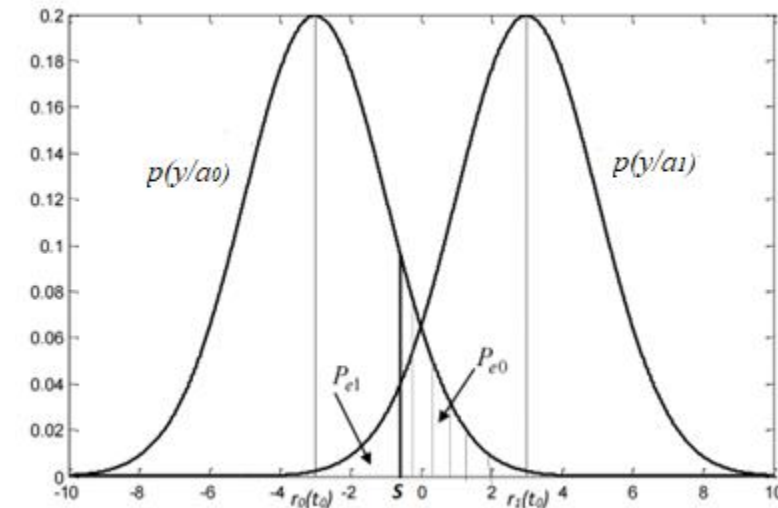
Soient $p_0 = p(a_m = a_0)$ et $p_1 = p(a_m = a_1) \rightarrow P_e = p_0 P_{e0} + p_1 P_{e1}$

$Y = y(t_0)$: une v.a. Gaussienne de moyenne $a_m E_h$, de variance $\sigma_b^2 = \frac{N_0}{2} E_h$

$$\text{Ainsi } p(y/a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(y-a_1 E_h)^2}{2\sigma_b^2}} \quad \text{et} \quad p(y/a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(y-a_0 E_h)^2}{2\sigma_b^2}}$$

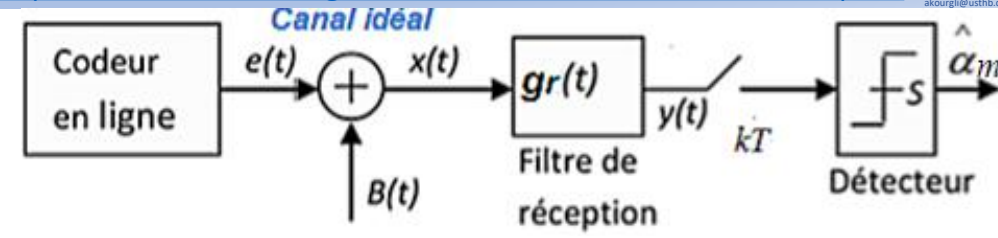
Trouver S assurant probabilité d'erreur minimale

$$\rightarrow P_e = p_0 \int_S^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(y-a_0 E_h)^2}{2\sigma_b^2}} dy + p_1 \int_{-\infty}^S \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(y-a_1 E_h)^2}{2\sigma_b^2}} dy$$



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal



Détection du seuil optimal

A l'instant t_0 , l'échantillon $y(t_0)$ est comparé à un seuil S et une décision sera prise pour décoder la valeur du symbole reçu :

$$\begin{cases} y(t_0) > S & \text{alors } a_m = a_1 \\ y(t_0) \leq S & \text{alors } a_m = a_0 \end{cases}$$

La stratégie bayésienne consiste à minimiser le coût moyen. On parle alors de la minimisation du risque bayésien.

Minimiser l'erreur $\rightarrow$ trouver le seuil optimal

$$\rightarrow P_e = p_0 \int_S^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(y-a_0E_h)^2}{2\sigma_b^2}} dy + p_1 \int_{-\infty}^S \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(y-a_1E_h)^2}{2\sigma_b^2}} dy$$

$$\rightarrow \frac{dP_e}{dS} = 0 \rightarrow -p_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(S-a_0E_h)^2}{2\sigma_b^2}} + p_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(S-a_1E_h)^2}{2\sigma_b^2}} = 0$$

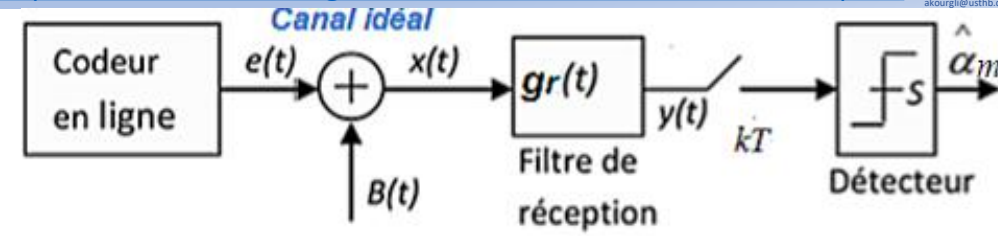
$$\rightarrow S_{opt} = \frac{a_0+a_1}{2} E_h - \frac{\sigma_b^2}{E_h(a_1-a_0)} \ln \frac{p_1}{p_0} \rightarrow S_{opt} = \frac{a_0+a_1}{2} E_h - \frac{N_0}{2(a_1-a_0)} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Remarque :

$$\text{Si } p_0 = p_1 \rightarrow S_{opt} = \frac{a_0+a_1}{2} E_h \text{ et } P_e = \int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(S_{opt}-a_0E_h)^2}{2\sigma_b^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \int_y^\infty e^{-\frac{((a_1-a_0)/2)^2 E_h^2}{2\sigma_b^2}} dy$$

2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal



Détection du seuil optimal

A l'instant t_0 , l'échantillon $y(t_0)$ est comparé à un seuil S et une décision sera prise pour décoder la valeur du symbole reçu :

$$\begin{cases} y(t_0) > S & \text{alors } a_m = a_1 \\ y(t_0) \leq S & \text{alors } a_m = a_0 \end{cases}$$

La stratégie bayésienne consiste à minimiser le coût moyen. On parle alors de la minimisation du risque bayésien.

Minimiser l'erreur → trouver le seuil optimal

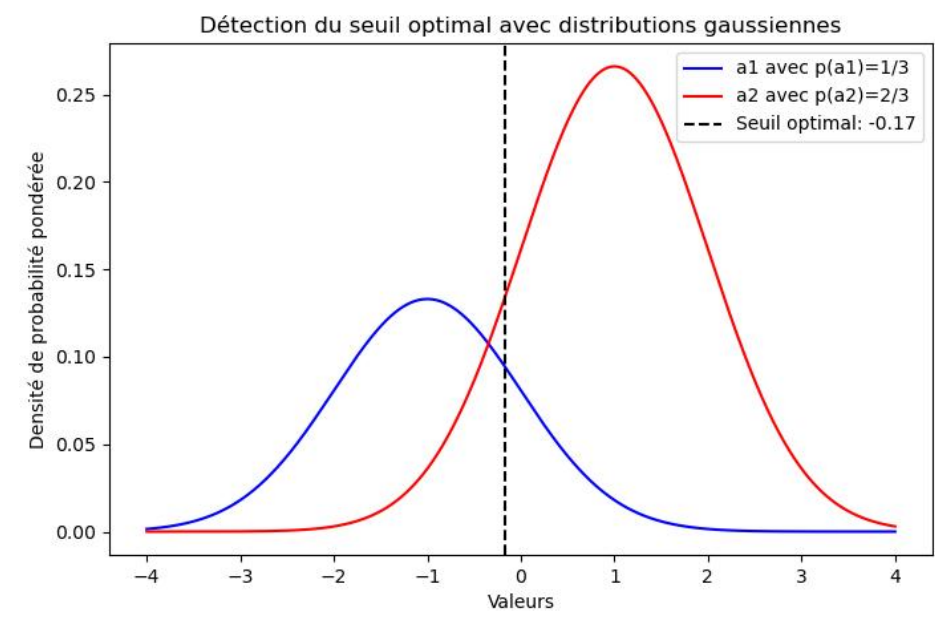
$$\rightarrow P_e = p_0 \int_S^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(y-a_0E_h)^2}{2\sigma_b^2}} dy + p_1 \int_{-\infty}^S \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(y-a_1E_h)^2}{2\sigma_b^2}} dy$$

$$\rightarrow \frac{dP_e}{dS} = 0 \rightarrow -p_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(S-a_0E_h)^2}{2\sigma_b^2}} + p_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} e^{-\frac{(S-a_1E_h)^2}{2\sigma_b^2}} = 0$$

$$\rightarrow S_{opt} = \frac{a_0+a_1}{2} E_h - \frac{\sigma_b^2}{E_h(a_1-a_0)} \ln \frac{p_1}{p_0} \rightarrow S_{opt} = \frac{a_0+a_1}{2} E_h - \frac{N_0}{2(a_1-a_0)} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Remarque :

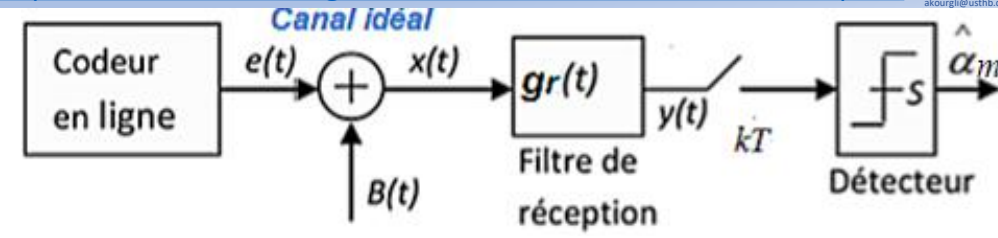
Lorsque les symboles ne sont pas équiprobables, le **seuil optimal MAP** se décale pour favoriser le symbole le plus probable



2. Récepteur optimal

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission d'un symbole sur un canal idéal



Calcul de la probabilité d'erreur

A l'instant t_0 , l'échantillon $y(t_0)$ est comparé à un seuil S et une décision sera prise pour décoder la valeur du symbole reçu :

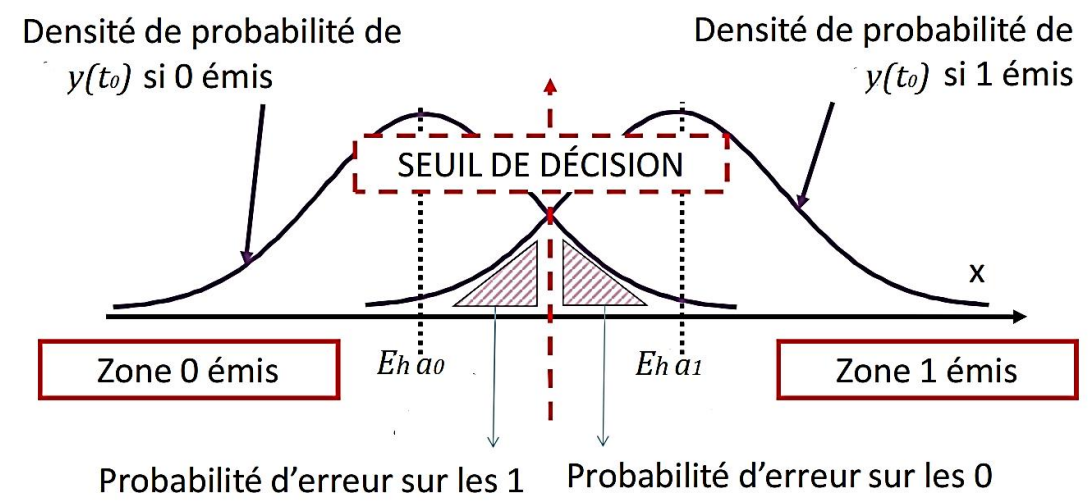
$$\begin{cases} y(t_0) > S & \text{alors } a_m = a_1 \\ y(t_0) \leq S & \text{alors } a_m = a_0 \end{cases}$$

Si $p_0 = p_1 \rightarrow S_{opt} = \frac{a_0 + a_1}{2} E_h$ et $P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \int_y^\infty e^{-\frac{((a_1 - a_0)/2)^2 E_h^2}{2\sigma_b^2}} dy$

La probabilité d'erreur dépend :

- De la distance entre les symboles $(a_1 - a_0)$
- De l'énergie E_h
- De la densité spectrale de bruit N_0 ($\sigma_b^2 = E_h N_0 / 2$)

→ Pour minimiser P_e , on maximise $\frac{((a_1 - a_0)/2)^2 E_h}{N_0}$ soit le SNR



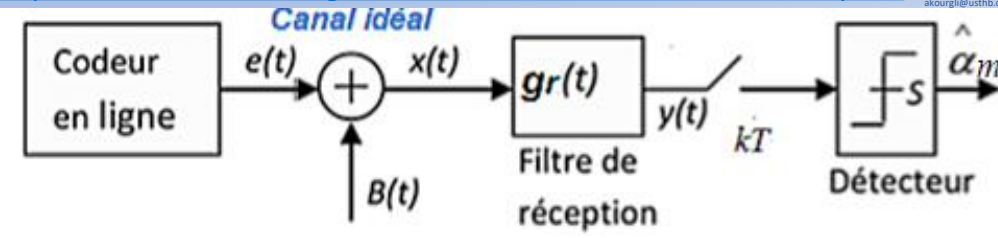
On pose $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \rightarrow P_e = Q\left(\frac{(a_1 - a_0)E_h}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right) \rightarrow$ Evaluer les performances en termes de BER

Remarque : Comme l'intégrale de la fonction Q n'a pas de solution analytique exacte, on utilise des approximations.

2. Récepteur optimal

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

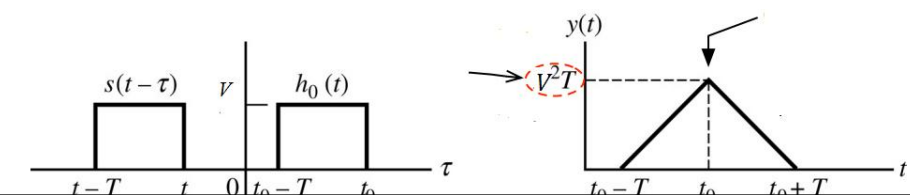


Calcul de la probabilité d'erreur

$\rightarrow S_{opt} = \frac{a_0 + a_1}{2} E_h$
 $P_e = Q\left(\frac{(a_1 - a_0)E_h}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right) \rightarrow \text{Evaluer les performances en termes de BER}$

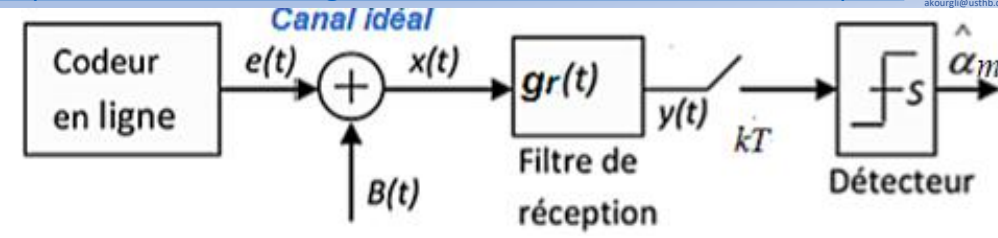
Exemples

- NRZ unipolaire : $a_1 = 1$ et $a_0 = 0$ $E_h = V^2 T_b = 2E_b \rightarrow S_{opt} = \frac{V^2 T_b}{2}$ et $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
- NRZ polaire : $a_1 = 1$ et $a_0 = -1$ $E_h = V^2 T_b = E_b \rightarrow S_{opt} = 0$ et $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
- RZ unipolaire : $a_1 = 1$ et $a_0 = 0$ $E_h = V^2 T_b / 2 = 2E_b \rightarrow S_{opt} = \frac{V^2 T_b}{4}$ et $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
- RZ polaire : $a_1 = 1$ et $a_0 = -1$ $E_h = V^2 T_b / 2 = E_b \rightarrow S_{opt} = 0$ et $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
- Manchester : $a_1 = 1$ et $a_0 = -1$ $E_h = V^2 T_b = E_b \rightarrow S_{opt} = 0$ et $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
- AMI, HDB3, RZ bipolaire ($\approx$ NRZ unipolaire) $\rightarrow S_{opt} = \pm \frac{V^2 T_b}{2}$ et $P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
- Miller ($\approx$ Manchester) $\rightarrow S_{opt} = 0$ et $P_e \approx Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal



Calcul de la probabilité d'erreur

L'énergie moyenne par symbole $E_{sym} \rightarrow E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_i E_{a_i} E_h$ et $E_{bit} = \frac{E_{sym}}{\log_2 M} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_i E_{a_i} E_h$

Rappels

- NRZ unipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$
- RZ unipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{4}$
- Manchester $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$
- AMI $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$
- HDB3 $\rightarrow E_{bit} \approx \frac{V^2 T_b}{2} \approx \frac{35}{64} \frac{V^2 T_b}{2}$
- NRZ polaire $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$
- RZ polaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{2}$
- 4-Aires $\rightarrow E_{bit} = 5/2 V^2 T_b$
- RZ bipolaire $\rightarrow E_{bit} = \frac{V^2 T_b}{4}$
- 8-Aires $\rightarrow E_{bit} = 7 V^2 T_b$
- Miller $\rightarrow E_{bit} = V^2 T_b$

2. Récepteur optimal

Transmission de symboles **M-Aires** sur un canal idéal

Le symbole a_m peut prendre M valeurs différentes:

$$e(t) = \sum_k a_m h(t - kT); \quad a_m = 0, \pm 1, \pm 3, \dots \pm M/2$$

Le détecteur ML calcule les distances euclidiennes entre l'échantillon reçu et les échantillons correspondant à toutes les séquences possibles et prend le minimum. Ce principe s'applique aussi pour l'envoi de plusieurs symboles (mais complexité calculatoire >>).

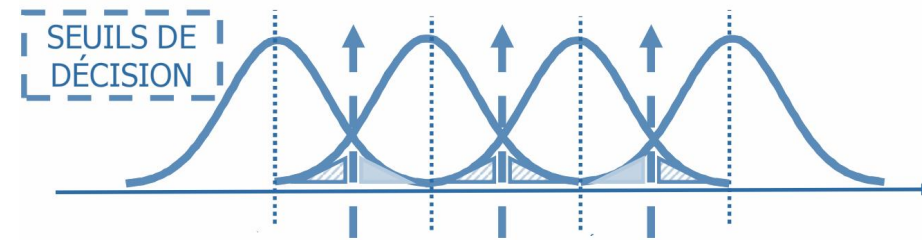
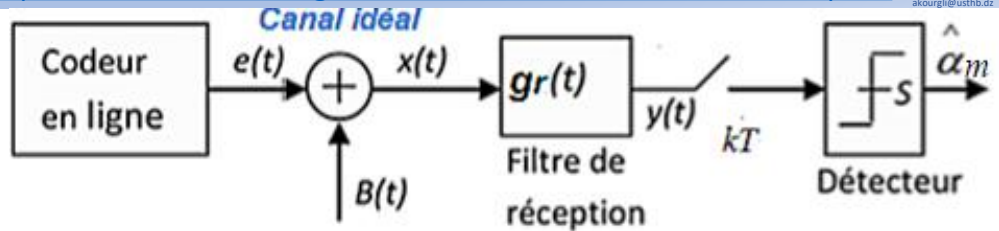
Détection du seuil optimal de décision

Probabilité d'erreur : $P_e = \sum_{i=-M/2}^{M/2} p(i) P_e(\text{erreur}/i)$ et $Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right)$

Si les symboles sont équiprobables : $P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=-M/2}^{M/2} P_e(\text{erreur}/i) \rightarrow P_e \approx \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2-1)N_0}}\right)$

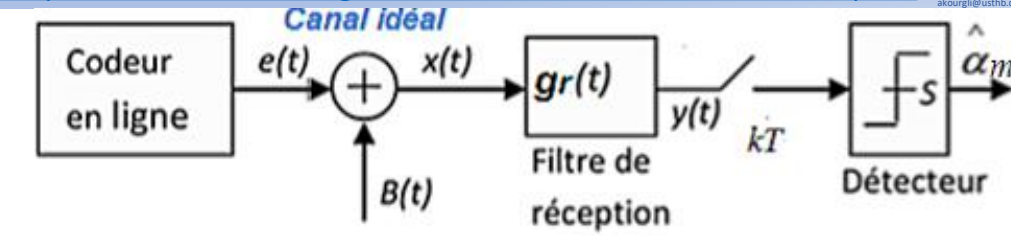
○ 4-Aires $\rightarrow$ entre 2 symboles successifs : $E_h = V^2 T_b = \frac{2}{5} E_b \rightarrow S_{opt} = 0, \pm 2V^2 T_s$, et $P_e \approx \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right)$

○ 8-Aires $\rightarrow$ entre 2 symboles successifs : $E_h = V^2 T_b = \frac{1}{7} E_b \rightarrow S_{opt} = 0, \pm 2V^2 T_s, \pm 4V^2 T_s, \pm 6V^2 T_s$, et $P_e \approx \frac{7}{12} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{7N_0}}\right)$



2. Récepteur optimal

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

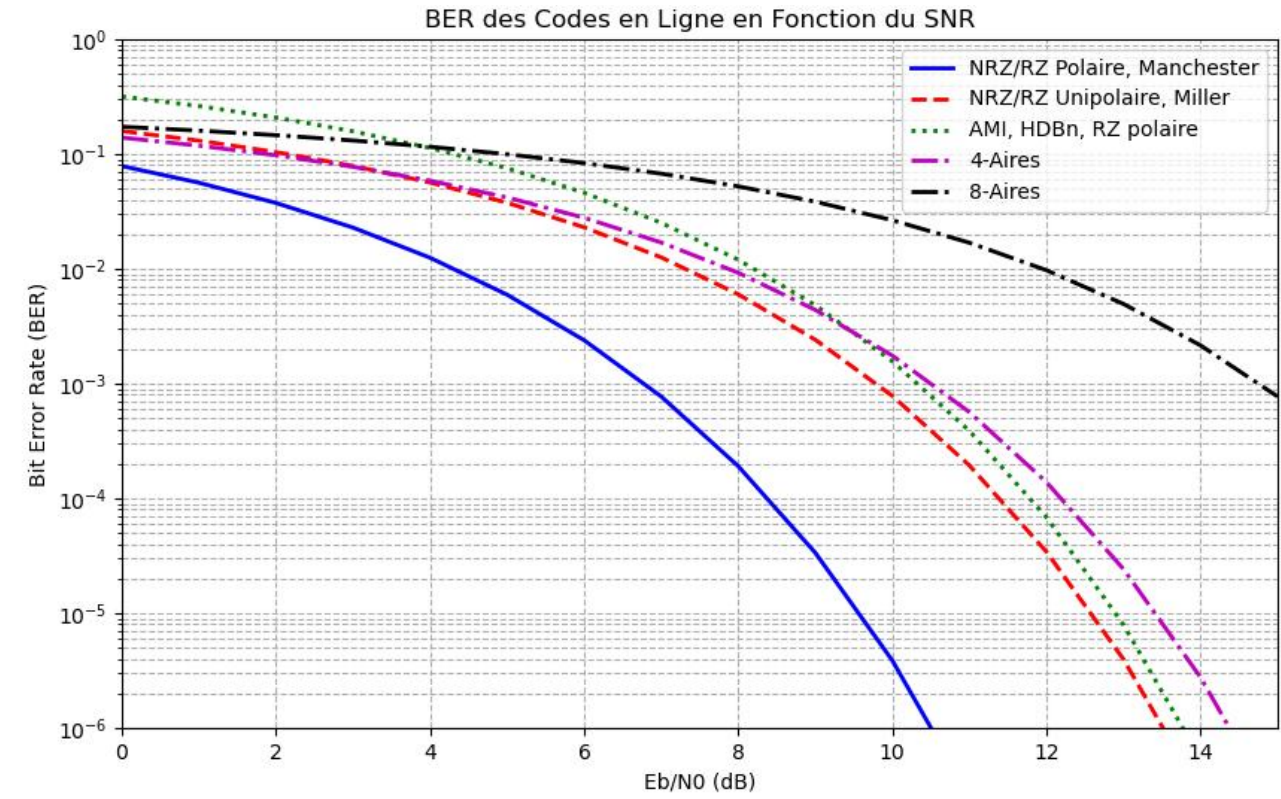


Calcul de la probabilité d'erreur

$\rightarrow S_{opt} = \frac{a_0 + a_1}{2} E_h$
 $P_e = Q\left(\frac{(a_1 - a_0)E_h}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right) \rightarrow \text{Evaluer les performances en termes de BER}$

BER identiques

- NRZ polaire, RZ polaire, Manchester $\rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$
- NRZ unipolaire, RZ unipolaire, Miller $\rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
- AMI, HDB3, RZ polaire $\rightarrow P_e = 2 Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
- 4-Aires $\rightarrow P_e = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right)$
- 8-Aires $\rightarrow P_e = \frac{7}{12} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{7N_0}}\right)$



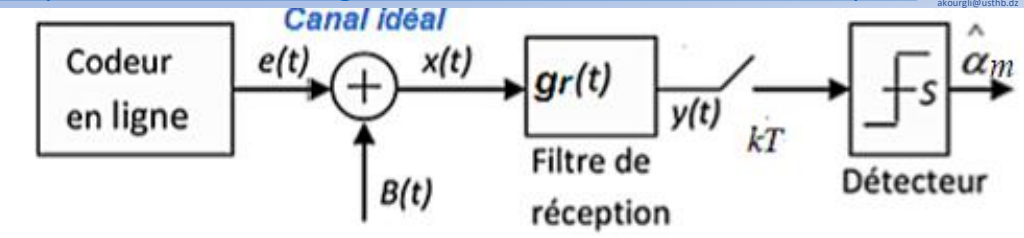
2. Récepteur optimal

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission d'un symbole sur un canal idéal

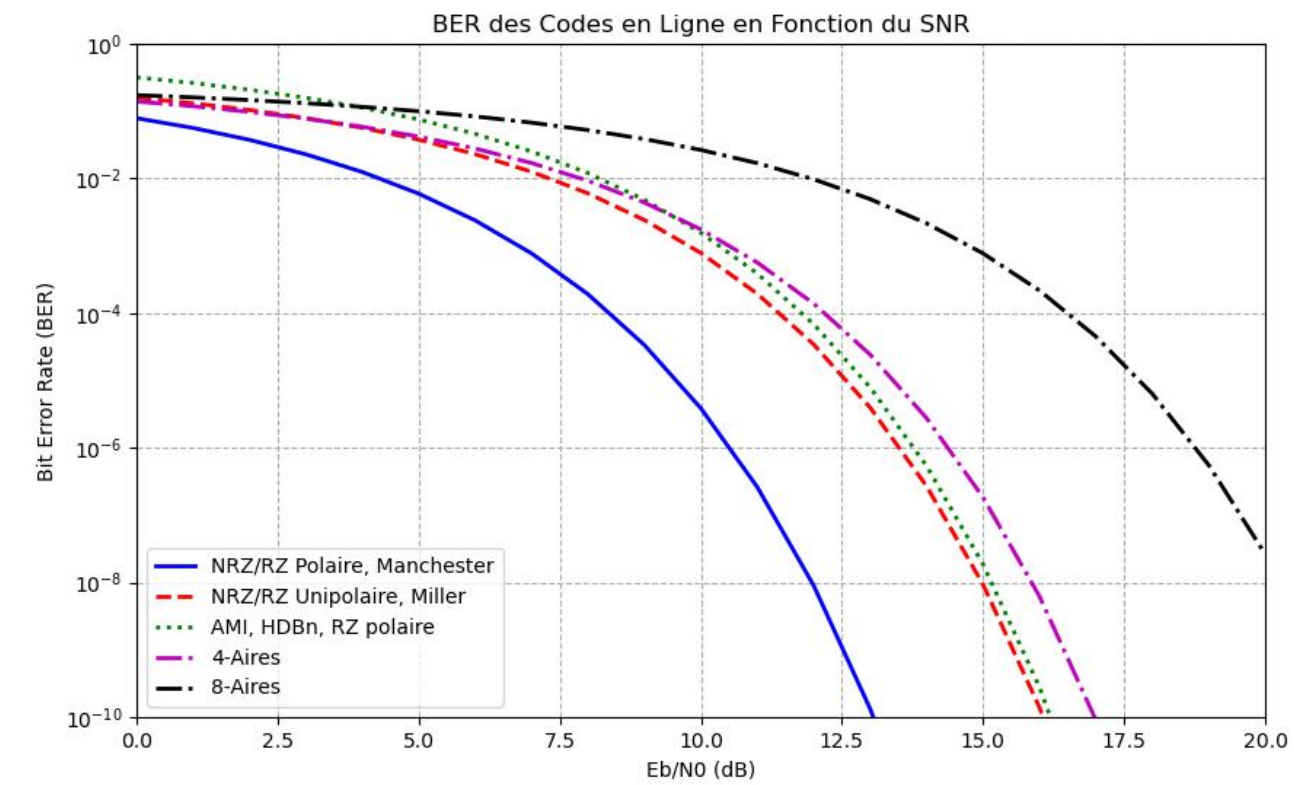
Calcul de la probabilité d'erreur

$\rightarrow S_{opt} = \frac{a_0 + a_1}{2} E_h$
 $P_e = Q\left(\frac{(a_1 - a_0)E_h}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right) \rightarrow \text{Evaluer les performances en termes de BER}$



BER identiques

Groupe	Codes Associés	Formule BER	Remarques
Codes Binaires Unipolaires	NRZ Unipolaire, RZ Unipolaire, Miller	$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$	Synchronisation parfaite, énergie réduite pour RZ.
Codes Binaires Polaires	NRZ Polaire, RZ Polaire, Manchester	$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$	Meilleure performance grâce à la distance accrue entre symboles.
Codes Ternaires	AMI, HDBn, RZ Bipolaire	$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$	Pénalité due à la détection à trois niveaux.
Multiniveaux (M-PAM)	4-Aire (4-PAM), 8-Aires (8-PAM)	$P_e \approx \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{0.8E_b}{N_0}}\right)$ (4-Aire) $P_e \approx \frac{7}{12}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{7N_0}}\right)$ (8-Aires)	Performance dégradée à cause des distances inter-symboles réduites.

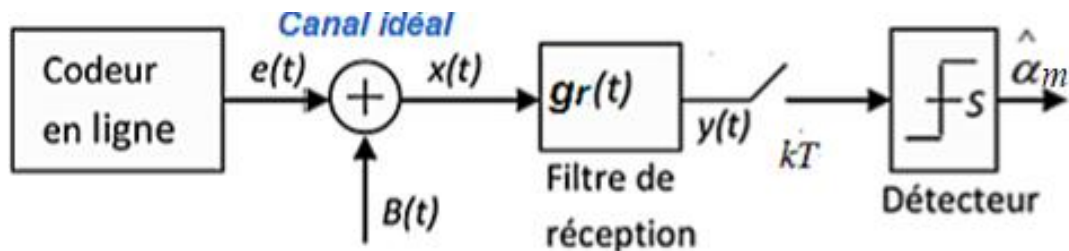


3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande limitée

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



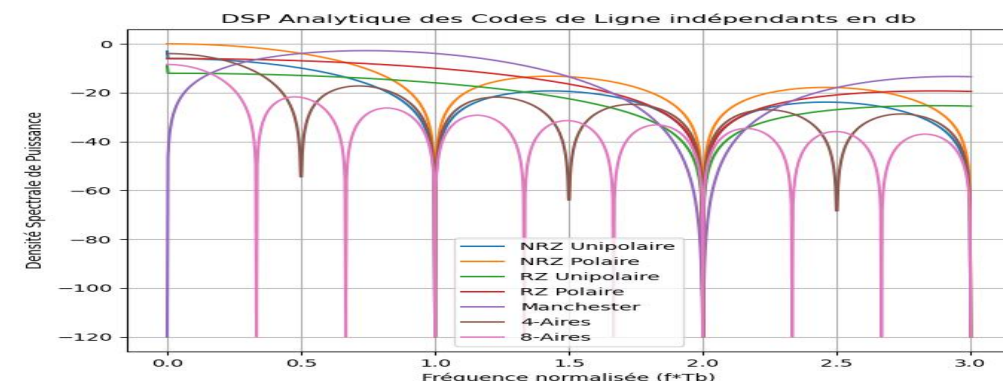
○ Émetteur :

- **Codeur en ligne** : Transforme les bits en impulsions (ex. : NRZ, Manchester, AMI).
- **Filtre de mise en forme/d'émission** : Réduit l'interférence inter-symbole (ISI) avec des filtres comme le cosinus surélevé.

○ Canal : Support physique (câble cuivre, fibre optique).

○ Récepteur :

- **Filtre adapté** : Maximise le rapport signal/bruit.
- **Échantillonneur** : Prélève le signal aux instants optimaux.
- **Décideur** : Reconstitue les bits à partir des échantillons.



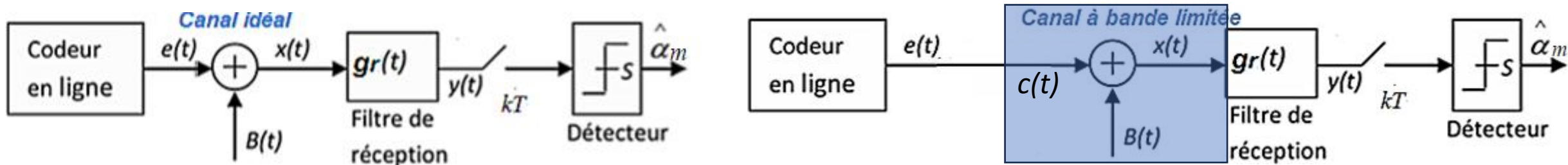
- Le canal idéal qui n'a pas de réalité physique, mais reste un **bon modèle lorsque la bande passante du canal est suffisamment large** pour **transmettre sans distorsion** le signal modulé.
- Les **impulsions rectangulaires** occupent une **bande passante infinie** (impossible à transmettre). Une impulsion rectangulaire idéale **devient étalée et arrondie** après transmission (effet de filtrage passe-bas).

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande limitée

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



Lorsque la bande passante du canal est inférieure à la bande passante du signal, le canal est limité en bande passante.

On considère un canal sans distorsion

$$C(f) = \begin{cases} C_0 e^{-2\pi j f_0 t} & |f| < B \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Transmettre le plus d'information possible en utilisant toutes les capacités du canal, mais sans les dépasser.
- si la bande passante de l'information à transmettre (code en ligne) occupe une bande supérieure à $B \rightarrow$ l'information sera perdue lors de la transmission.
- Dans le cas contraire, l'information sera plus sensible au bruit.
- La bande passante du canal de transmission va conditionner le choix du dictionnaire, filtres de mise en forme, etc...

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande limitée

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



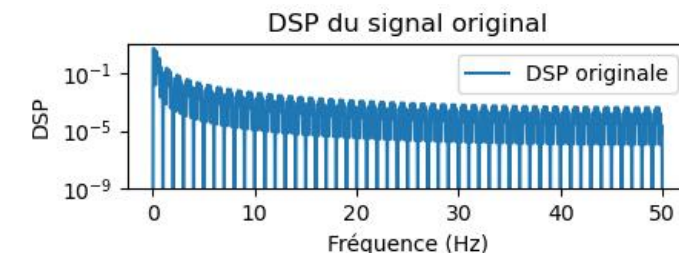
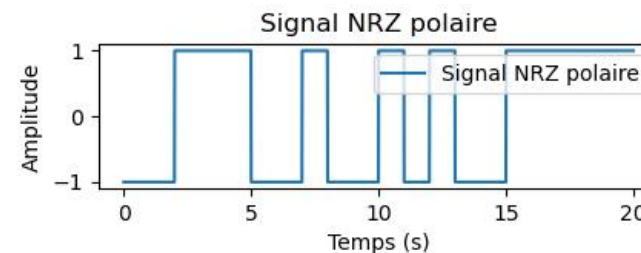
Lorsque la bande passante du canal est inférieure à la bande passante du signal, le canal est limité en bande passante.

On considère un canal sans distorsion

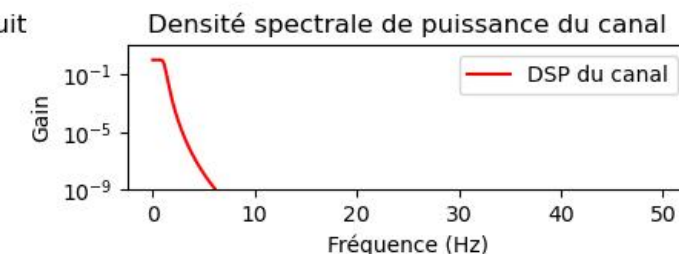
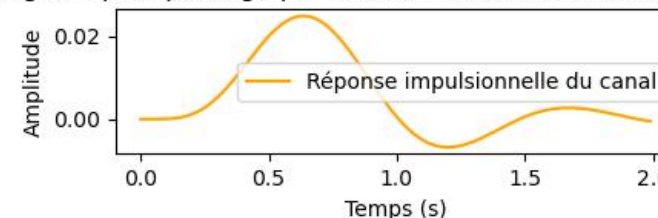
$$C(f) = \begin{cases} C_0 e^{-2\pi j f_0 t} & |f| < B \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

→ Les impulsions rectangulaires occupent une bande passante infinie (impossible à transmettre)

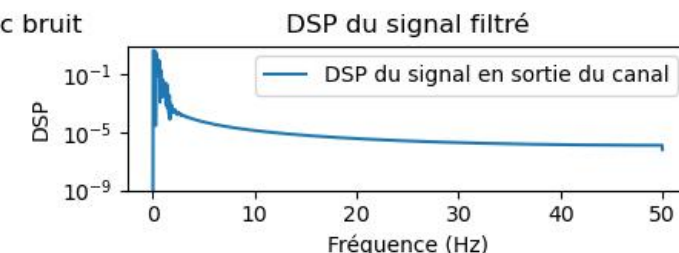
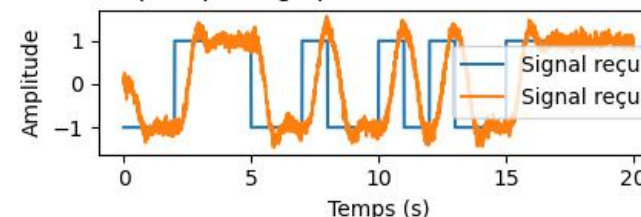
Une impulsion rectangulaire idéale **devient étalée et arrondie** après transmission (effet de filtrage passe-bas).



Signal après passage par le canal en bande limitée sans bruit



Signal avant et après passage par le canal en bande limitée avec bruit

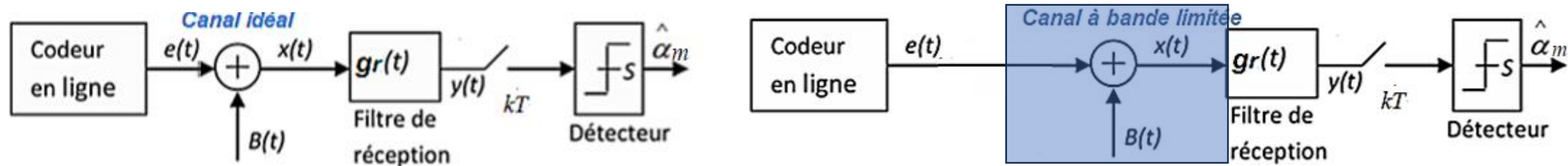


3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

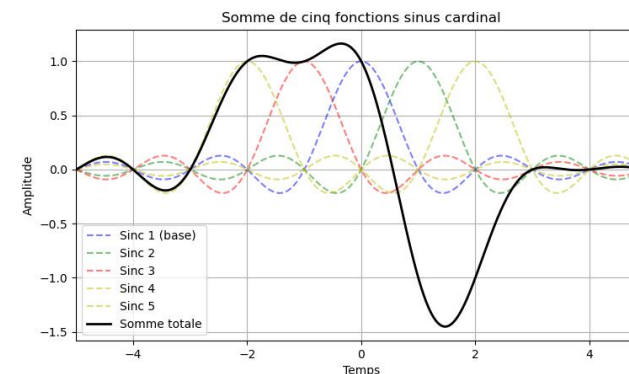
Transmission en bande limitée

Représentation du système de transmission d'un message numérique en bande de base



Lorsque la bande passante du canal est inférieure à la bande passante du signal, le canal est limité en bande passante.

- Les impulsions rectangulaires occupent une bande passante infinie (impossible à transmettre). Une impulsion rectangulaire idéale **devient étalée et arrondie** après transmission (effet de filtrage passe-bas).



Limitation en fréquence de $-B$ à B
 $\Rightarrow$ Convolution avec sinc qui s'annule tous les $1/2B$ dans le domaine temporel

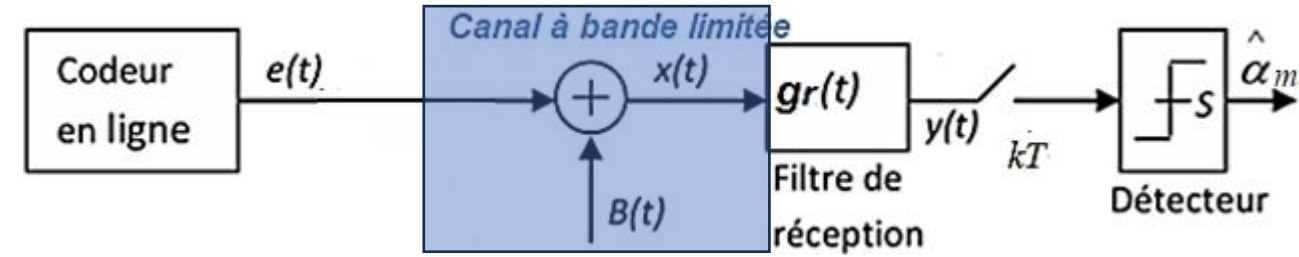
- Une **limitation sévère de la bande passante** provoque des **interférences inter-symboles (ISI)** (c'est-à-dire que les impulsions numériques (période de symbole T_s)) et interfère avec le symbole suivant ou même avec davantage de symboles. **s'étendent au-delà de leur durée de transmission** $\rightarrow$ Pics des impulsions ne seraient plus distinguables.
- L'ISI provoque une **augmentation de la probabilité d'erreur binaire (P_b)** ou du taux d'erreur binaire (BER), **une limitation du débit maximal** utilisable sur le canal et une **complexité accrue du récepteur** pour compenser ces effets.

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande limitée

Caractéristiques de l'IES : Diagramme de l'œil



Le contrôle au niveau temporel du degré d'IES s'effectue sur un oscilloscope par le diagramme de l'œil.

- Il permet de visualiser les chevauchements entre les (IES).
- Il est obtenu en superposant toutes les sections de durée T du signal $y(t)$.

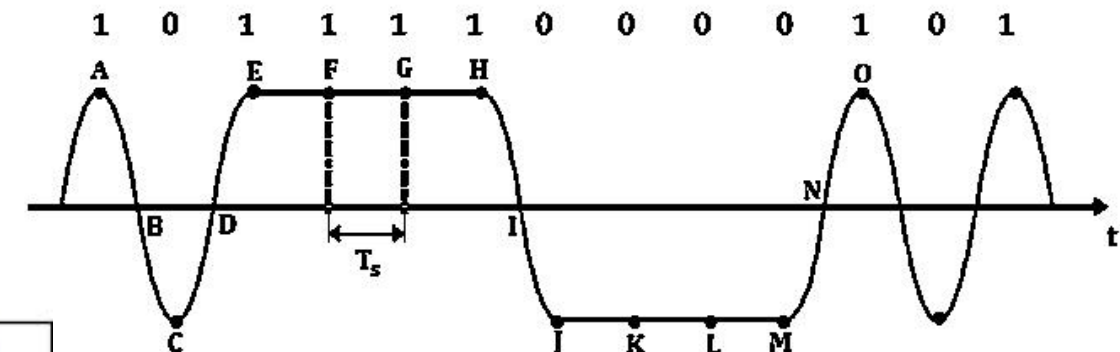
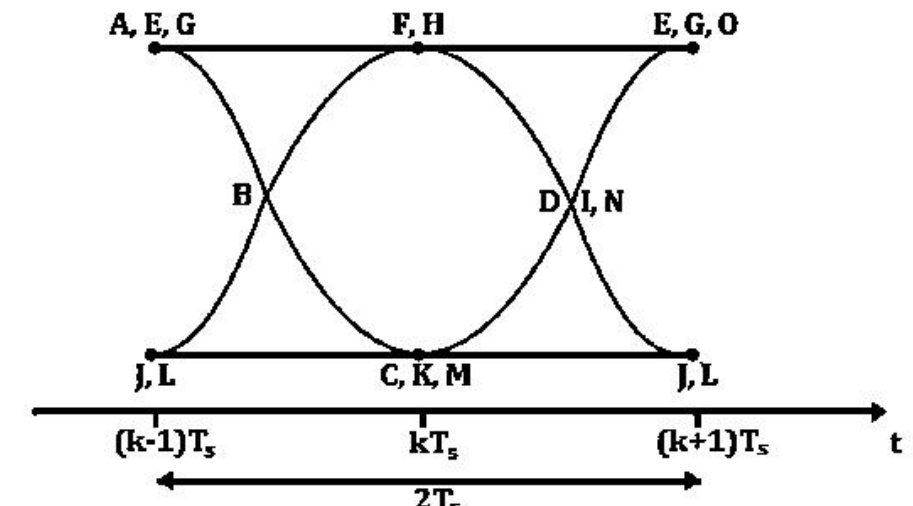
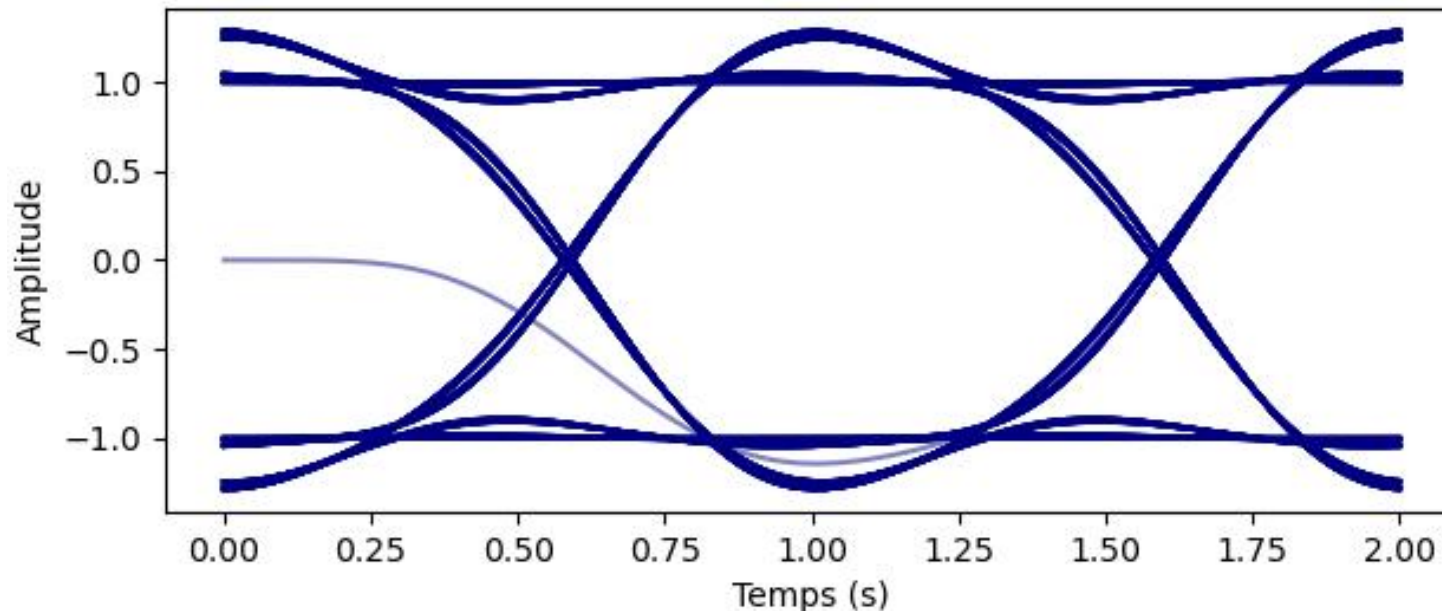


Diagramme de l'œil - Signal reçu

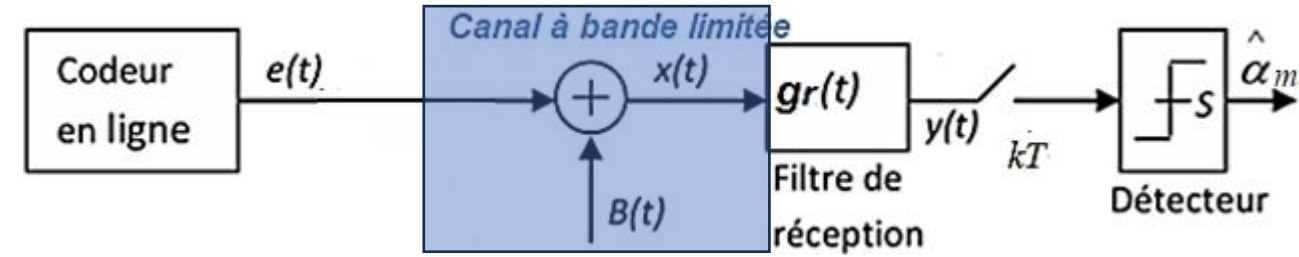


3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande limitée

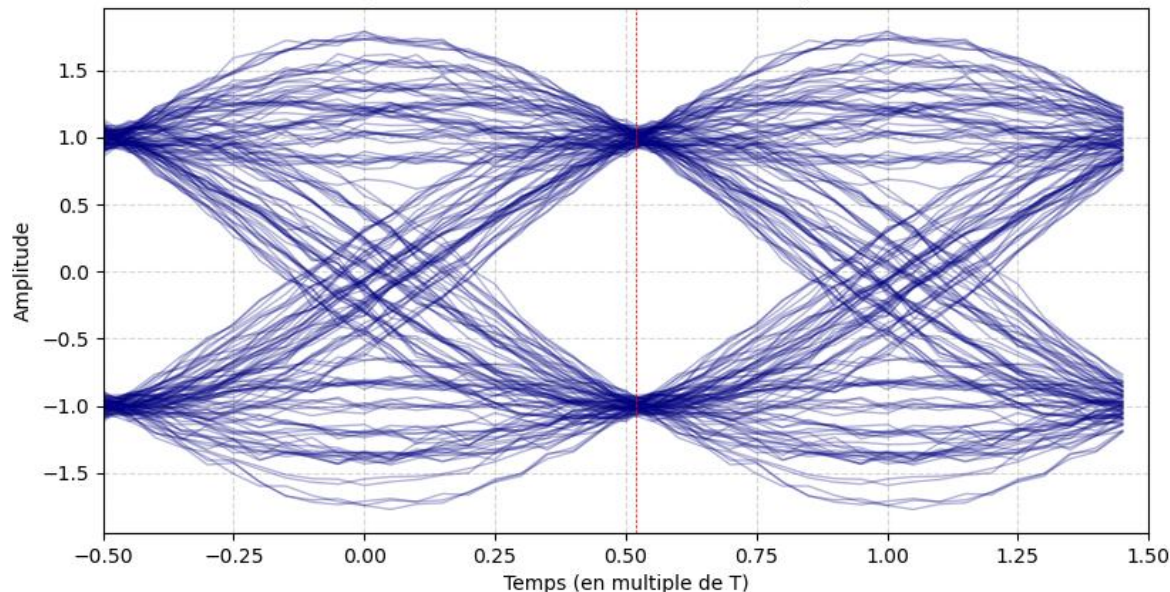
Caractéristiques de l'IES : Diagramme de l'œil



Le contrôle au niveau temporel du degré d'IES s'effectue sur un oscilloscope par le diagramme de l'œil.

- Il permet de visualiser les chevauchements entre les (IES).
- Il est obtenu en superposant toutes les sections de durée T du signal $y(t)$.

Diagramme de l'œil avec SNR = 30 et $\alpha = 0.25$



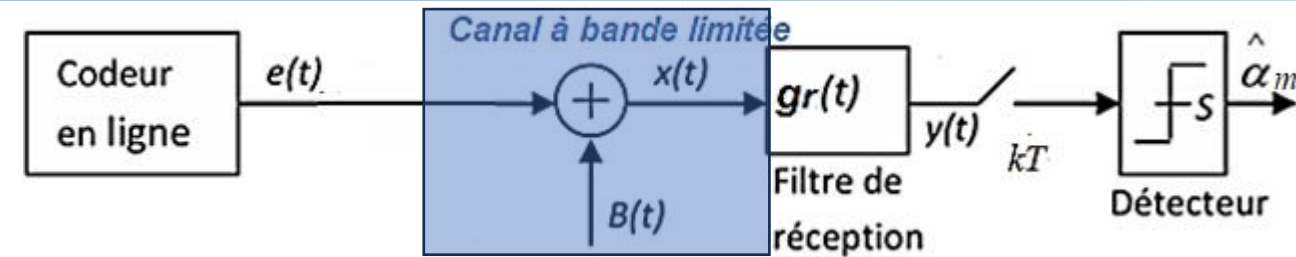
- L'ouverture verticale mesure les performances contre le bruit. Plus l'œil est ouvert en hauteur, plus il est facile de discriminer les deux symboles en présence de bruit et donc, plus la probabilité d'erreur est faible. Si le diagramme manifeste la présence d'une IES (faible), et que l'on souhaite continuer à utiliser une détection à seuils (solution sous optimale), il faudra échantillonner le signal $r(t)$ aux instants où l'œil a une ouverture maximum.
- L'ouverture horizontale indique une résistance à un décalage des instants d'échantillonnage. Ainsi plus l'œil est ouvert en largeur, plus les lobes secondaires de la réponse en temps seront faibles et plus l'accumulation des interférences dues au décalage des instants d'échantillonnage auront une influence moindre en termes de probabilité d'erreur. C'est le cas pour les fonctions en cosinus surélevé lorsque α augmente.

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande limitée

Caractéristiques de l'IES : Diagramme de l'œil



Le contrôle au niveau temporel du degré d'IES s'effectue sur un oscilloscope par le diagramme de l'œil.

- Il permet de visualiser les chevauchements entre les (IES).
- Il est obtenu en superposant toutes les sections de durée T du signal $y(t)$.

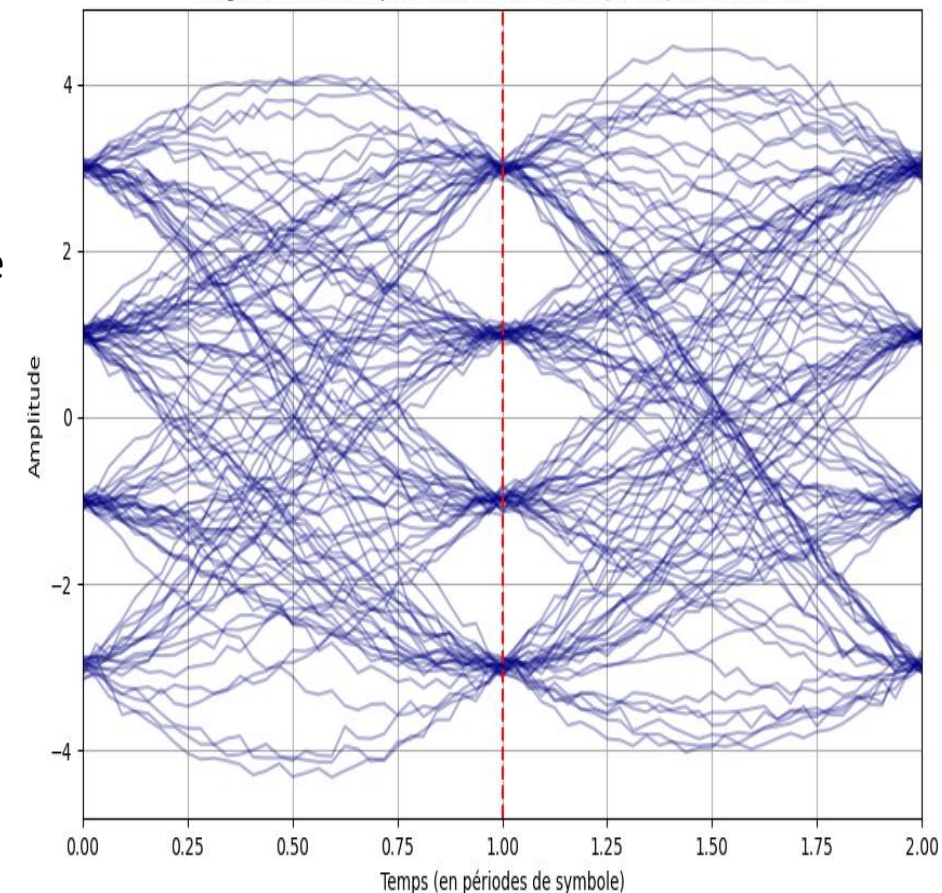
Le but est de déterminer l'instant d'échantillonnage optimal (instant de la période où l'œil est le plus ouvert) :

- Ouverture verticale (hauteur de l'œil) : immunité au bruit.
- Ouverture horizontale (largeur de l'œil) : marge pour le choix de l'instant d'échantillonnage.
- Pente de la fermeture : sensibilité à une erreur par rapport à l'instant optimal.

Distorsion max de l'œil : $D_{max} = 1 - \frac{(M-1)r(k)}{r_{max}}$ où $r_{max} = \max\{r(k)\}$

Si $D_{max} \ll 1 \rightarrow$ Décision optimale/symbole possible. Impossible Si D_{max} proche de 1.

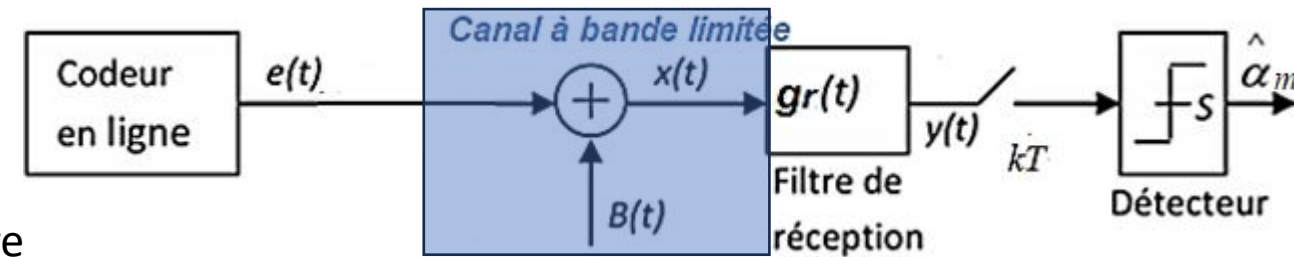
Diagramme de l'œil pour modulation 4-Aires ($\alpha=0.5$) avec SNR =30



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

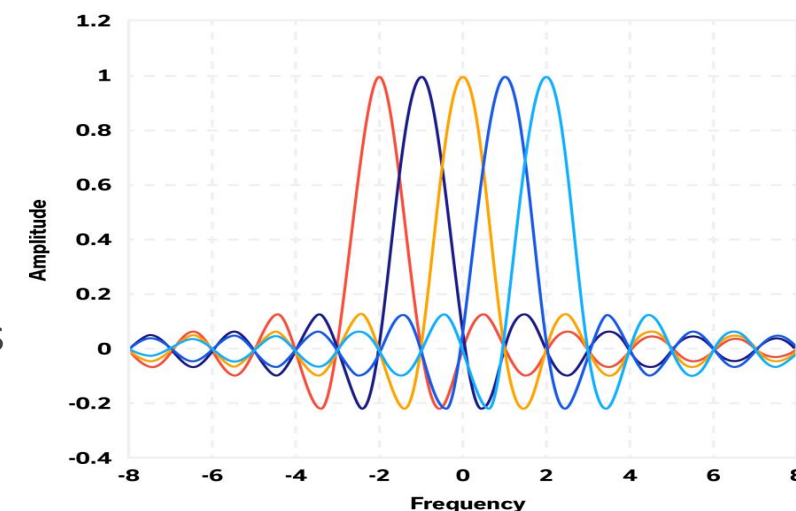
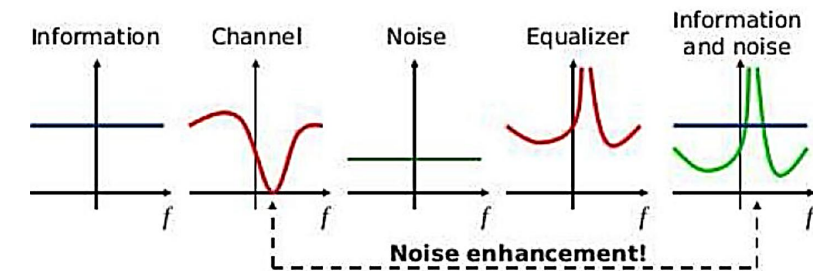
Transmission en bande limitée



Que faire pour limiter l'ISI ??

Pour limiter ces interférences, plusieurs techniques peuvent être en œuvre :

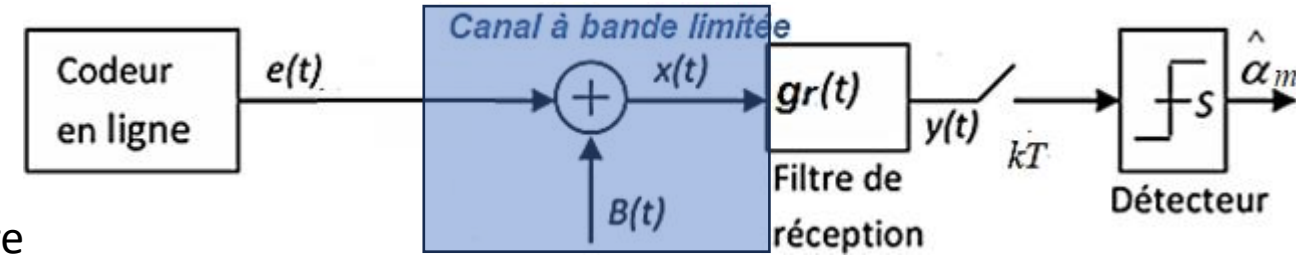
- **Filtrage adapté et formes d'onde optimisées** : Utiliser des filtres dont la réponse impulsionnelle a un **recouvrement minimal**, comme la forme d'onde **raised cosine**.
- **Égalisation** : Mettre en place des égaliseurs (égaliseur de ZF, MMSE) au niveau du récepteur qui compensent les effets d'étalement du canal (risque d'amplifier le bruit). Puis on emploie un code correcteur d'erreurs (ex. codes de Reed-Solomon) utilisés pour corriger les erreurs résiduelles après égalisation (Correction de symboles par bloc. Ex: la télévision numérique (DVB-T), les communications satellitaires, CD/DVD).
- **Techniques de modulation résilientes** : OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) découpe le canal en N sous-porteuses étroites à bas débit, moins sensibles à l'ISI puisque $T_{sym} \gg \tau_{max}$ (τ_{max} : Etalement du canal). Elles sont facilement Égalisées par un correcteur de phase/gain. ex **Wi-Fi (802.11a/g/n/ac)** $\rightarrow N=52$.



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

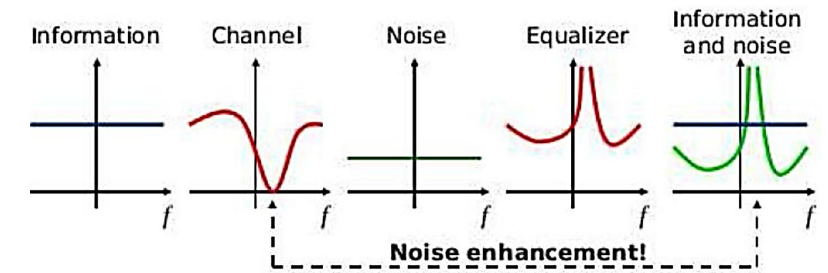
Transmission en bande limitée



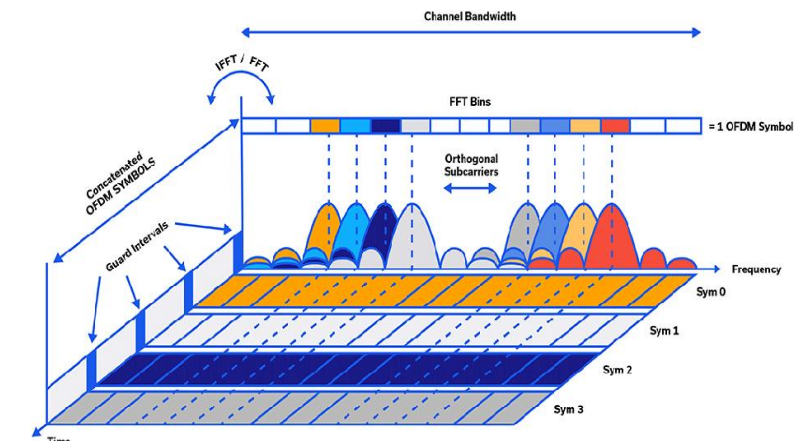
Que faire pour limiter l'ISI ??

Pour limiter ces interférences, plusieurs techniques peuvent être en œuvre :

- **Filtrage adapté et formes d'onde optimisées** : Utiliser des filtres dont la réponse impulsionnelle a un **recouvrement minimal**, comme la forme d'onde **raised cosine**.
- **Égalisation** : Mettre en place des égaliseurs (égaliseur de ZF, MMSE) au niveau du récepteur qui compensent les effets d'étalement du canal (risque d'amplifier le bruit). Puis on emploie un code correcteur d'erreurs (ex. codes de Reed-Solomon) utilisés pour corriger les erreurs résiduelles après égalisation (Correction de symboles par bloc. Ex: la télévision numérique (DVB-T), les communications satellitaires, CD/DVD.



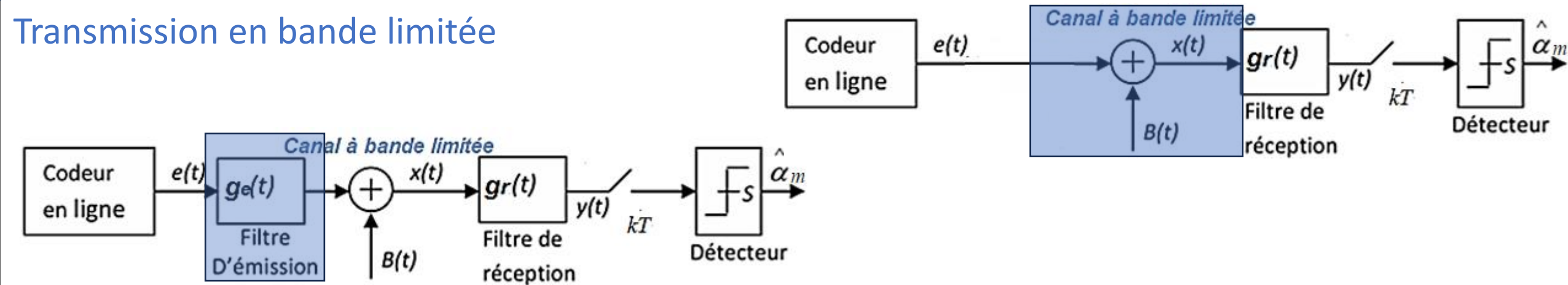
- **Techniques de modulation résilientes** : OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) découpe le canal en N sous-porteuses étroites à bas débit, moins sensible à l'ISI puisque $T_{sym} \gg \tau_{max}$ (τ_{max} : Etalement du canal). Elles sont facilement Égalisées par un correcteur de phase/gain. ex **Wi-Fi (802.11a/g/n/ac)** $\rightarrow N=52$.



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande limitée



○ Filtre de mise en forme/d'émission/de transmission

Le **filtre de mise en forme** (ou *shaping filter*) est un élément clé dans les systèmes de communication numérique, notamment en transmission bande de base.

Son rôle est de **modifier la forme des impulsions numériques avant leur transmission** pour **optimiser l'utilisation de la bande passante** et **réduire les interférences entre symboles**.

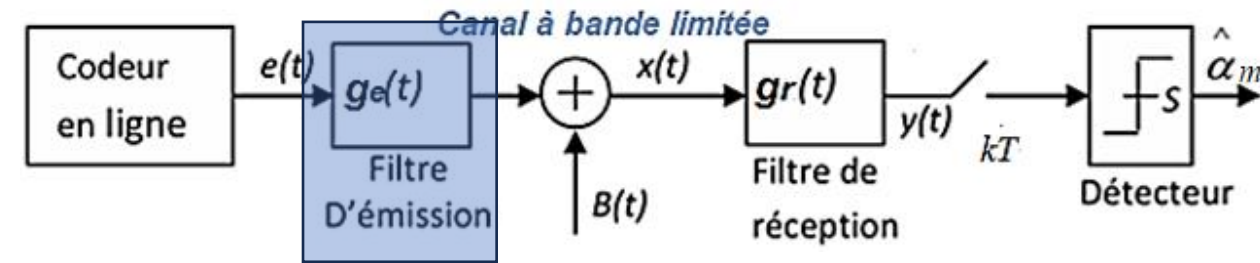
Le filtre transforme les impulsions rectangulaires (générées par le codeur en ligne) en **impulsions plus lisses**, avec une décroissance rapide dans le domaine temporel.

Il **atténue les fréquences hors bande** tout en préservant l'intégrité du signal dans la bande utile. Il donc **indispensable** pour concilier efficacité spectrale, robustesse au bruit et suppression de l'ISI dans les systèmes numériques modernes.

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Transmission en bande limitée



$$y(t) = g_r(t) * x(t) = g_r(t) * \underbrace{g_e(t) * e(t) * C(f)}_{b(t)} + \overbrace{g_r(t) * B(t) * C(f)}$$

$$\text{On pose } e(t) = \sum_k \overbrace{a_k}^{a_m(k)} h(t - kT) = \sum_k a_k h(t - kT);$$

$y(t) = \sum_k a_k r(t - kT) + b(t)$. Dans un canal $C(f)$ à bande limitée, le signal $r(t)$ n'est plus de durée T .

La sortie $y(t)$ du filtre de réception à l'instant $t_0 + nT$:

$$y(t_0 + nT) = \sum_k a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT) = \underbrace{a_n r(t_0)}_{\text{Signal utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + \underbrace{(n - k)T}_m)}_{\text{Termes d'Interférences}} + \underbrace{b(t_0 + nT)}_{\text{Bruit}}$$

L'échantillon $y(t_0 + nT)$ dépend du symbole a_n , mais aussi des symboles antérieurs et même postérieurs au symbole $a_{k(k \neq n)}$ dit terme d'Interférence Entre Symboles (IES)

On souhaite qu'il n'y ait **pas d'IES aux instants de décision** ($t_0 + nT$) $\rightarrow$ L'impulsion $r(t)$ peut être de durée et de forme quelconque, mais **tous ses échantillons aux instants** ($t_0 + mT$) pour $m \neq 0$, doivent être nuls $\rightarrow \forall m \neq 0, r(t_0 + mT) = 0$

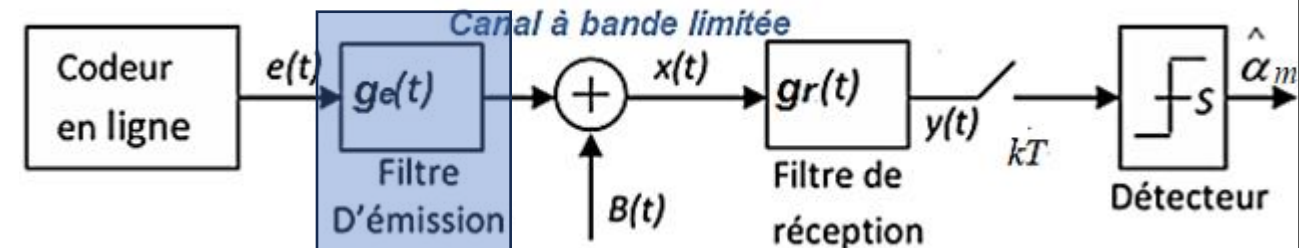
Objectif : Trouver des **filtres d'émission** et **réception** permettant de **minimiser les IES et le bruit**

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Effet du Canal sur la forme d'onde du code en ligne

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$



Objectif : Trouver des **filtres d'émission** et **réception** permettant de **minimiser les IES et le bruit**

$$\forall n \quad r(t_0 + nT) = r(t_0)$$

Un filtre qui assure cette condition est dit **de Nyquist**

Le filtre **r(t)** qui représente le canal en entier (filtre d'émission, de canal, de réception) est dit canal de Nyquist s'il vérifie cette condition.

Recherche r(t) assurant la condition de Nyquist

Soit $r_e(t)$ le signal $r(t)$ échantillonné : $r_e(t) = r(t) \sum_n \delta(t - nT - t_0) = \sum_n r(nT + t_0) \delta(t - nT - t_0)$

La TF donne : $R_e(f) = \frac{1}{T} \sum_n R(f - n/T) e^{-2\pi j n/T t_0} = \sum_n r(nT + t_0) e^{-2\pi j f(nT + t_0)}$

L'absence d'interférence est vérifiée si : $r(t_0 + nT) = r(t_0)$

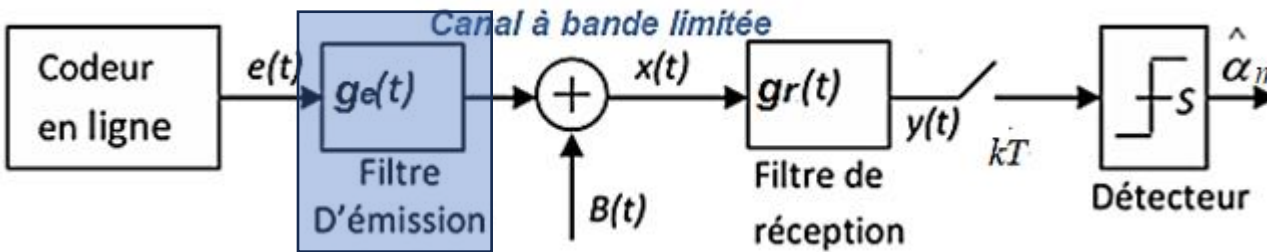
$$\rightarrow \frac{1}{T} \sum_n R(f - n/T) e^{-2\pi j n/T t_0} = r(t_0) e^{-2\pi j f t_0} \rightarrow T = \frac{1}{r(t_0)} \sum_n R(f - n/T) e^{2\pi j (f - n/T) t_0}$$

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Interférence entre symboles (IES) – Critère de Nyquist

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$



Objectif : Trouver des **filtres d'émission** et **réception** permettant de **minimiser les IES et le bruit**

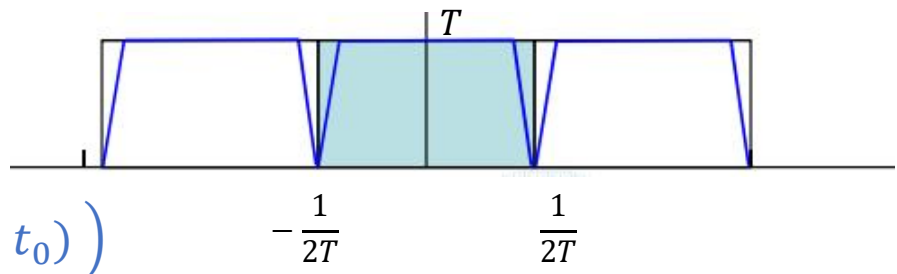
$$\frac{1}{T} \sum_n R(f - n/T) e^{-2\pi j n/T t_0} = r(t_0) e^{-2\pi j f t_0} \rightarrow T = \frac{1}{r(t_0)} \sum_n R(f - n/T) e^{2\pi j (f - n/T) t_0}$$

On pose $R^{(t_0)}(f) = \frac{R(f)}{r(t_0)} e^{2\pi j f t_0}$

Exemple : $R^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq 1/2T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$(T = \sum_n R^{(t_0)}(f - n/T))$$

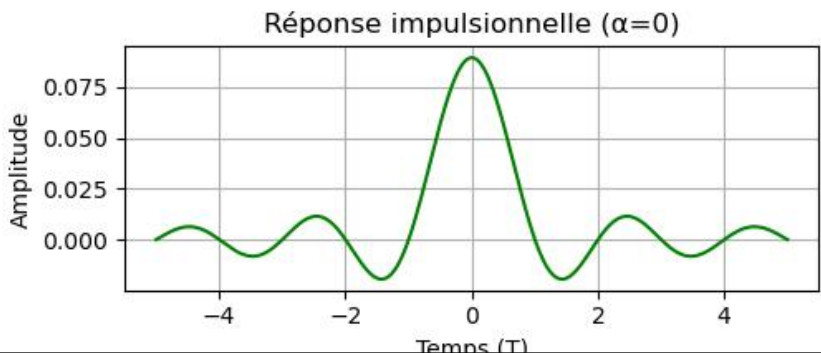
$$\rightarrow r(t) = r(t_0) \text{sinc}\left(\frac{1}{T}(t - t_0)\right)$$



$\rightarrow R^{(t_0)}$ est constant sur une période $[-B, B]$ où $B=1/2T$ dite bande de Nyquist

Rappelons :

- Il est impossible d'avoir un support borné a la fois en temps et en fréquence.
- La transmission doit s'effectuer dans un canal $C(f)$ à bande passante limitée $[-B, B]$.
- En pratique, si on ne conserve pour calculer la bande que le lobe principal et le premier lobe secondaire, cette bande est alors de l'ordre de $4/T$.

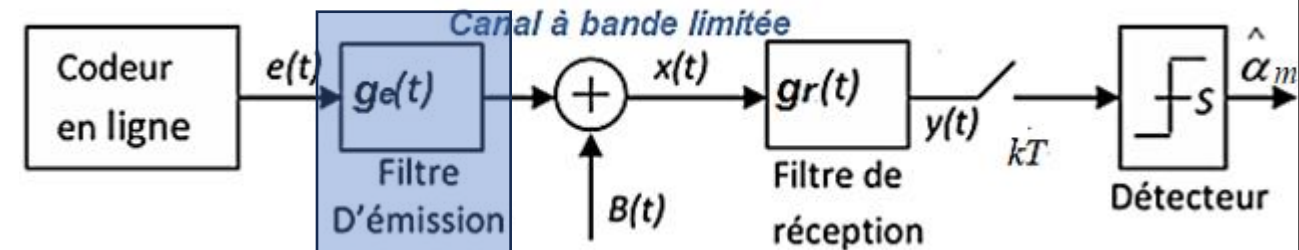


3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Interférence entre symboles (IES) – Critère de Nyquist

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$



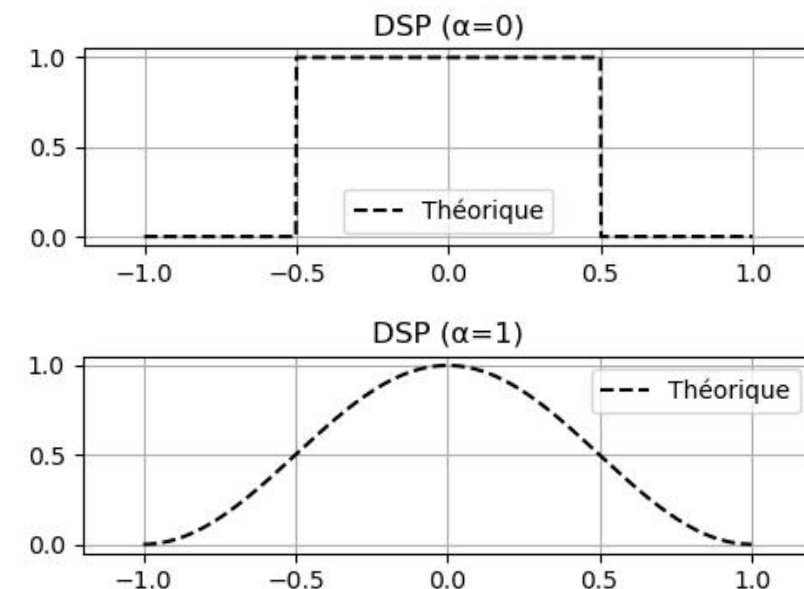
Objectif : Trouver des **filtres d'émission** et **réception** permettant de **minimiser les IES et le bruit**

$$R^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq 1/2T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \rightarrow r(t) = r(t_0) \text{sinc} \left(\frac{1}{T} (t - t_0) \right) \rightarrow \text{s'annule tous les } t_0 + mT$$

La bande de fréquence minimale nécessaire à la transmission en bande de base sans IES d'un signal numérique avec une rapidité de modulation $R = 1/T$ est égale à $1/2T \rightarrow$ **Bande de Nyquist**.

$\text{sinc} \left(\frac{1}{T} (t - t_0) \right)$ s'annule tous les T mais est physiquement irréalisable + Convergence lente vers 0.

- Mais tout filtre ayant une **bande passante** $> \text{à } 1/2T$ et une **symétrie impaire par rapport à $1/2T$** peut satisfaire la condition de Nyquist. Ex : **Filtre en cosinus surélevé**.
- Si le filtre a une **bande passante** $< \text{à } 1/2T \rightarrow$ Les écart entre copies rendent impossible d'avoir une somme constante à toutes les fréquences.
- $\rightarrow$ Impossible d'éviter IES qd bande passante du filtre $< \text{à } 1/2T$.

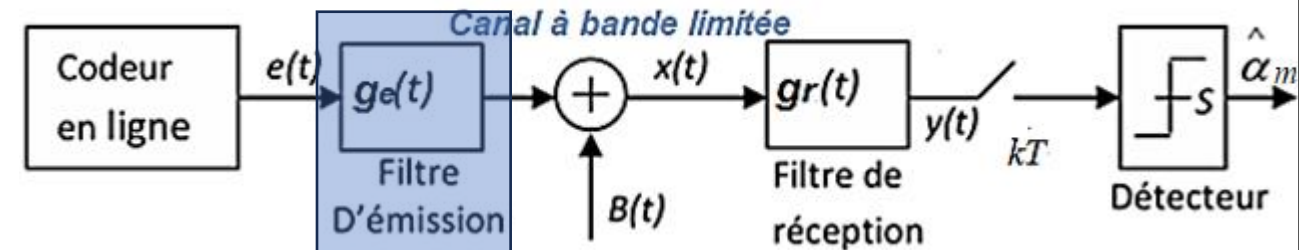


3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Interférence entre symboles (IES) – Critère de Nyquist

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$



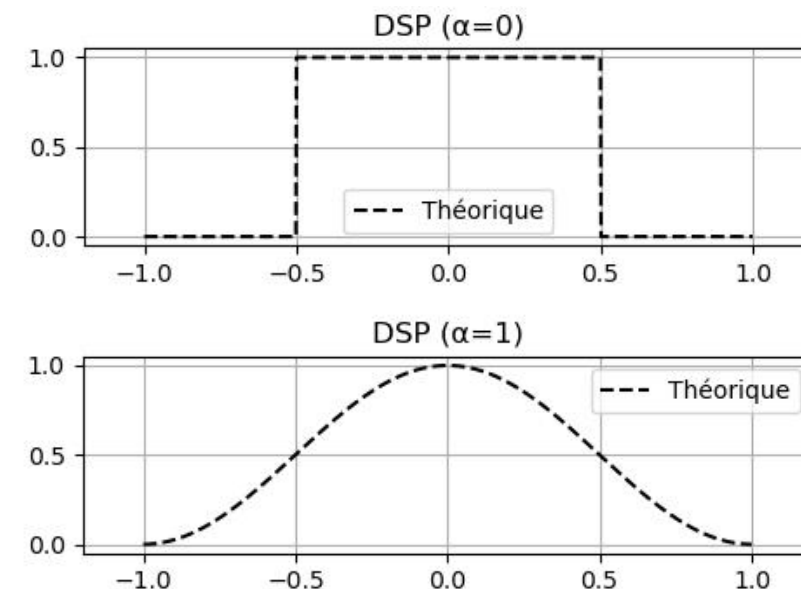
Objectif : Trouver des **filtres d'émission** et **réception** permettant de **minimiser les IES et le bruit**

$$R^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq 1/2T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \rightarrow r(t) = r(t_0) \text{sinc}\left(\frac{1}{T}(t - t_0)\right) \rightarrow \text{s'annule tous les } t_0 + mT$$

La bande de fréquence minimale nécessaire à la transmission en bande de base sans IES d'un signal numérique avec une rapidité de modulation $R = 1/T$ est égale à $1/2T \rightarrow$ **Bande de Nyquist**.

$\text{sinc}\left(\frac{1}{T}(t - t_0)\right)$ s'annule tous les T mais est physiquement irréalisable + Convergence lente vers 0.

$\rightarrow$ Utiliser des filtres pratiques, comme le **cosinus surélevé** (raised cosine filter), qui introduit un **facteur de roll-off** $\left(\frac{1-\alpha}{2T}\right)$ pour contrôler l'**atténuation progressive** de la bande passante $\left(\frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T}\right)$, facilitant ainsi l'implémentation matérielle.

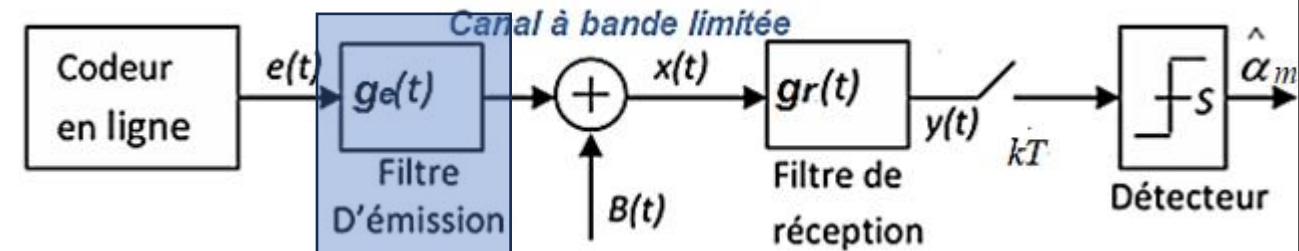


3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Interférence entre symboles (IES) – Critère de Nyquist

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$



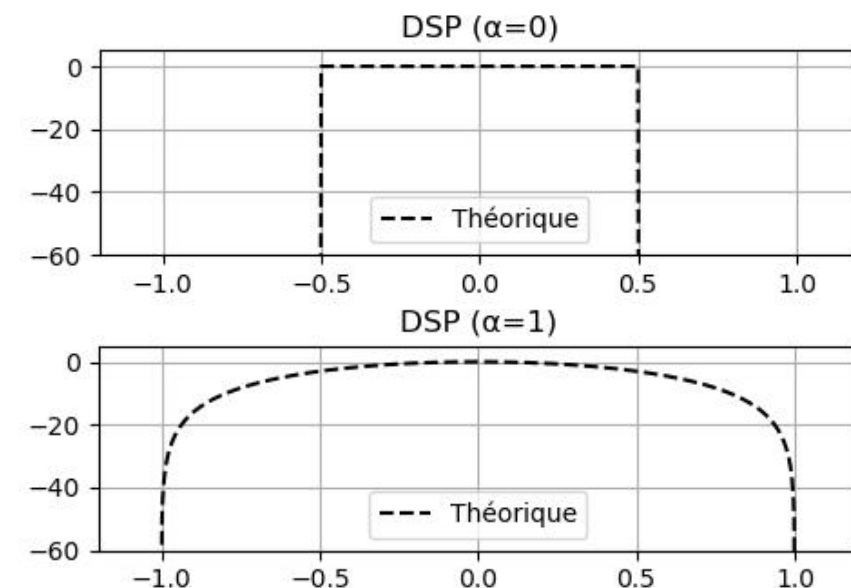
Objectif : Trouver des **filtres d'émission** et **réception** permettant de **minimiser les IES et le bruit**

$$R^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq 1/2T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \rightarrow r(t) = r(t_0) \text{sinc}\left(\frac{1}{T}(t - t_0)\right) \rightarrow \text{s'annule tous les } t_0 + mT$$

La bande de fréquence minimale nécessaire à la transmission en bande de base sans IES d'un signal numérique avec une rapidité de modulation $R = 1/T$ est égale à $1/2T \rightarrow$ **Bande de Nyquist**.

$\text{sinc}\left(\frac{1}{T}(t - t_0)\right)$ s'annule tous les T mais est physiquement irréalisable + Convergence lente vers 0.

$\rightarrow$ Utiliser des filtres pratiques, comme le **cosinus surélevé** (raised cosine filter), qui introduit un **facteur de roll-off** $\left(\frac{1-\alpha}{2T}\right)$ pour contrôler l'**atténuation progressive** de la bande passante $\left(\frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T}\right)$, facilitant ainsi l'implémentation matérielle.



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Filtre en Cosinus surélevé

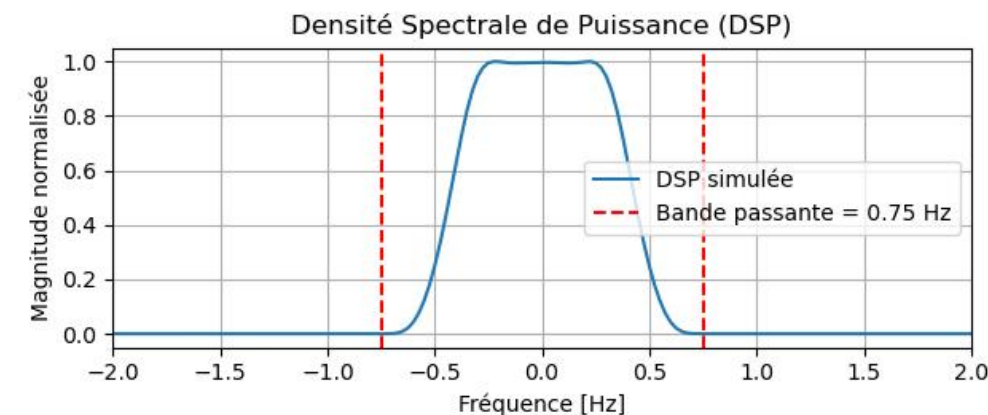
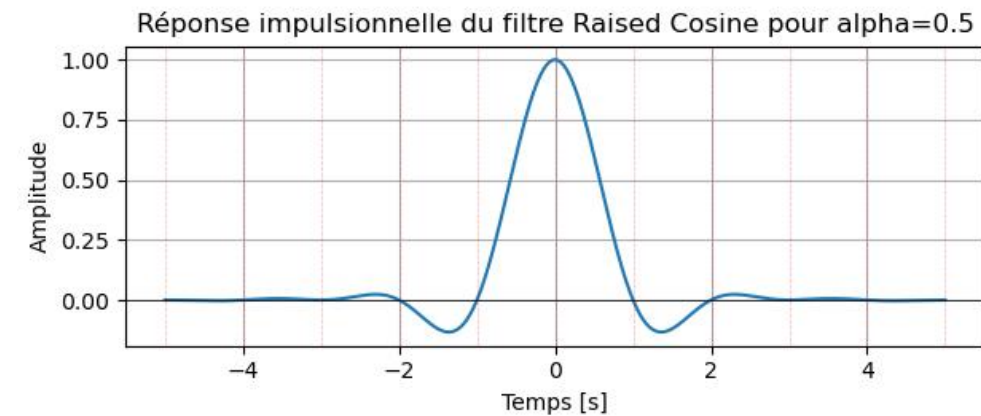
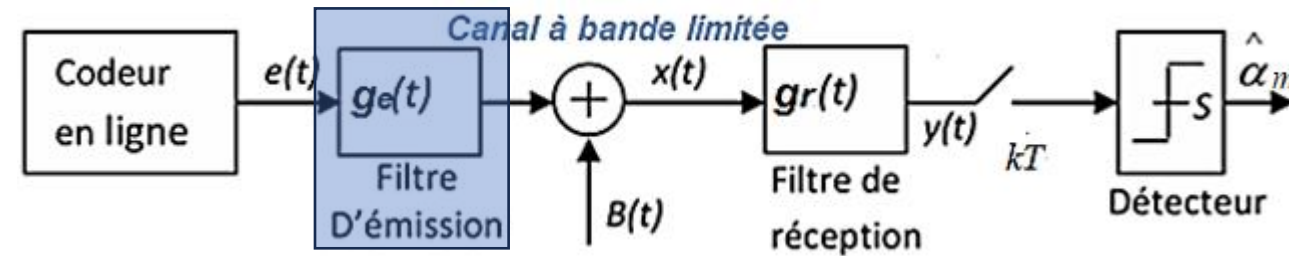
$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$

$$RC_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1 - \alpha}{2T} \\ T \cos^2 \left(\frac{\pi}{4\alpha} (2|f|T - (1 - \alpha)) \right) & \text{si } \frac{1 - \alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1 + \alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RC_\alpha(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos\left(\frac{\alpha \pi t}{T}\right)}{1 - \left(\frac{2\alpha t}{T}\right)^2} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Le coefficient de retombée 'Roll-Off' α est en pratique pris entre 0.22 et 0.35
Il représente le pourcentage d'excès en bande passante supérieure à la bande passante minimale $B_{nyquist} = 1/2T$. **Efficacité spectrale** : $\eta = \frac{D_b}{B}$

- Lorsque $\alpha = 0$, on retrouve $R^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq 1/2T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- Lorsque $\alpha = 1$, alors la bande passante est $= 1/T$ soit le double



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Filtre en Cosinus surélevé

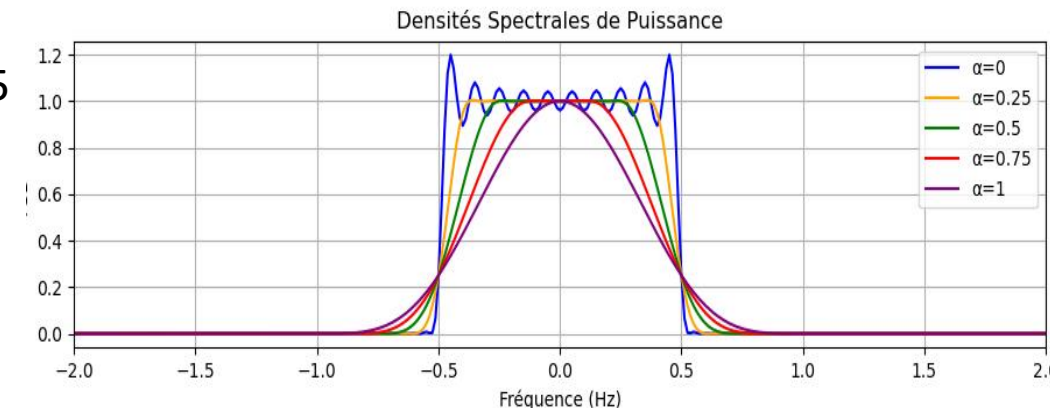
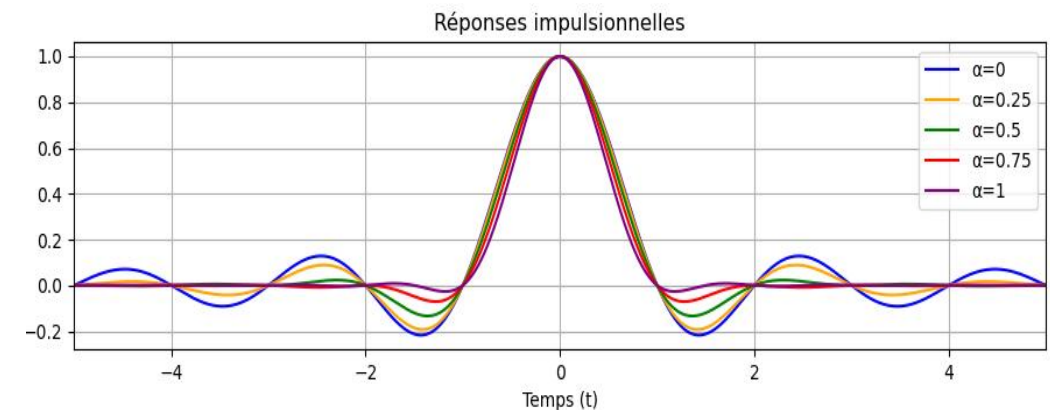
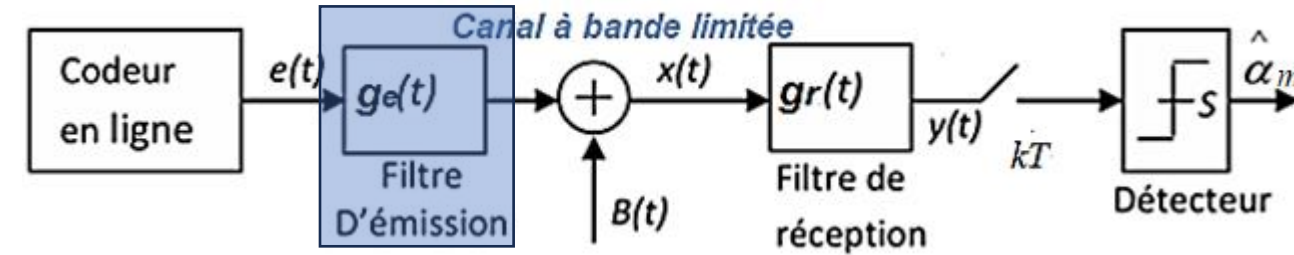
$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$

$$RC_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1 - \alpha}{2T} \\ T \cos^2\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1 - \alpha))\right) & \text{si } \frac{1 - \alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1 + \alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RC_\alpha(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos\left(\frac{\alpha \pi t}{T}\right)}{1 - \left(\frac{2\alpha t}{T}\right)^2} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Le coefficient de retombée 'Roll-Off' α est en pratique pris entre 0.22 et 0.35
Il représente le pourcentage d'excès en bande passante supérieure à la bande passante minimale $B_{nyquist} = 1/2T$. **Efficacité spectrale** : $\eta = \frac{D_b}{B}$

- Lorsque $\alpha = 0 \rightarrow$ problème de synchronisation
- Lorsque $\alpha = 1 \rightarrow$ Gâche de la bande spectrale mais moins sensible au jitter temporel (déviatio aléatoire des instants d'échantillonnage par rapport aux instants optimaux)



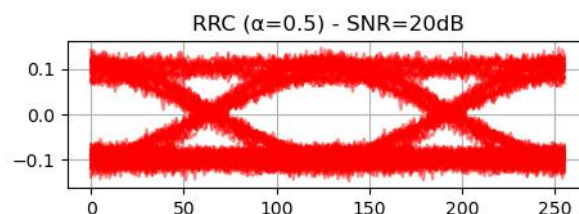
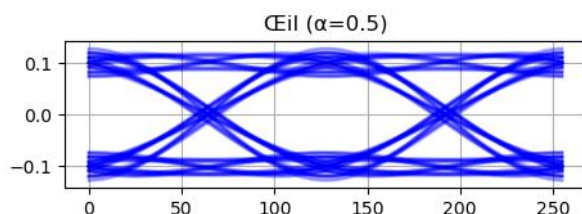
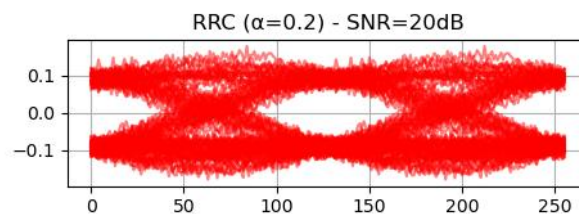
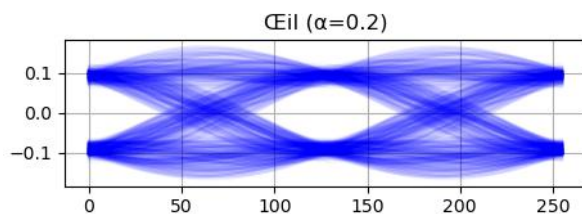
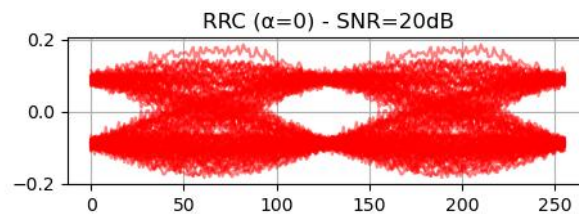
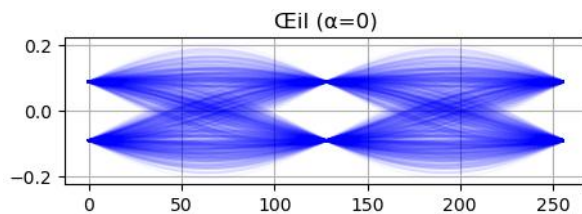
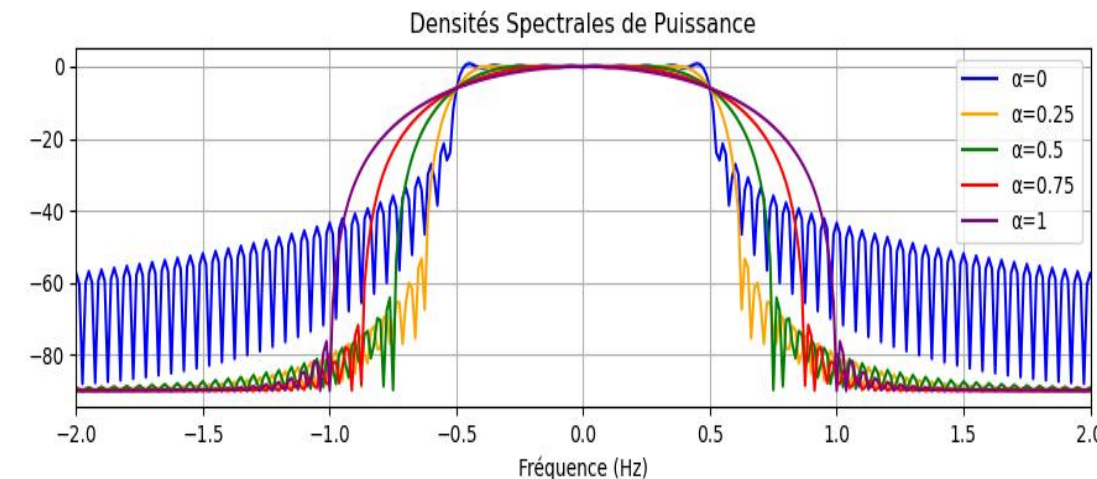
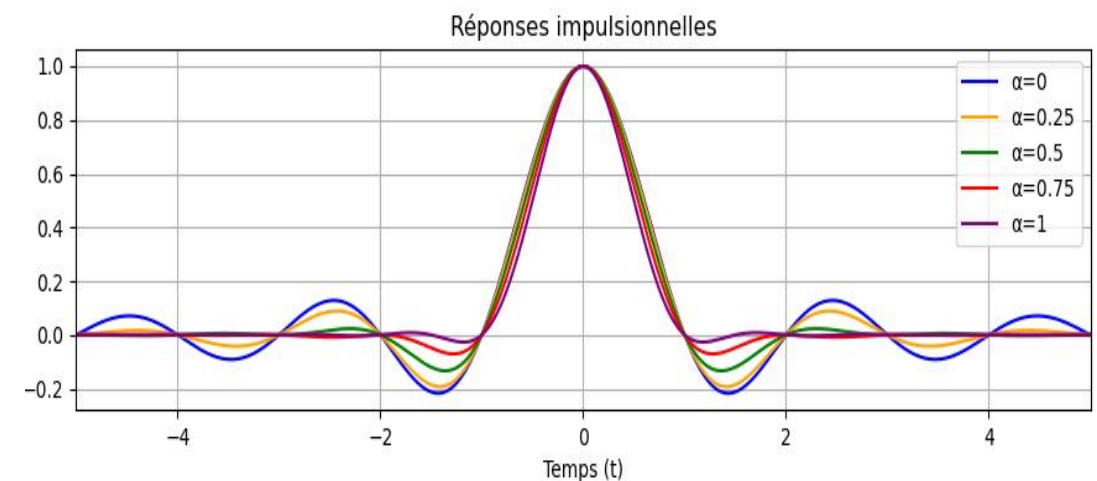
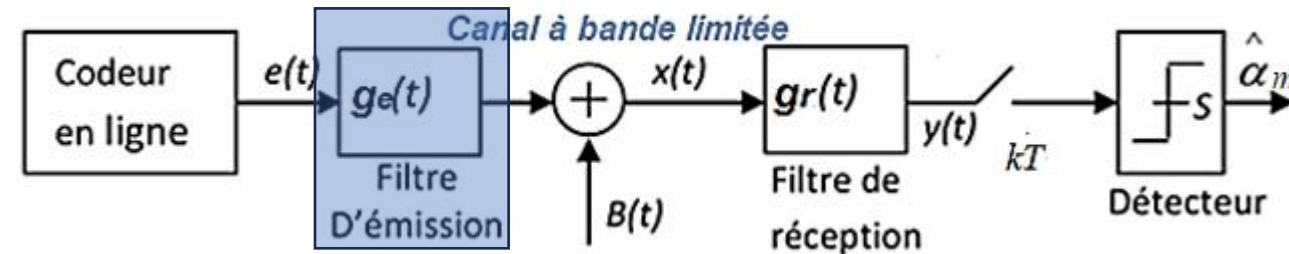
3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Filtre en Cosinus surélevé

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$

$$RC_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1 - \alpha}{2T} \\ T \cos^2 \left(\frac{\pi}{4\alpha} (2|f|T - (1 - \alpha)) \right) & \text{si } \frac{1 - \alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1 + \alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



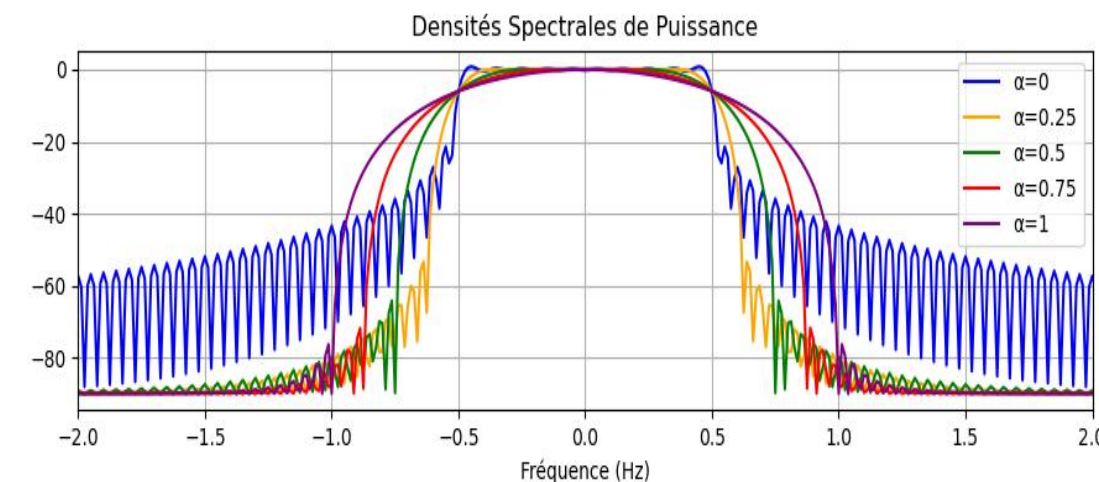
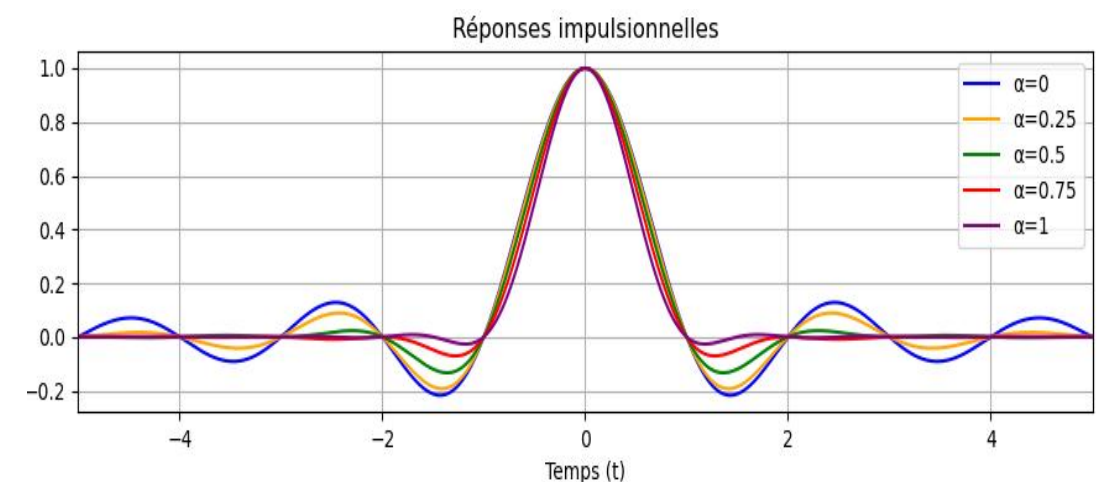
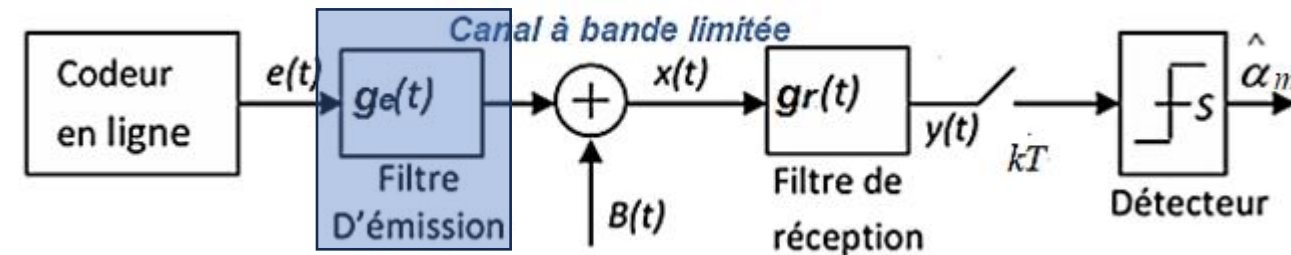
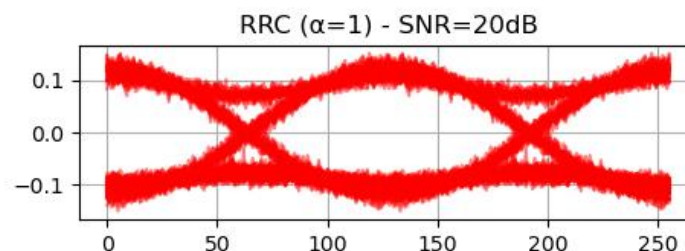
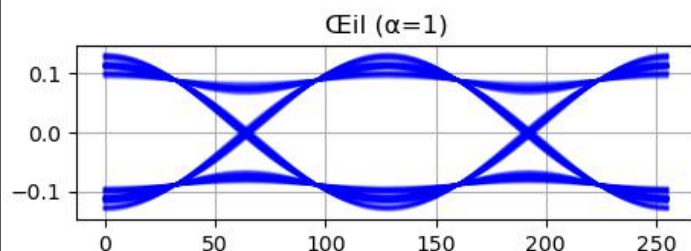
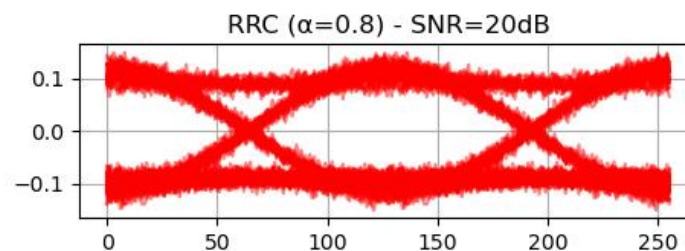
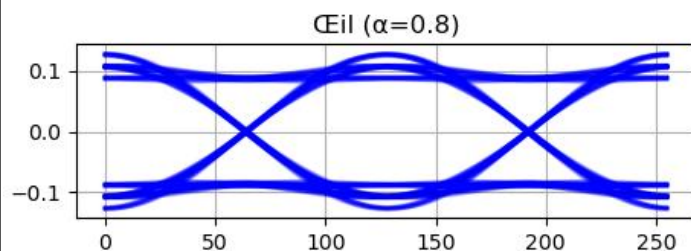
3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Filtre en Cosinus surélevé

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$

$$RC_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1 - \alpha}{2T} \\ T \cos^2 \left(\frac{\pi}{4\alpha} (2|f|T - (1 - \alpha)) \right) & \text{si } \frac{1 - \alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1 + \alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



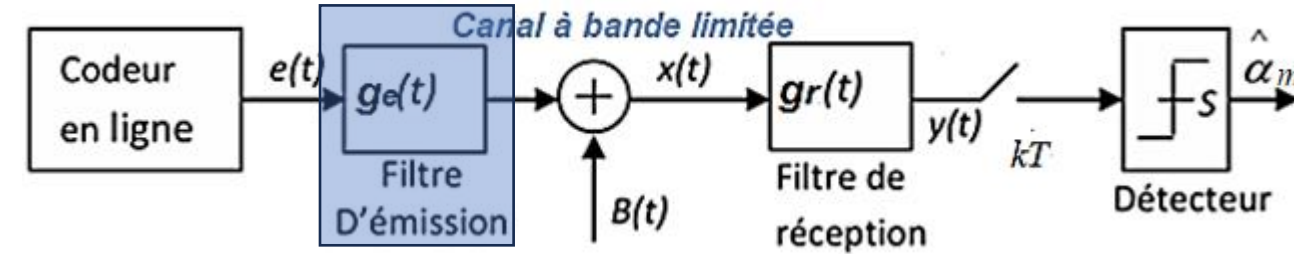
3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

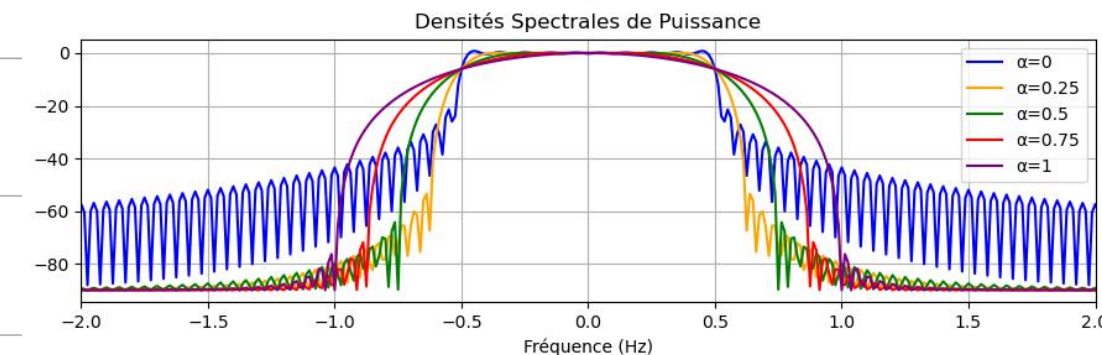
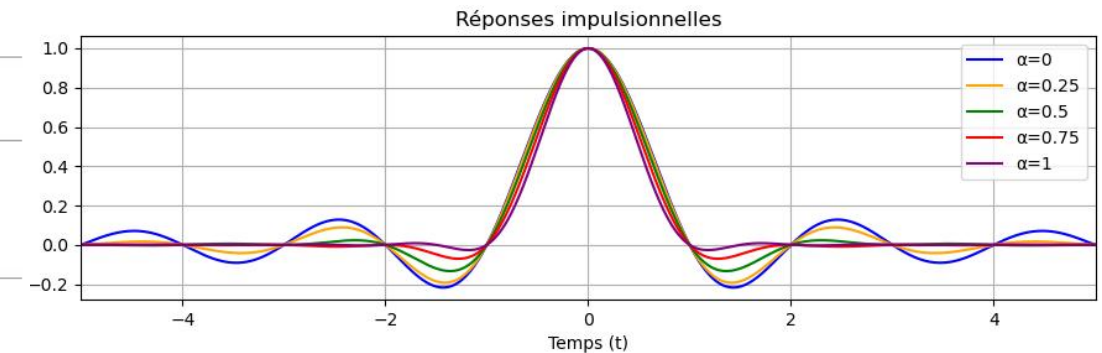
Filtre en Cosinus surélevé

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$

$$RC_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1 - \alpha}{2T} \\ T \cos^2\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1 - \alpha))\right) & \text{si } \frac{1 - \alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1 + \alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Application	Valeur de α	Justification
Télécommunications sans fil (4G/5G, Wi-Fi)	$\alpha = 0.22$	Compromis entre efficacité spectrale et robustesse (ex : LTE utilise $\alpha = 0.22$).
Fibre optique	$\alpha = 0.1 \text{ à } 0.5$	Dépend de la dispersion chromatique et de la longueur de liaison.
Satellite	$\alpha = 0.35 \text{ à } 0.5$	Priorité à la robustesse (environnements bruités, distances longues).
DSL	$\alpha \approx 0.12$	Maximiser l'efficacité spectrale sur des lignes cuivre à bande limitée.

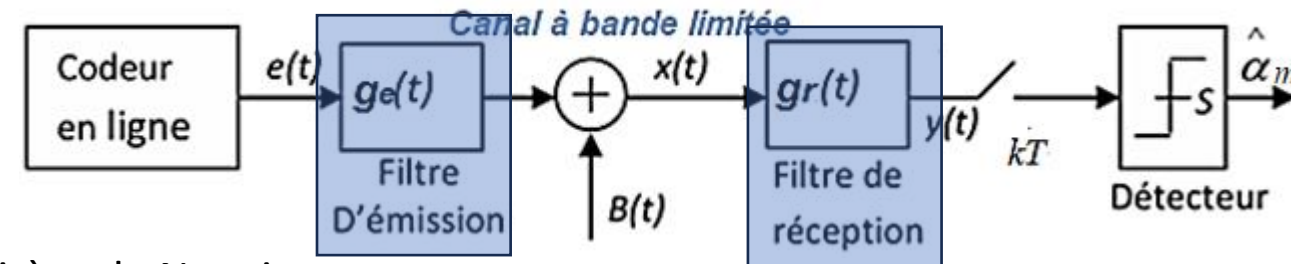


3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Répartition optimale du Filtrage entre émission et réception

$$y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + \sum_{k \neq n} a_k r(t_0 + (n - k)T) + b(t_0 + nT)$$



En l'absence d'IES, la réponse en fréquence $R^{(t_0)}(f)$ vérifie le critère de Nyquist

→ $y(t_0 + nT) = a_n r(t_0) + b(t_0 + nT)$ et $C(f) = 1$ pour $|f| < B$

$$\text{Or } y(t) = g_r(t) * x(t) = g_r(t) * \overbrace{g_e(t) * e(t)}^{r(t)} + \overbrace{g_r(t) * B(t)}^{b(t)} \quad \text{avec} \quad R(f) = R^{(t_0)}(f) r(t_0) e^{-2\pi j f t_0}$$

Rappelons que pour minimiser la probabilité d'erreur P_e , il faut maximiser $SNR_{t_0} = \frac{P_{uis}(r(t_0))}{P_{uis}(b(t_0))}$

$$\rightarrow \text{Filtrage adapté} \rightarrow G_r(f) = \frac{k'}{\sigma_B^2} H_e^*(f) e^{-2\pi j f t_0} = \frac{k'}{\sigma_B^2} \frac{R^*(f)}{G_r^*(f)} e^{-2\pi j f t_0} \rightarrow |G_r(f)|^2 = \frac{k'}{\sigma_B^2} r(t_0) R^{(t_0)}(f)^* = \left| \frac{k'}{\sigma_B^2} R(f) \right|$$

$$\rightarrow G_r(f) = \sqrt{\frac{k'}{\sigma_B^2}} \sqrt{|R(f)|} \quad \text{et} \quad H_e(f) = \sqrt{\frac{\sigma_B^2}{k'}} \sqrt{|R(f)|} \rightarrow G_r(f) = \sqrt{\frac{k'}{\sigma_B^2}} \sqrt{|R(f)|} \quad \text{et} \quad G_e(f) = \sqrt{\frac{\sigma_B^2}{k'}} \sqrt{|R(f)|} \frac{1}{H(f)}$$

$$\rightarrow \text{Utiliser la fonction en cosinus surélevé } RC_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ T \cos^2\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3. Transmission sans interférence entre symboles

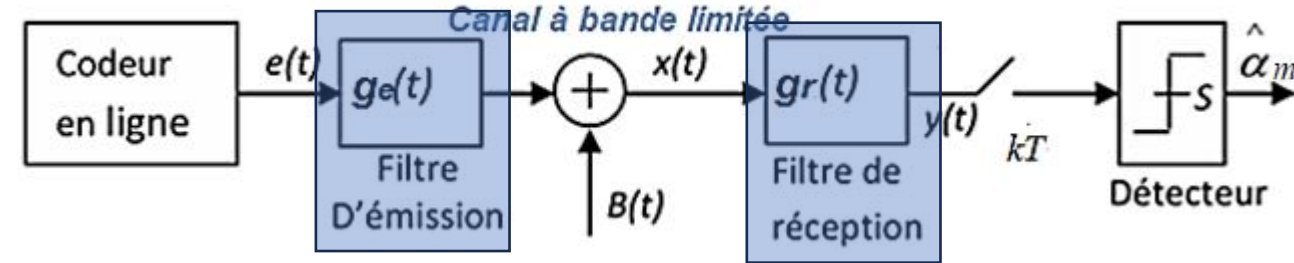
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Répartition optimale du Filtrage entre émission

Filtrage adapté

$$G_r(f) = \sqrt{\frac{k'}{\sigma_B^2}} \sqrt{|R(f)|} \quad \text{et} \quad G_e(f) = \sqrt{\frac{\sigma_B^2}{k'}} \sqrt{|R(f)|} \frac{1}{H(f)}$$

$$\rightarrow \text{Utiliser la fonction en cosinus surélevé} \quad RC_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si} & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ T \cos^2 \left(\frac{\pi}{4\alpha} (2|f|T - (1-\alpha)) \right) & \text{si} & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Ainsi, si le canal de Transmission est un canal BBAG, on scinde ce filtre en 2 filtres $G_e(f)$ et $G_r(f)$. Un optimum est atteint si l'on peut obtenir simultanément un SNR maximum à l'instant de décision (filtre adapté) et une IES nulle (canal de Nyquist)

→ Récepteur optimal.

Les filtres d'émission et de réception sont des **filtres demi-Nyquist, filtre en racine de cosinus surélevé**

$$\rightarrow RRC_\alpha(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{si} & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos \left(\frac{\pi}{4\alpha} (2|f|T - (1-\alpha)) \right) & \text{si} & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RRC_\alpha(t) = \frac{\sin \left(\pi \frac{t}{T} (1-\alpha) \right) + 4\alpha \frac{t}{T} \cos \left(\pi \frac{t}{T} (1+\alpha) \right)}{\pi \frac{t}{T} \left[1 - \left(4\alpha \frac{t}{T} \right)^2 \right]}$$

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Répartition optimale du Filtrage entre émission

Filtrage adapté

$$G_r(f) = \sqrt{\frac{k'}{\sigma_B^2}} \sqrt{|R(f)|} \quad \text{et} \quad G_e(f) = \sqrt{\frac{\sigma_B^2}{k'}} \sqrt{|R(f)|} \frac{1}{H(f)}$$

→ Utiliser la fonction en cosinus surélevé $RC_\alpha(f) = \begin{cases} T & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ T \cos^2\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

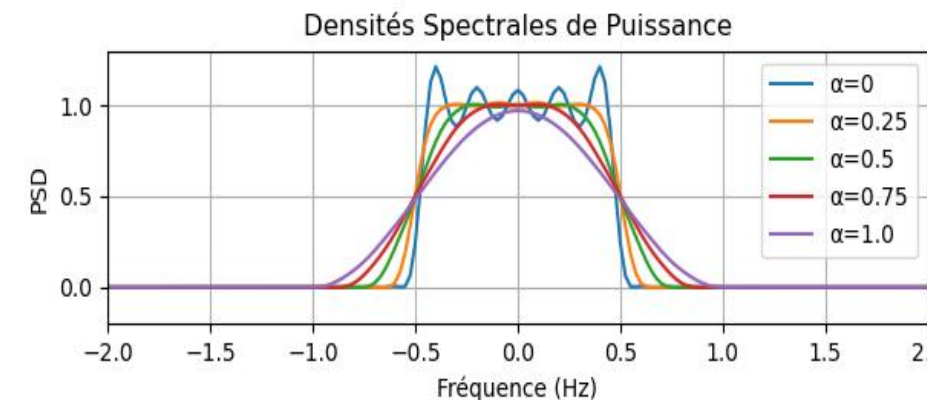
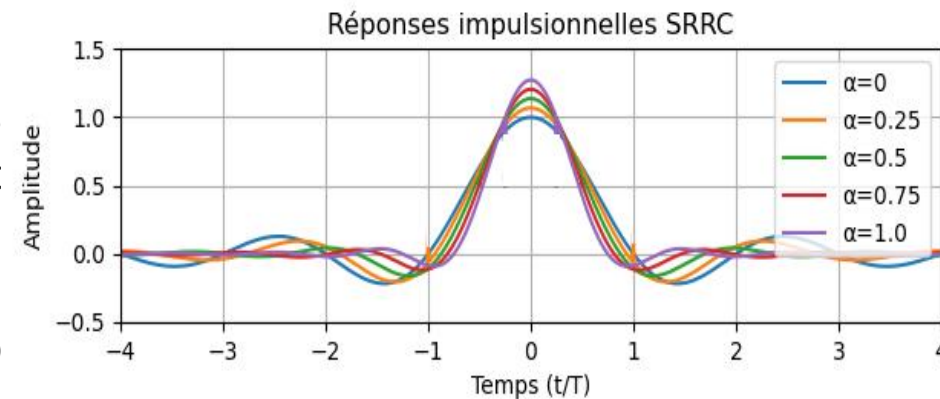
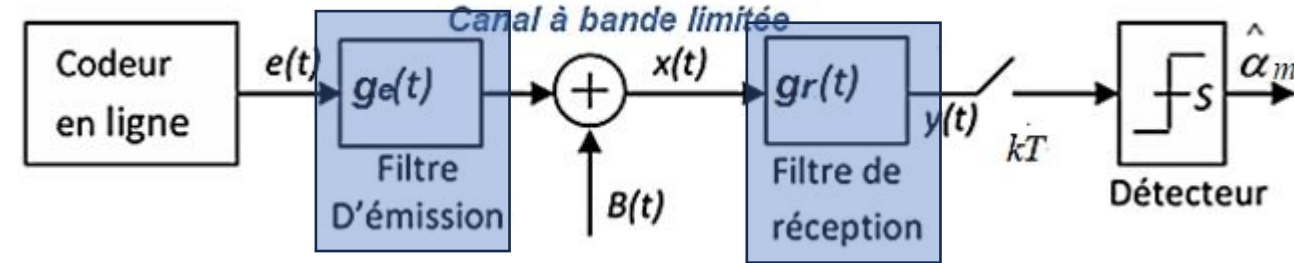
Ainsi, si le canal de Transmission est un **canal BBAG**, on scinde ce filtre en 2 filtres peut obtenir simultanément un SNR maximum à l'instant de décision (filtre adapt

→ Récepteur optimal.

Les filtres d'émission et de réception sont des **filtres demi-Nyquist, filtre en racin**

$$\rightarrow RRC_\alpha(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RRC_\alpha(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}(1+\alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T} \left[1 - \left(4\alpha \frac{t}{T}\right)^2\right]}$$



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Répartition optimale du Filtrage entre émission et réception

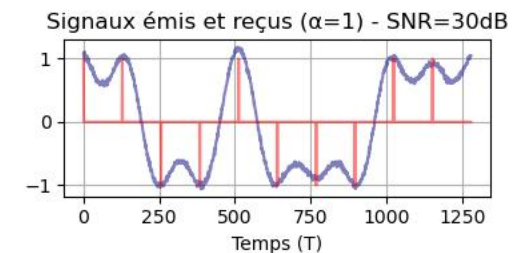
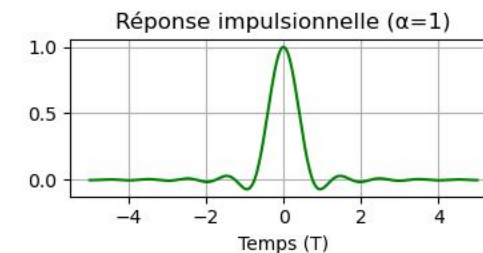
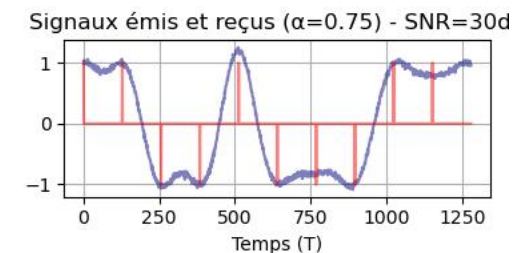
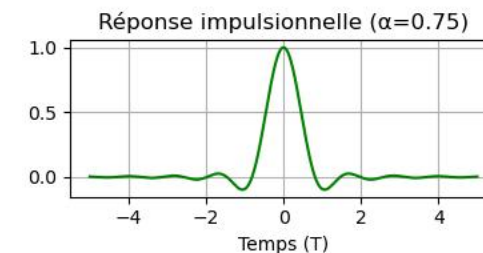
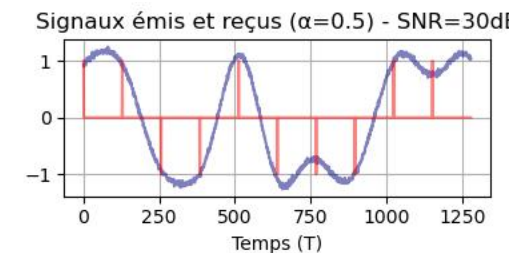
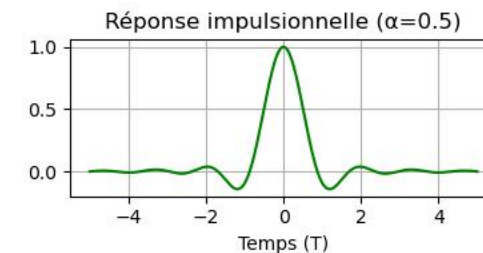
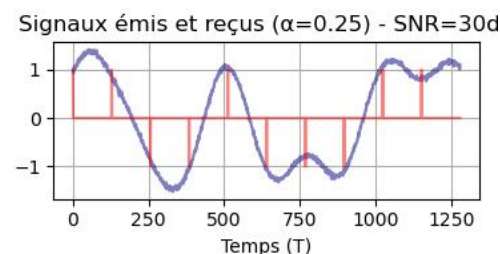
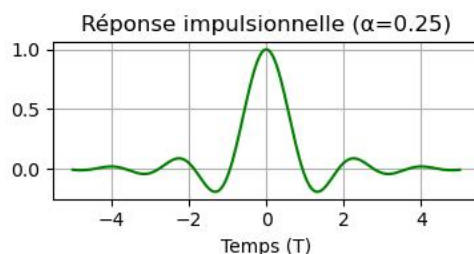
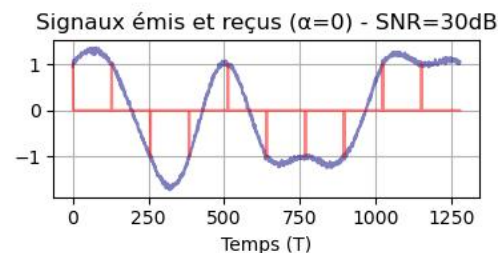
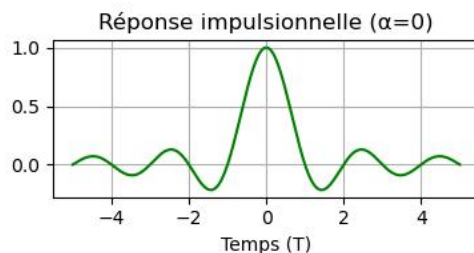
Récepteur optimal.

Les filtres d'émission et de réception sont des **filtres demi-Nyquist, filtre en racine de cosinus surélevé**

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}(1+\alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T} \left[1 - \left(4\alpha \frac{t}{T}\right)^2\right]}$$

Dans le cas où l'on utilise des filtres SRRC à l'émetteur et au récepteur, il n'y a pas d'IES aux instants d'échantillonnage.



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Répartition optimale du Filtrage entre émission et réception

Récepteur optimal.

Les filtres d'émission et de réception sont des **filtres demi-Nyquist, filtre en racine de cosinus surélevé**

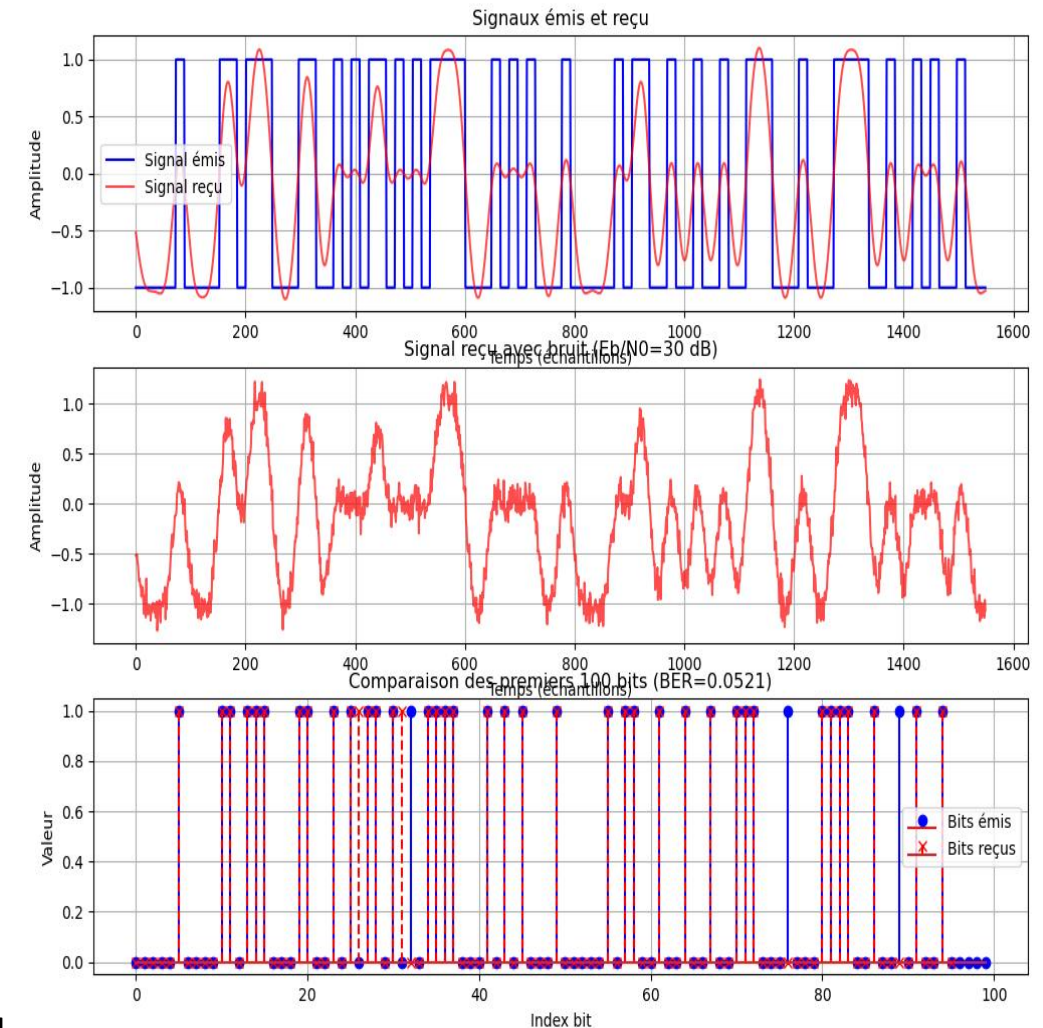
$$\rightarrow RRC_{\alpha}(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}(1+\alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T} \left[1 - \left(4\alpha \frac{t}{T}\right)^2\right]}$$

Dans le cas où l'on utilise des filtres SRRC à l'émetteur et au récepteur, il n'y a pas d'IES aux instants d'échantillonnage *tout en contrôlant la largeur de bande occupée.*

Ainsi, la limitation de la bande de fréquence par le filtre est sans conséquence sur les performances du système de transmission pourvu que la réponse impulsionnelle équivalente de la chaîne satisfasse (aux instants d'échantillonnage) la condition de Nyquist et que ce filtrage soit équiréparti entre l'émetteur et le récepteur.

Remarque la transmission sans IES est impossible si la bande passante B du



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Répartition optimale du Filtrage entre émission et réception

Récepteur optimal.

Les filtres d'émission et de réception sont des **filtres demi-Nyquist, filtre en racine de cosinus surélevé**

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(t) = \frac{\sin\left(\pi\frac{t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha\frac{t}{T}\cos\left(\pi\frac{t}{T}(1+\alpha)\right)}{\pi\frac{t}{T}\left[1 - \left(4\alpha\frac{t}{T}\right)^2\right]}$$

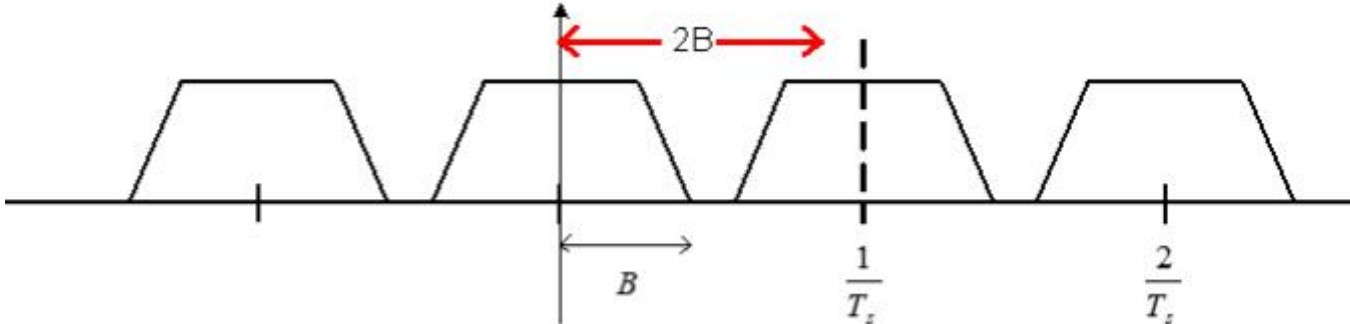
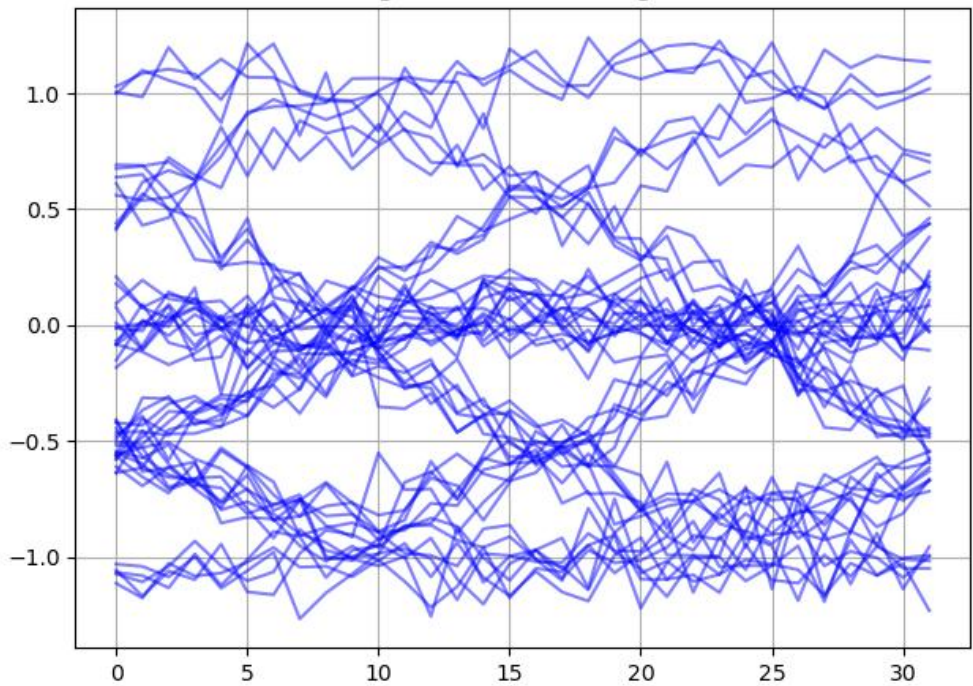
Ainsi, la limitation de la bande de fréquence par le filtre est sans conséquence sur les performances du système de transmission pourvu que la réponse impulsionnelle équivalente de la chaîne satisfasse (aux instants d'échantillonnage) la condition de Nyquist et que ce filtrage soit équiréparti entre l'émetteur et le récepteur.

Remarque la transmission sans IES est impossible si la bande passante B du canal est inférieure à la limite de Nyquist.

$\rightarrow$ Condition de non IES : $D_{max} = \frac{1}{T_s} < 2B$

où B : Bande passante du canal.

Diagramme de l'œil dégradé



3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

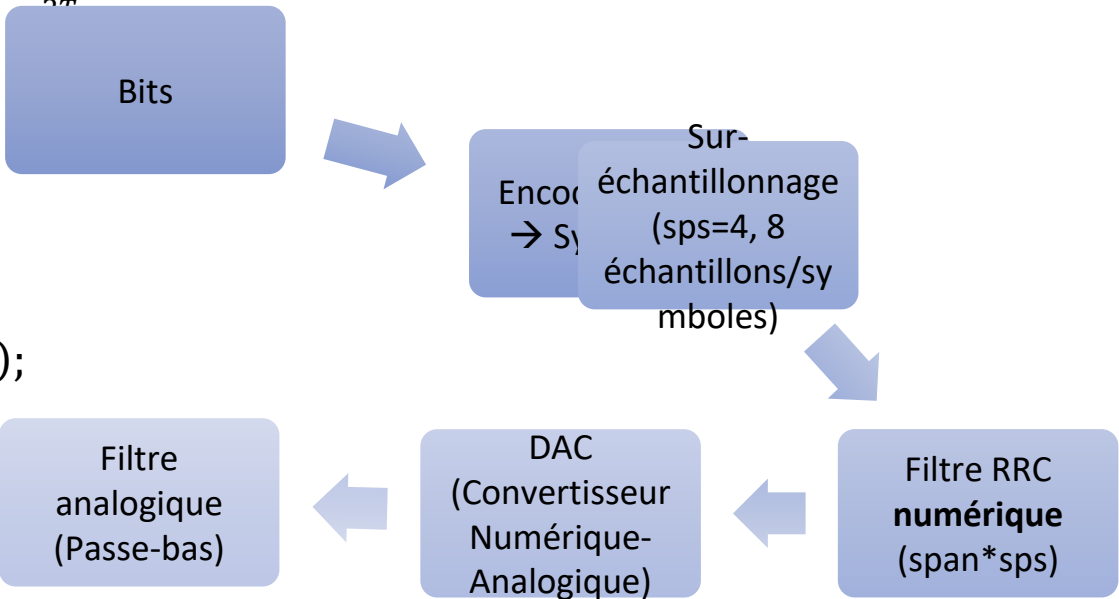
Répartition optimale du Filtrage entre émission et réception

Récepteur optimal.

Les filtres d'émission et de réception sont des **filtres demi-Nyquist, filtre en racine de cosinus surélevé**

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}(1+\alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T} \left[1 - \left(4\alpha \frac{t}{T}\right)^2\right]}$$



Remarques : Sachant que $\overbrace{g_e(t) * e(t)}^{h_e(t)}$ et $e(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$;

Au niveau de l'émetteur, il est alors possible de construire directement le filtre de réponse impulsionnelle $h_e(t)$ à la place de la mise en série des deux filtres $h(t)$ et $g_e(t)$

En pratique, ces filtres sont implémentés en numérique, il suffit donc de construire le filtre de réception $g_r(t)$ à temps discret puis d'en déduire le filtre d'émission $h_e(t)$ en effectuant un retournement temporel.

But du filtre passe-bas : lisser le signal après quantification, supprimer les artefacts haute fréquence, s'adapter au canal.

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Répartition optimale du Filtrage entre émission et réception

Récepteur optimal.

Les filtres d'émission et de réception sont des **filtres demi-Nyquist, filtre en racine de cosinus surélevé**

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}(1+\alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T} \left[1 - \left(4\alpha \frac{t}{T}\right)^2\right]}$$

Rappel : canal sans distorsion

$$C(f) = \begin{cases} C_0 e^{-2\pi j f_0 t} & |f| < B \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Remarques :

si $C(f)$ n'est pas d'amplitude constante ou de phase linéaire --> Il y 'aura des IES

○ Inclure $C(f)$ dans l'expression des filtres de transmission et de réception :

$$y(t) = g_r(t) * x(t) = \overbrace{g_r(t) * g_e(t) * e(t)}^{r(t)} * \overbrace{B(t) * C(t)}^{b(t)}$$

○ Recourir à l'égalisateur de canal (channel equalizer) avec ou sans connaissance de $C(f)$

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

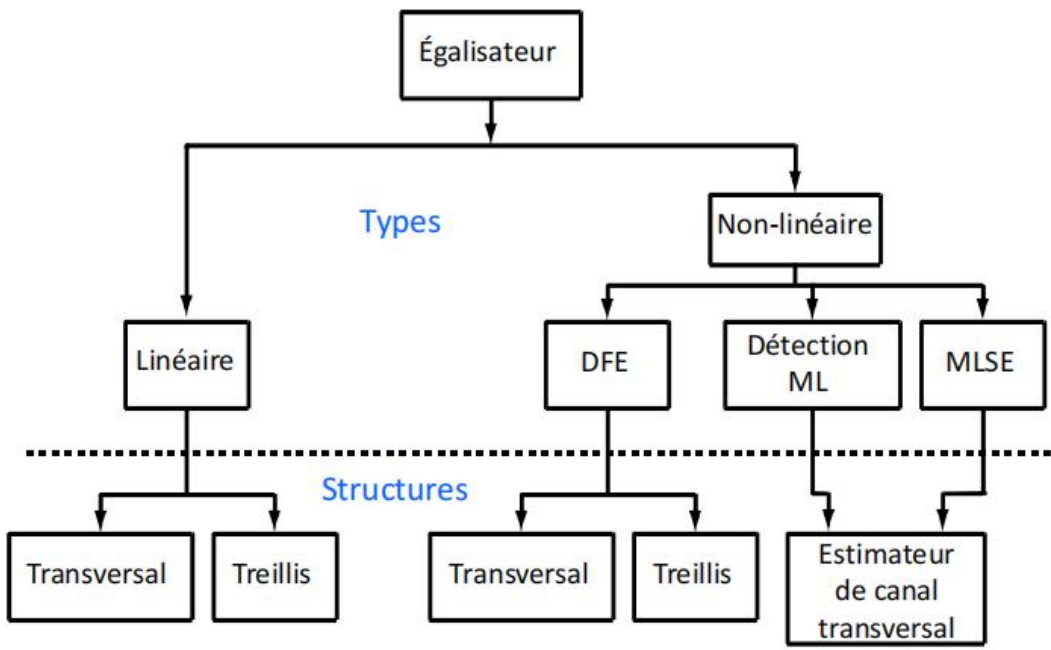
Répartition optimale du Filtrage entre émission et réception

Récepteur optimal.

Les filtres d'émission et de réception sont des **filtres demi-Nyquist, filtre en racine de cosinus surélevé**

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(f) = \begin{cases} \sqrt{T} & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}(2|f|T - (1-\alpha))\right) & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\rightarrow RRC_{\alpha}(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}(1-\alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}(1+\alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T} \left[1 - \left(4\alpha \frac{t}{T}\right)^2\right]}$$



Remarques :

si $C(f)$ n'est pas d'amplitude constante ou de phase linéaire --> Il y 'aura des ISI

- Inclure $C(f)$ dans l'expression des filtres de transmission et de réception :

$$y(t) = g_r(t) * x(t) = \overbrace{g_r(t) * g_e(t) * e(t) * C(t)}^{r(t)} + \overbrace{g_r(t) * B(t) * C(t)}^{b(t)}$$

- Recourir à l'égalisateur de canal (channel equalizer) avec ou sans connaissance de $C(f)$

https://www.labunix.uqam.ca/~boukadoum_m/MIC4240/Notes/Ch9_Band_Limited%20-%2020MB.pdf

3. Transmission sans interférence entre symboles

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Performances du schéma de transmission

Caractéristiques principales des techniques de transmission :

- **Probabilité d'erreur P_e** par bit transmis permet d'évaluer la qualité d'un système de transmission. Elle est fonction de la technique de transmission utilisée, mais aussi du canal sur lequel le signal est transmis.
- **Occupation spectrale** du signal émis doit être connue pour utiliser efficacement la bande passante du canal de transmission. On est contraint d'utiliser de plus en plus des **modulations à grande efficacité spectrale**. L'efficacité spectrale D_b/B (bits/s/Hz) est la quantité de l'information utile transmise dans le système de communication ayant la bande passante B .
- **Puissance** du signal émis (remplacé par le SNR)
- **Complexité du récepteur** dont la fonction est de restituer le signal émis.

La plupart des systèmes actuels accordent la priorité à l'efficacité en bande passante, même si les critères de puissance et de coût suivent de près.

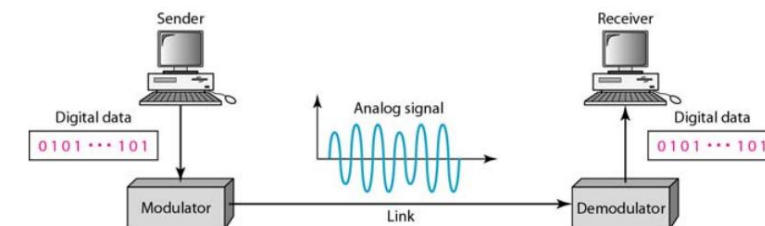
4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Limites des Transmissions en bande de base

Cas d'usage typiques : Réseaux locaux (Ethernet, USB), Mémoires (DDR, GDDR), Capteurs courte portée.

- Impossible de diviser le canal en sous-canaux pour transmettre plusieurs communications à la fois (multiplexage fréquentiel)
- Inadapté pour : les communications sans fil, Transmission longue distance (> 10 km)
- Nécessité de pouvoir créer des signaux dans une bande de fréquence donnée dont les caractéristiques dépendent du canal utilisé pour transmettre ces données.



Bande de base

- **Codage de ligne** (ex. NRZ, Manchester, PAM-4) pour adapter le signal au support.
- **Filtrage de Nyquist** (ex. cosinus surélevé) pour limiter l'interférence inter-symbole (ISI).
- **Égalisation** pour compenser la distorsion du canal.

Avantages : Simplicité et faible coût (pas de modulateur/démodulateur), Faible latence (pas de traitement de modulation), Idéal pour les courtes distances (ex. data centers, câblage interne).

Inconvénients : Sensibilité aux interférences basse fréquence (ex. bruit thermique, diaphonie), Limité par l'atténuation du support (ex. perte en câble cuivre), Impossible de partager le canal (sans TDM)

Sur porteuse

- **Modulations numériques** : QPSK, QAM, OFDM, FSK.
- **Correction d'erreur** (LDPC, Turbo codes) pour compenser le bruit.
- **Techniques d'étalement de spectre** (DSSS, FHSS) pour résister aux interférences.

Avantages : Adaptée aux longues distances (atténuation compensée par amplification), Résistance aux interférences basse fréquence (spectre décalé), Permet le multiplexage fréquentiel (FDM, OFDM) pour partager le canal, Compatible avec les canaux sans fil (nécessite une porteuse pour rayonnement).

Inconvénients : Coût et complexité accrus (modulation, synchronisation, filtrage), Sensibilité aux défauts de synchronisation (déphaseurs, Doppler), Consommation énergétique plus élevée (amplification RF).

4. Modulation numérique à bande étroite

Transmissions en bande de base versus Transmissions sur porteuse

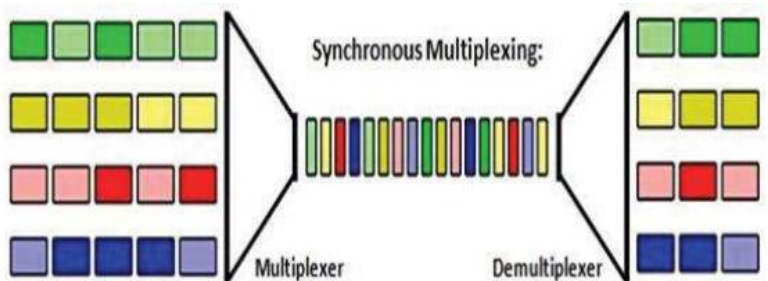
Critères	Bande de base	Sur porteuse
Plage de fréquences	Basse fréquence (0 Hz à BB Hz)	Haute fréquence (autour de f_c)
Bande passante	Limité par le support (ex. câble cuivre)	Flexible (dépend de la modulation)
Distance de transmission	Courtes distances (ex. 100 m pour Ethernet)	Longues distances (km pour la radio/satellite)
Résistance au bruit	Sensible aux atténuations/bruit basse fréquence	Meilleure résistance grâce à la modulation (ex. QAM, OFDM)
Complexité	Simple (pas de modulation/démodulation)	Complexe (nécessite oscillateurs, filtres, synchronisation de porteuse)
Multiplexage	TDM (Multiplexage temporel)	FDM/OFDM (Multiplexage fréquentiel)
Applications	Réseaux locaux (LAN), interconnexions	Télécommunications sans fil, diffusion, liaisons longues distances

TDM : Time Division Multiplexing

N signaux à transmettre à bas débit, et un canal à haut débit

- Diviser les N signaux en trames et on les entrelace.
- Transmettre le nouveau signal sur le canal à haut débit

Si plusieurs utilisateurs → TDMA : Time Division Multiple Access



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation numérique

La modulation a pour rôle **d'adapter le spectre du signal au canal** (milieu physique) sur lequel il sera émis.

Le **modulateur** est l'interface qui associe l'information numérique à des signaux analogiques adaptés aux caractéristiques du canal.

La **modulation numérique d'une porteuse** consiste à faire varier l'amplitude, la fréquence ou la phase d'une onde sinusoïdale (**porteuse**) en fonction des éléments binaires à transmettre.

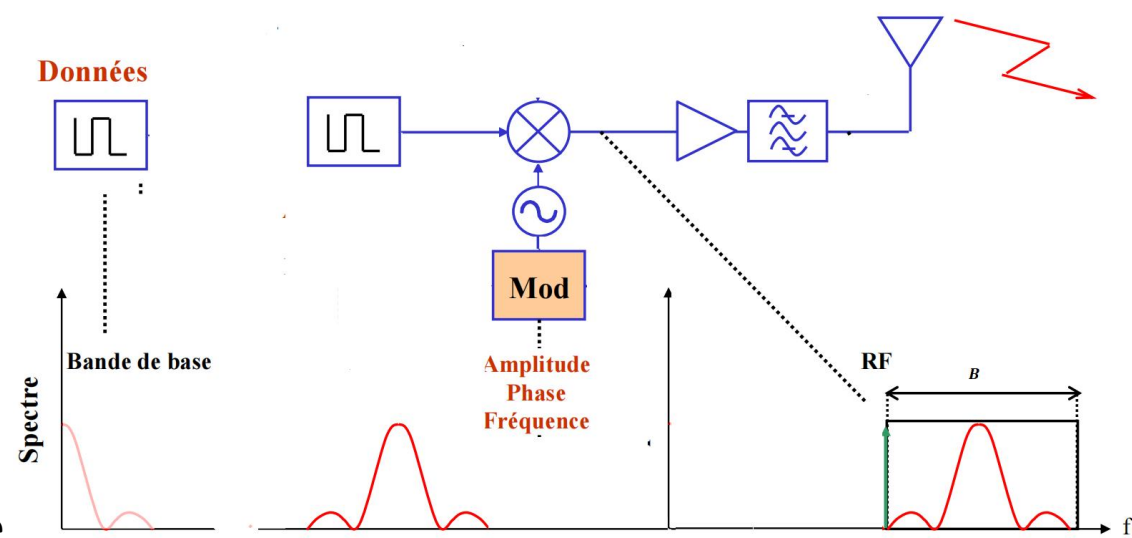
L'utilisation d'une bande transposée induit la mise en œuvre d'une modulation qui permet de créer un signal à bande étroite B centrée sur f_p ($B \ll f_p$)

La bande de fréquence disponible sur le canal pourra être partagée :

- pour plusieurs transmissions (**multiplexage direct**);
- en différents canaux utilisés par une même transmission (**multiplexage inverse**).

Symbole numéro $i \rightarrow s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$

Le spectre que l'on transpose à la fréquence f_p est celui d'une fréquence intermédiaire (f_i) ayant subi une modulation numérique.



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation numérique

La modulation a pour rôle **d'adapter le spectre du signal au canal** (milieu physique) sur lequel il sera émis.

Le **modulateur** est l'interface qui associe l'information numérique à des signaux analogiques adaptés aux caractéristiques du canal.

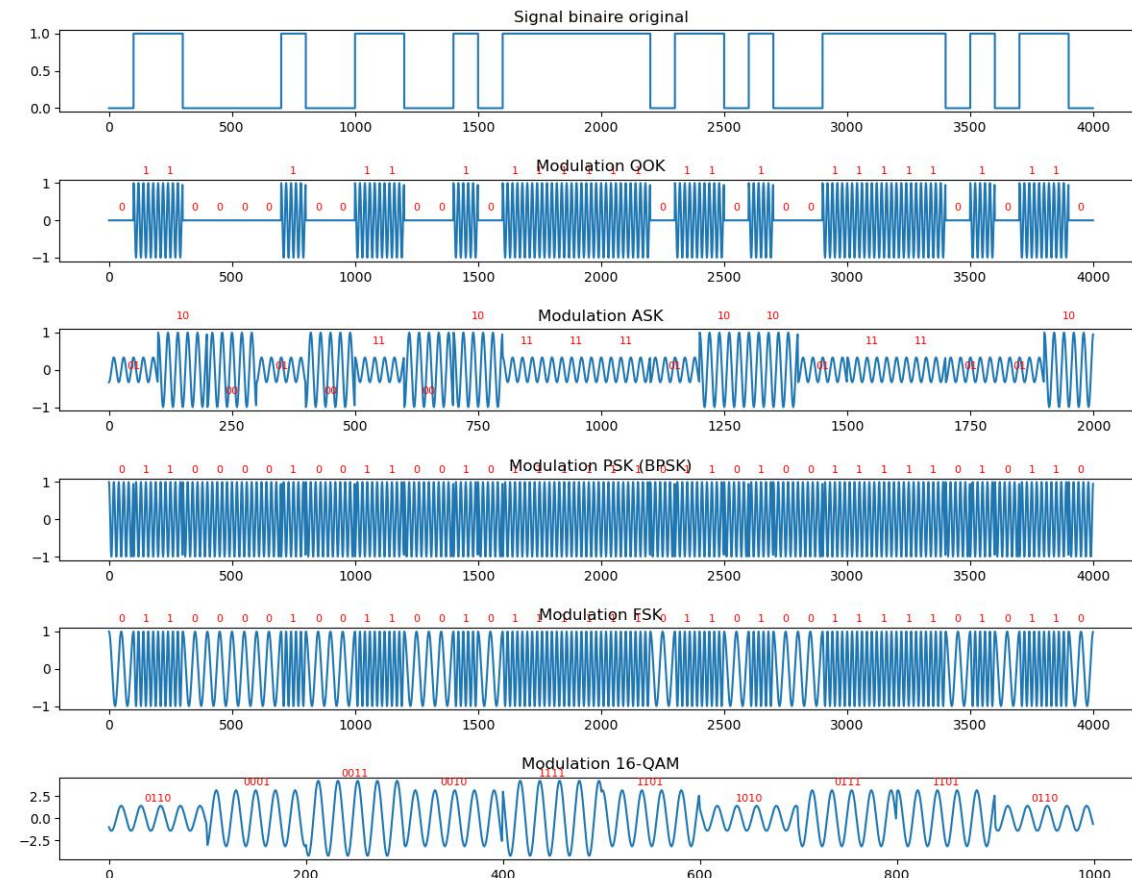
La **modulation numérique d'une porteuse** consiste à faire varier l'amplitude, la fréquence ou la phase d'une onde sinusoïdale (**porteuse**) en fonction des éléments binaires à transmettre.

Symbole numéro $i \rightarrow s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$

Les types de modulation numérique à porteuse unique :

- Modulation par Déplacement d'Amplitude MDA (Amplitude Shift Keying ASK) ;
- Modulation par Déplacement de Phase MDP (Phase Shift Keying PSK);
- Modulation par Déplacement de Fréquence MDF (Frequency Shift Keying FSK) ;
- Modulation d'Amplitude de deux porteuses en Quadrature MAQ (Quadrature Amplitude Modulation QAM)

Les éléments binaires peuvent être regroupés en n-uplets au nombre de M ($M=2^n$) et la grandeur modulée pourra présenter M états $\neq$.



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation numérique

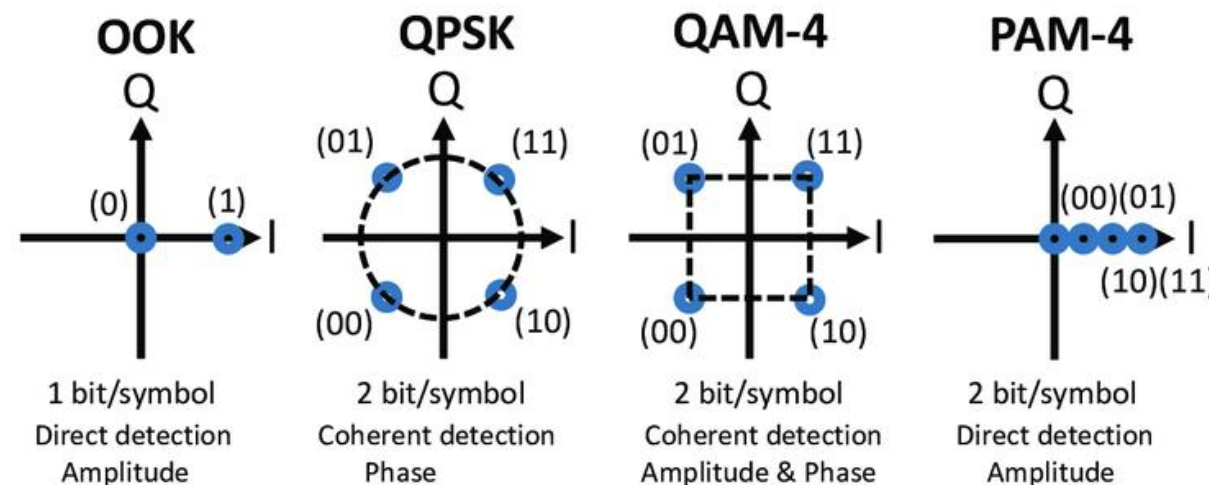
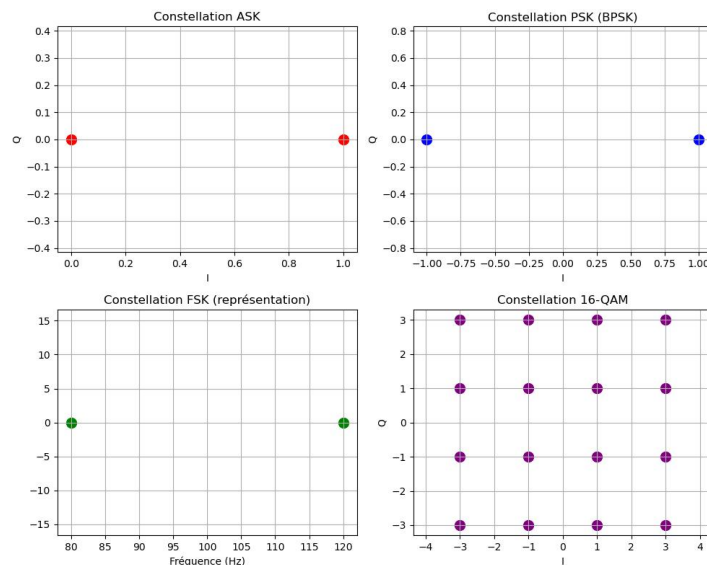
La modulation a pour rôle **d'adapter le spectre du signal au canal** (milieu physique) sur lequel il sera émis.

Le **modulateur** est l'interface qui associe l'information numérique à des signaux analogiques adaptés aux caractéristiques du canal.

La **modulation numérique d'une porteuse** consiste à faire varier l'amplitude, la fréquence ou la phase d'une onde sinusoïdale (**porteuse**) en fonction des éléments binaires à transmettre.

Choix du format de modulation dépend de :

- Spectre correspondant et efficacité spectrale (bit/s)/Hz
- Le BER pour un même SNR
- Circuits de modulation et de démodulation



https://www.researchgate.net/figure/Example-of-IQ-constellation-diagrams-for-different-digital-modulation-protocols-The-I_fig17_344188319

Modulation par déplacement d'amplitude MDA / ASK (Amplitude Shift Keying)

Pour chaque symbole a_k , on émet le signal $a_k h_e(t - kT) \cos(2\pi f_p t)$ pendant la durée $t \in [kT, (k + 1)T[$

$$m(t) = A\sqrt{2}\cos(2\pi f_p t) \overbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}^{e(t)} \rightarrow M(f) = \frac{A}{\sqrt{2}} [E(f - f_p) + E(f + f_p)]$$

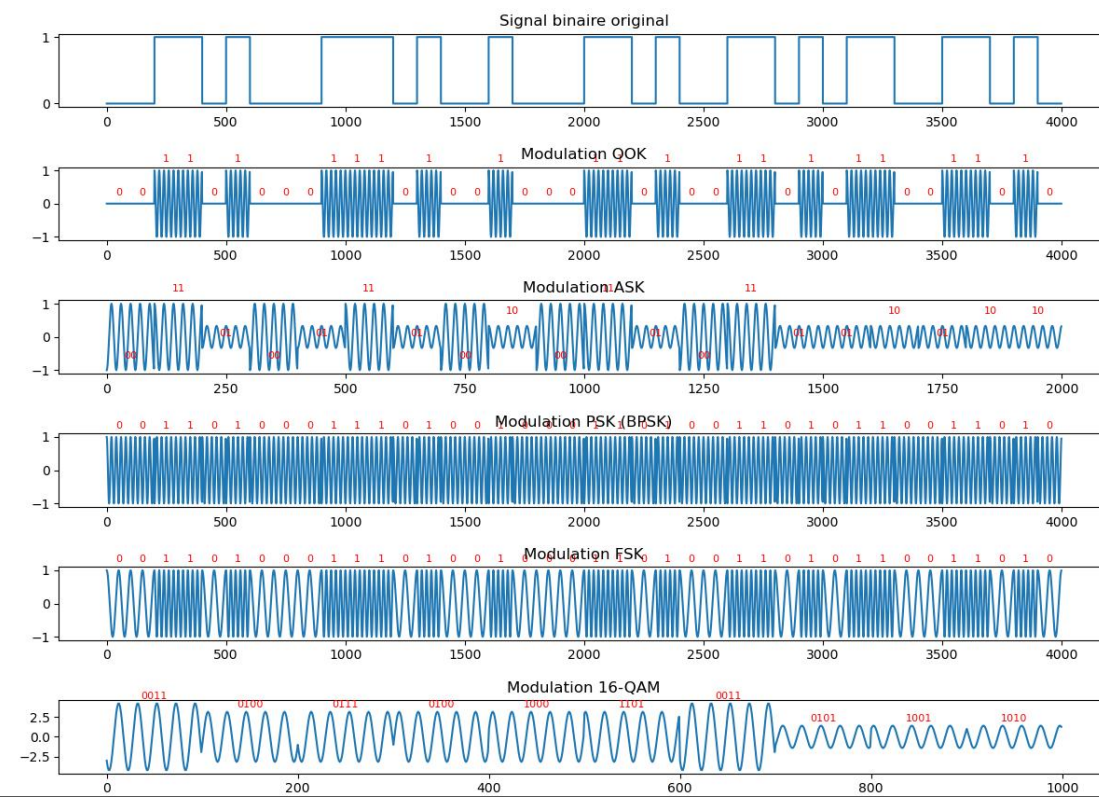
Où $h_e(t)$ est un filtre répondant aux conditions de Nyquist. Le facteur $\sqrt{2}$ est souvent introduit pour normalisation (même puissance).

Caractéristiques

- Simple, efficace en consommation d'énergie
- Bruit de transition à large spectre, susceptible au bruit
- Usage commun: anciens systèmes sans fils

Rappel :

$$\text{DSP NRZ} \rightarrow S_e(f) = \frac{V^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) + \frac{V^2}{4} \delta(f)$$



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

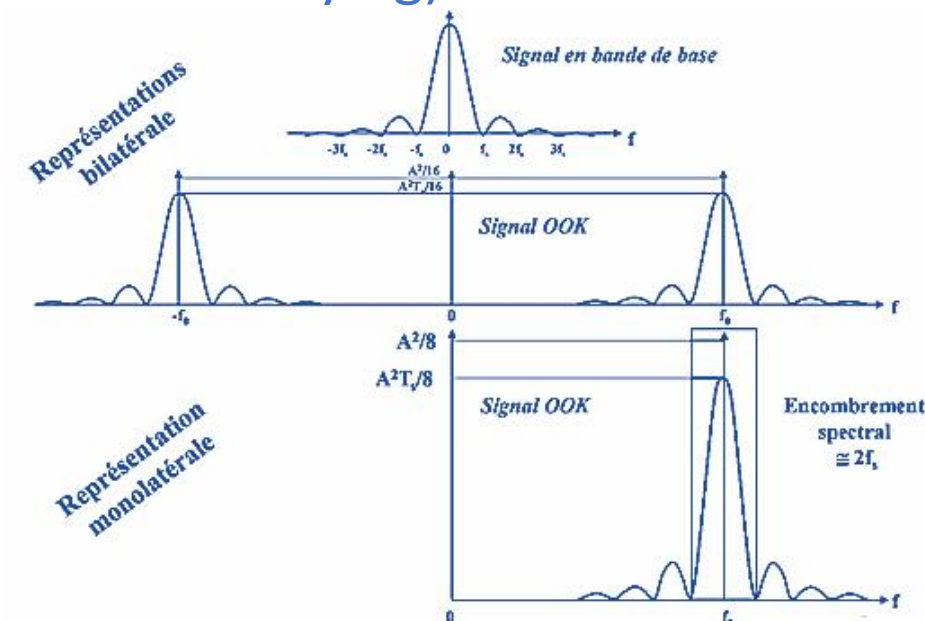
Modulation par déplacement d'amplitude MDA / ASK (Amplitude Shift Keying)

Pour chaque symbole a_k , on émet le signal $a_k h_e(t - kT) \cos(2\pi f_p t)$ pendant la durée $t \in [kT, (k + 1)T[$

$$m(t) = A\sqrt{2}\cos(2\pi f_p t) \overbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}^{e(t)} \rightarrow M(f) = \frac{A}{\sqrt{2}} [E(f - f_p) + E(f + f_p)]$$

Le signal modulé ASK occupe en théorie une bande infinie $\rightarrow$ Limiter la bande du signal numérique par un filtre passe-bas simple ou de Nyquist $\rightarrow$ Encombrement spectral minimal égal au débit numérique du signal modulant.

Si on veut éviter l'utilisation d'un filtre de Nyquist, il faudra prévoir pour le système une bande passante au moins égale au double du débit numérique.



<https://www.exoco-lmd.com/dlattach/?attach=8447>

- Simplicité de circuits (comparée aux autres modulations numériques) et donc faible coût $\rightarrow$ utilisée dans les systèmes de transmission grand public courtes distances. Deux bandes de fréquences porteuses à 224 MHz et 433 MHz sont normalisées pour ce type d'applications.
- L'ASK est utilisée en télécommunications par fibre optique car les détecteurs optiques ne sont sensibles qu'aux variations d'intensité du signal (insensibles à la fréquence et à la phase). Dans ces systèmes les fréquences porteuses sont de l'ordre de 193 THz (fréquences optiques infrarouges) et les débits peuvent atteindre 40 Gbit/s.
- Moins performante que les autres modulations numériques en termes d'efficacité spectrale (bit/s/Hz) et de BER pour un même SNR.

4. Modulation numérique à bande étroite

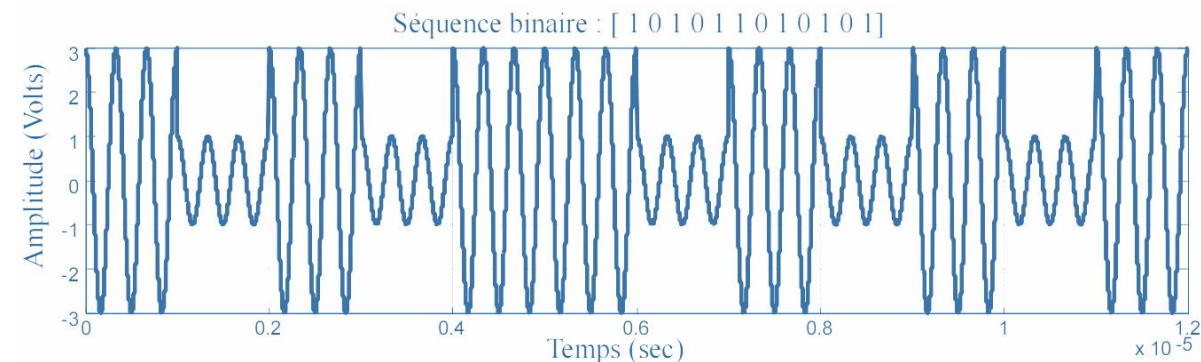
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA à M états MDA-M ou M-ASK

La MDA-M est une modulation d'amplitude M-aire. Elle emploie un ensemble de $M=2^n$ signaux élémentaires pour représenter les symboles distincts :

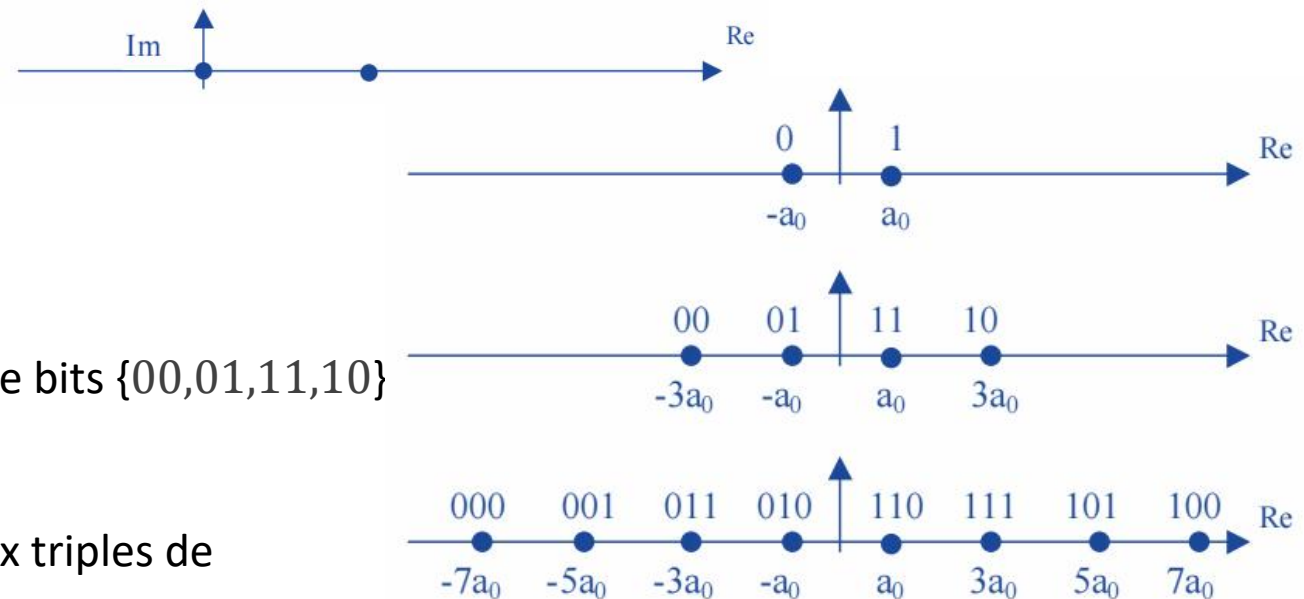
$a_k = (2k - M - 1)$ pour : $k = 1, 2, 3, \dots, M$.

$$m(t) = A\sqrt{2} \sum_k a_k \cos(2\pi f_p t) h_e(t - kT)$$



Modulation OOF (On-off Keying)

$a_k = \{1, 0\}$ correspondant respectivement aux bits 1 et 0



Modulation MDA-2 (2-ASK)

$a_k = \{-1, 1\}$ correspondant respectivement aux bits 0 et 1

Modulation MDA-4 (4-ASK)

$a_k = \{-3, -1, 1, 3\}$ correspondant respectivement aux couples de bits {00, 01, 11, 10}

Modulation MDA-8 (8-ASK)

$a_k = \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$ correspondant respectivement aux triples de bits {000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100}

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA à M états MDA-M ou M-ASK

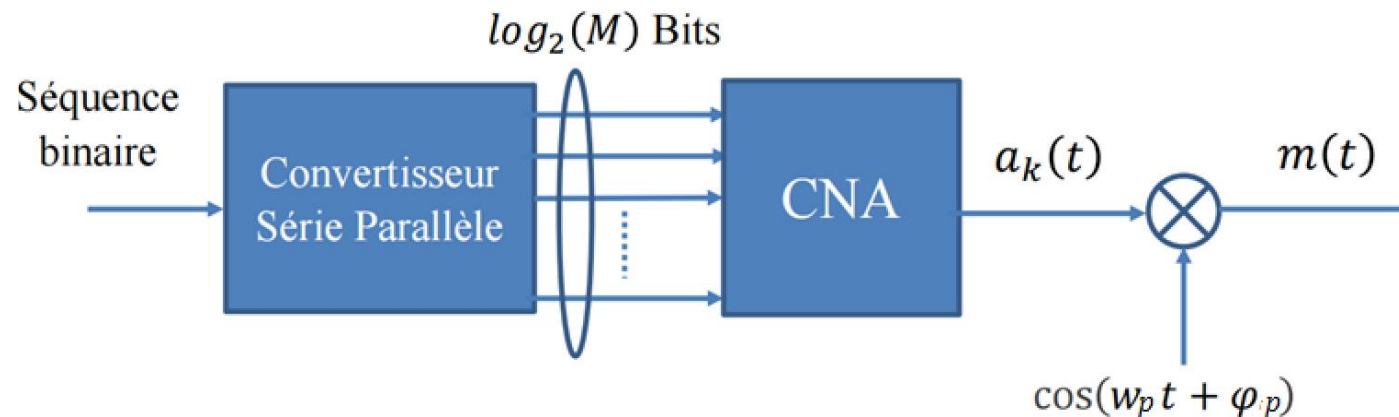
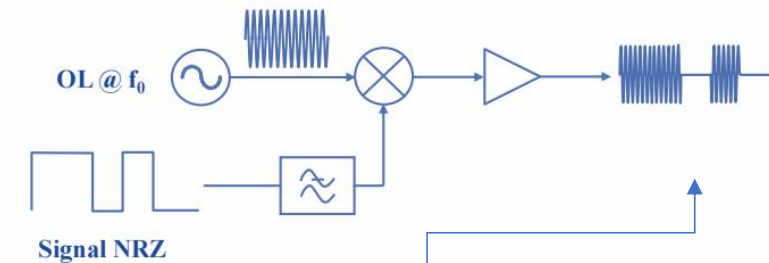
La M-ASK est une modulation d'amplitude M-aire. Elle emploie un ensemble de $M = 2^n$ signaux élémentaires pour représenter les symboles distincts :

$$a_k = (2k - M - 1) \text{ pour : } k = 1, 2, 3, \dots, M.$$

$$m(t) = A\sqrt{2} \sum_k a_k \cos(2\pi f_p t) h_e(t - kT)$$

Modulateur M-ASK

- Les données binaires (bits) sont transmises à un rythme égal à $1/T_b$, vers un Convertisseur Série Parallèle (CSP).
- La sortie du CSP forme des mots de n bits chacun avec un rythme $1/T_s = 1/n T_b$.
- Chaque mot passe par un Convertisseur Numérique Analogique (CNA) pour le transformer à un signal rectangulaire pondéré par un symbole réel (Signal mis en forme)
- Modulation d'une porteuse sinusoïdale par le signal mis en forme.
- Le canal de transmission ayant une bande B limitée, un filtrage est nécessaire après la modulation.



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA à M états MDA-M ou M-ASK

La M-ASK est une modulation d'amplitude M-aire. Elle emploie un ensemble de $M = 2^n$ signaux élémentaires pour représenter les symboles distincts :

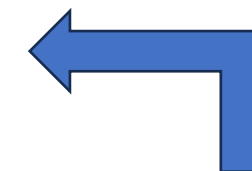
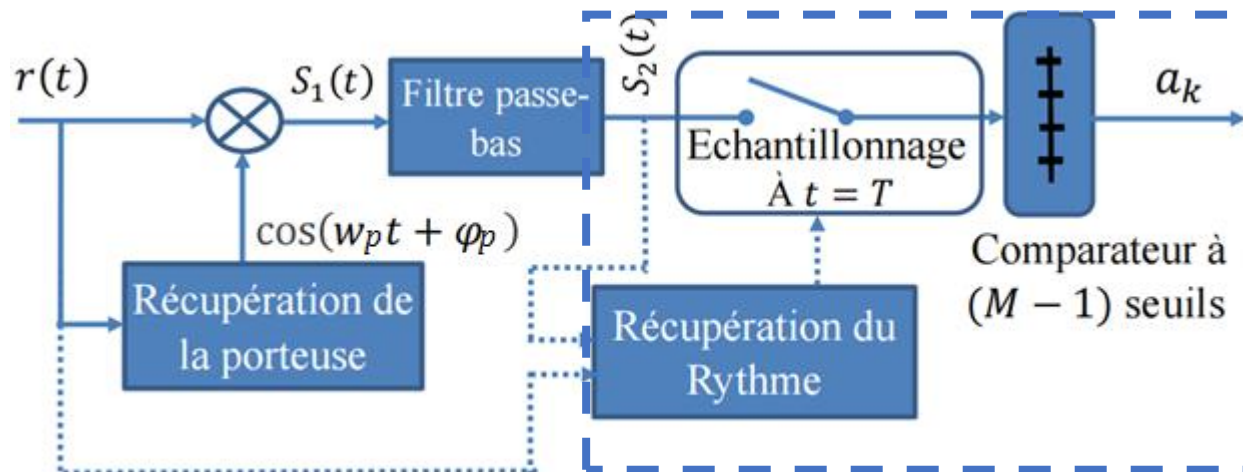
$$a_k = (2k - M - 1) \text{ pour : } k = 1, 2, 3, \dots, M.$$

$$m(t) = A\sqrt{2} \sum_k a_k \cos(2\pi f_0 t) h_e(t - kT)$$

Démodulateur M-ASK

En l'absence du bruit :

- le signal reçu $r(t)$ est multiplié par une onde porteuse issue d'un oscillateur local (synchronisé en fréquence et en phase sur l'oscillateur de l'émission) $\rightarrow s_1(t)$
- Le signal résultant subi un filtrage passe-bas entraînant l'élimination de la porteuse $\rightarrow s_2(t)$
- Le récepteur récupère l'horloge (T) et échantillonne le signal $s_2(t)$ et décider à l'aide d'un comparateur à $(M - 1)$ seuils de la valeur a_k reçu.



Traitement identique qu'en bande de base.

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA à M états MDA-M ou M-ASK

La M-ASK est une modulation d'amplitude M-aire. Elle emploie un ensemble de $M = 2^n$ signaux élémentaires pour représenter les symboles distincts :

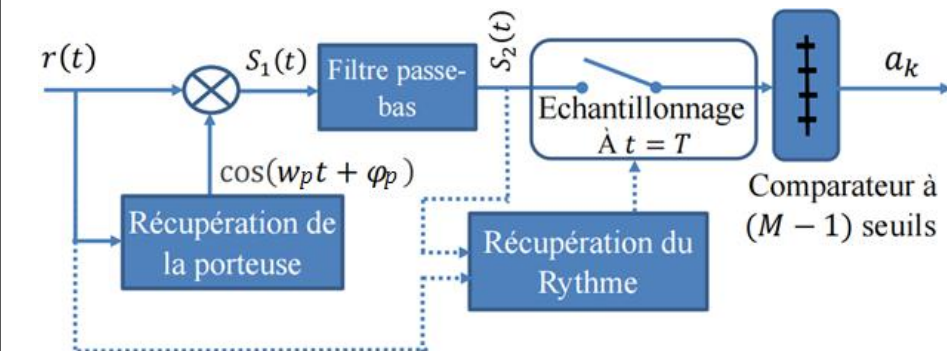
$$a_k = (2k - M - 1) \text{ pour : } k = 1, 2, 3, \dots, M.$$

$$m(t) = A\sqrt{2} \sum_k a_k \cos(2\pi f_0 t) h_e(t - kT)$$

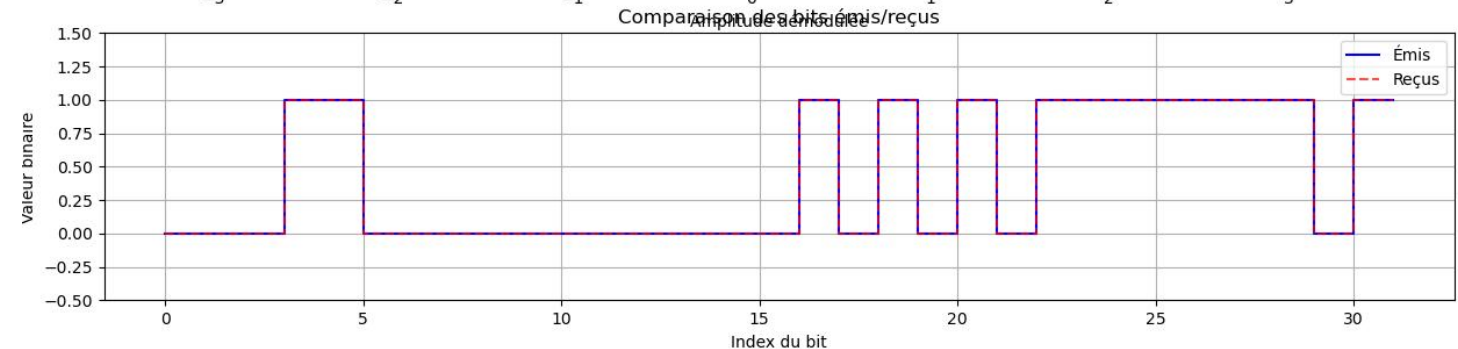
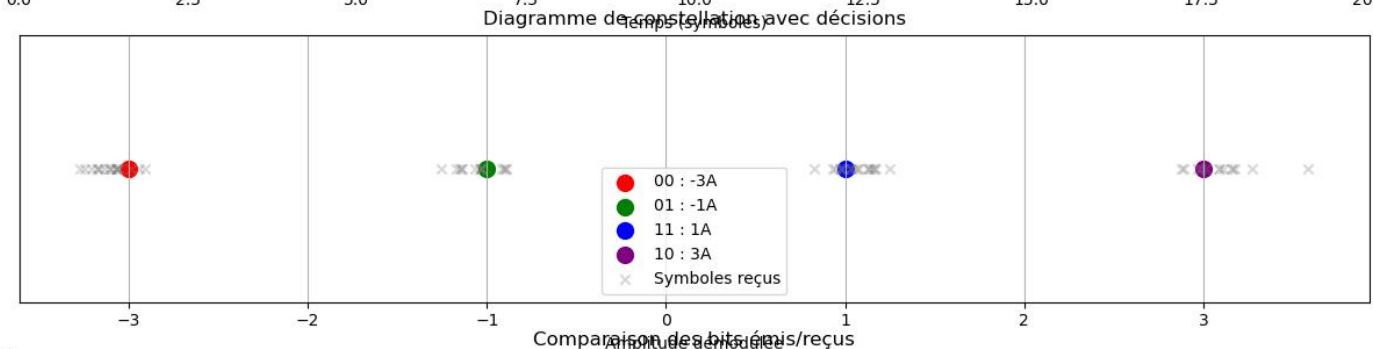
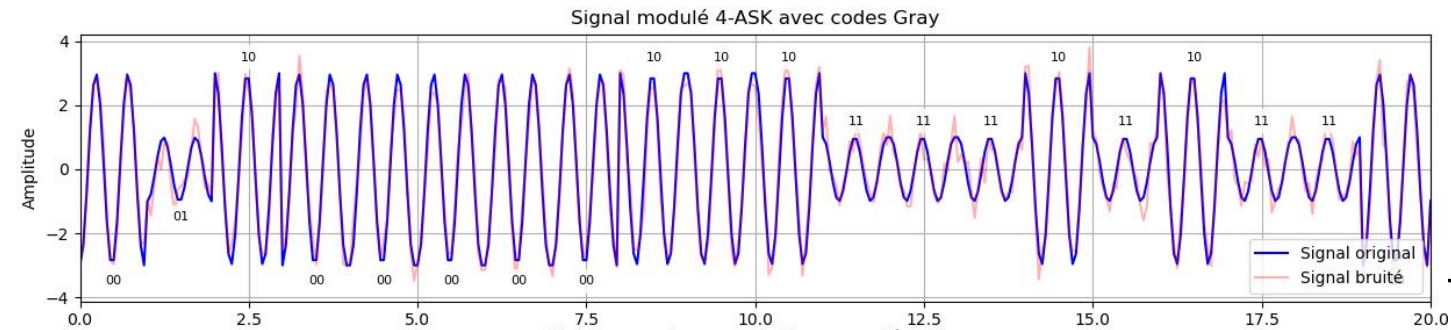
Démodulateur M-ASK

En l'absence du bruit :

- le signal reçu $r(t)$ est multiplié par une onde porteuse (l'oscillateur de l'émission) $\rightarrow s_1(t)$
- Le signal résultant subi un filtrage passe-bas entrainant $s_2(t)$
- Le récepteur récupère l'horloge (T) et échantillonne la valeur a_k reçu.



4-ASK - Code Gray - SNR: 10 dB - BER: 0.00e+00

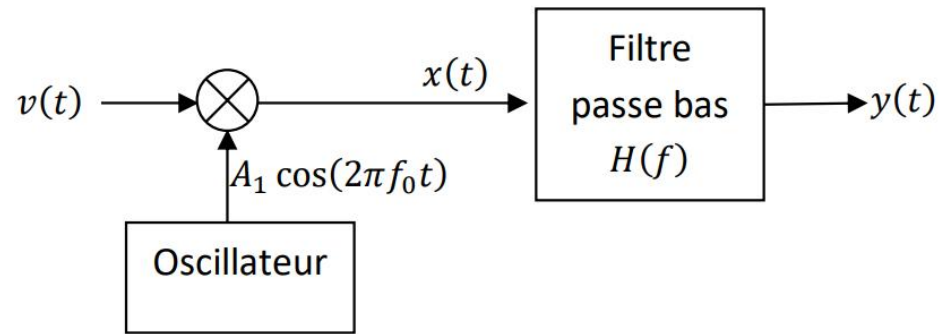


Communication analogique : Rappels

□ Démodulation d'Amplitude

Récupération du message à bande de base à partir de l'onde modulée.

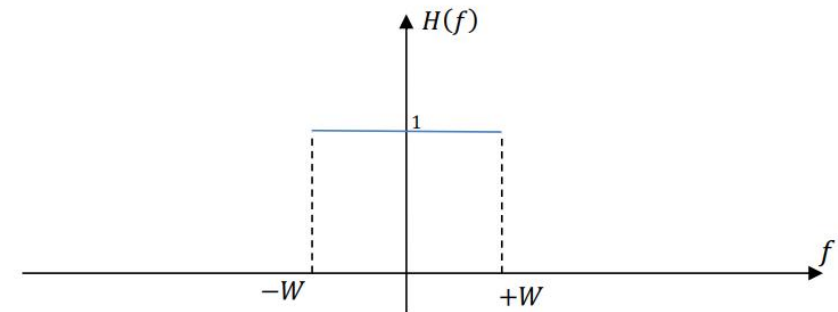
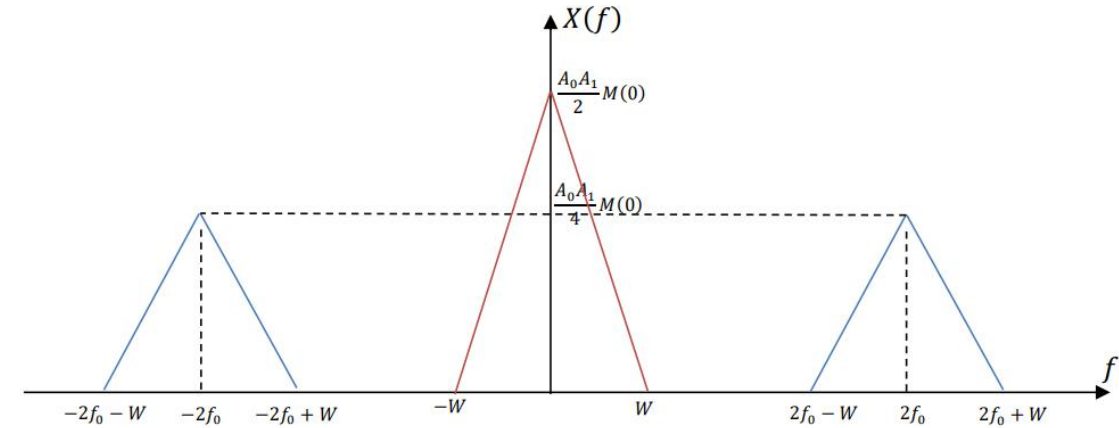
$$v(t) = A_0 m(t) \cos(2\pi f_0 t)$$



$$x(t) = v(t)A_1 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 A_1 m(t) \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2}$$

$$X(f) = \frac{A_0 A_1}{2} M(f) + \frac{A_0 A_1}{4} M(f - 2f_0) + \frac{A_0 A_1}{4} M(f + 2f_0)$$

→ Démodulation cohérente (même f_0) ou synchrone.



4. Modulation numérique à bande étroite

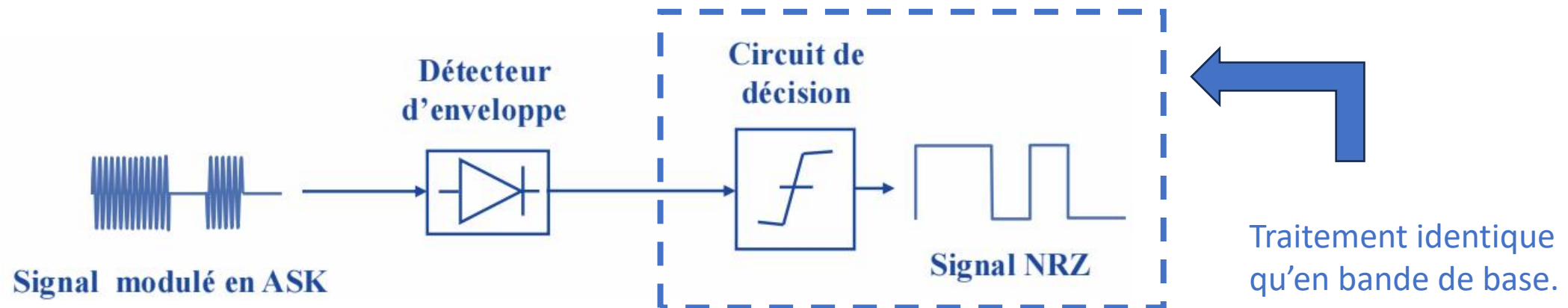
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA ou ASK (Amplitude Shift Keying)

Démodulation M-ASK par détection d'enveloppe

Au niveau du récepteur, la démodulation est réalisée souvent par une détection d'enveloppe. La détection d'enveloppe récupère le signal modulé à partir de son amplitude seule et ne nécessite pas la connaissance de la fréquence porteuse. Elle est très efficace en l'absence du bruit.

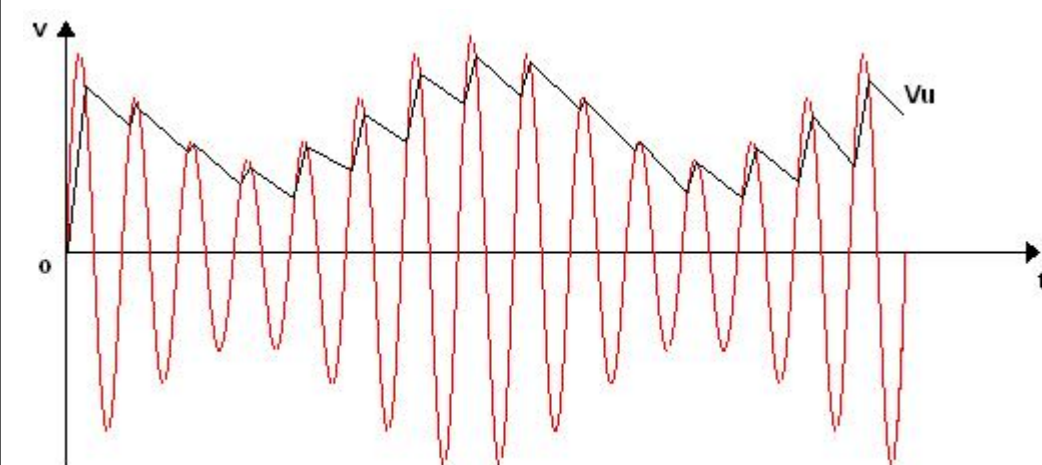
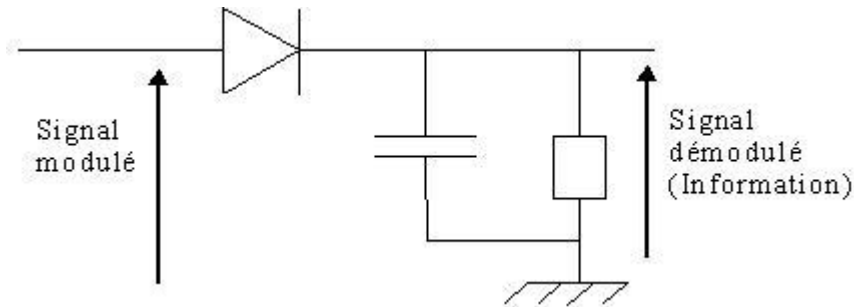
La démodulation par détection d'enveloppe requière un circuit plus simple que la démodulation cohérente. Cependant la BER est plus élevée pour un SNR < 15 db.



Communication analogique : Rappels

□ Détection Non Synchrone (Détection d'enveloppe)

Utilisation d'un circuit simple et efficace connu sous le nom de détecteur d'enveloppe (envelope detector)



- Démodulation cohérente :
 - Nécessite envoi de f_0 ou sa génération avec au niveau du récepteur à l'aide d'un mécanisme de synchronisation.
 - Performances et précisions élevées mais plus coûteuses.
 - Utilisée pour les communications à haut débit et de haute qualité, telles que la télévision numérique, les réseaux cellulaires ou les communications par satellite.
- Démodulation non cohérente :
 - Ne nécessite pas un mécanisme de synchronisation
 - Utilisée pour les communications à faible puissance et à faible coût, telles que les capteurs sans fil, l'identification par radiofréquence ou les appareils Bluetooth.

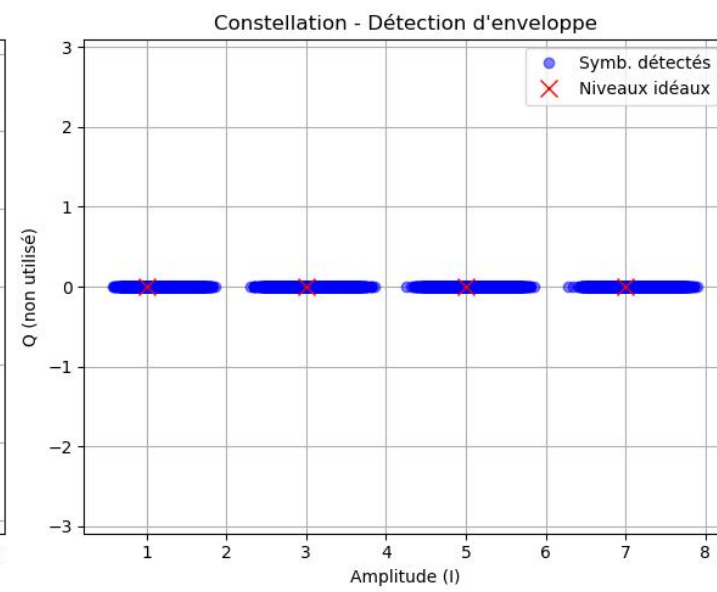
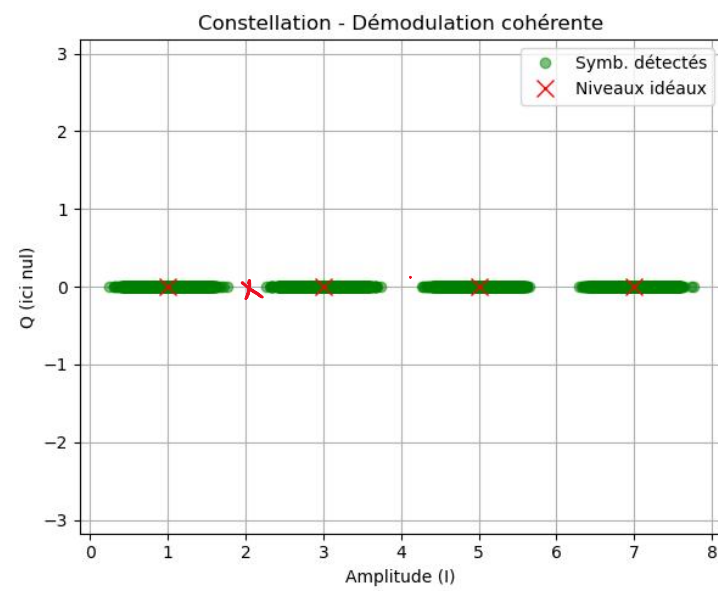
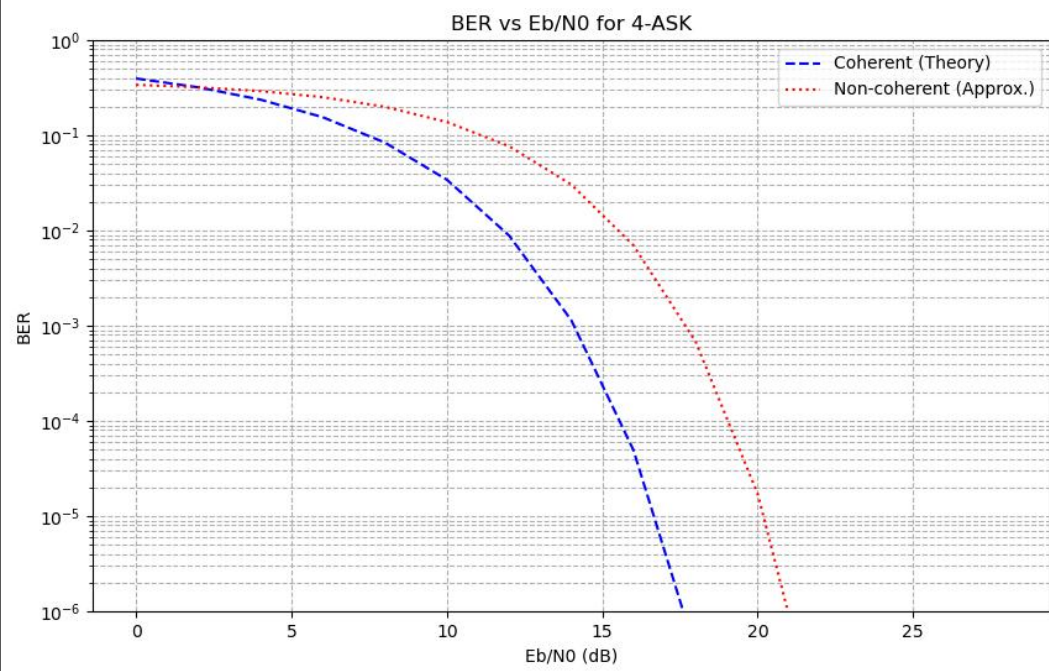
4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA ou ASK (Amplitude Shift Keying)

Comparaison entre Démodulation M-ASK cohérente/ Détection d'enveloppe

- BER :
Cohérente : $\sim 10^{-4}$ à SNR=15 dB / Enveloppe : $\sim 10^{-2}$ à SNR=15 dB
- Constellation
cohérente : Points bien regroupés autour des niveaux théoriques / Détection d'enveloppe : Dispersion importante due à la perte d'information de phase.
- Cohérente nécessite synchronisation précise.



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA ou ASK (Amplitude Shift Keying)

Comparaison entre Démodulation M-ASK cohérente/ Détection d'enveloppe

○ BER : $P_e = Q\left(\frac{(a_1 - a_0)E_h}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right) \rightarrow P_e \approx \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2 - 1)N_0}}\right)$

Cohérente : $\sim 10^{-4}$ à SNR=15 dB / Enveloppe : $\sim 10^{-2}$ à SNR=15 dB

○ Constellation

cohérente : Points bien regroupés autour des niveaux théoriques / Détection d'enveloppe : Dispersion importante due à la perte d'information de phase

Application démodulation cohérente (synchrone)	Raison du Choix	Exemple Concret
Fibre optique haut débit	Environnement à haut SNR	Systèmes 100G PAM-4
Communications spatiales	Maximisation de l'efficacité spectrale	Liaisons satellite Q/V-band
Câbles sous-marins	Compensation des distortions de phase	Répéteurs optiques cohérents
Radars haute précision	Détection de faible puissance	Radars météorologiques
Réseaux 5G/6G mmWave	Gestion des multi-trajets	Front-haul radio photonique

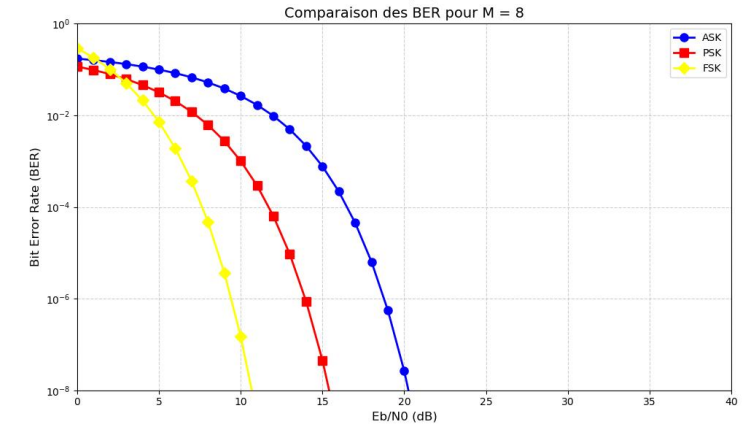
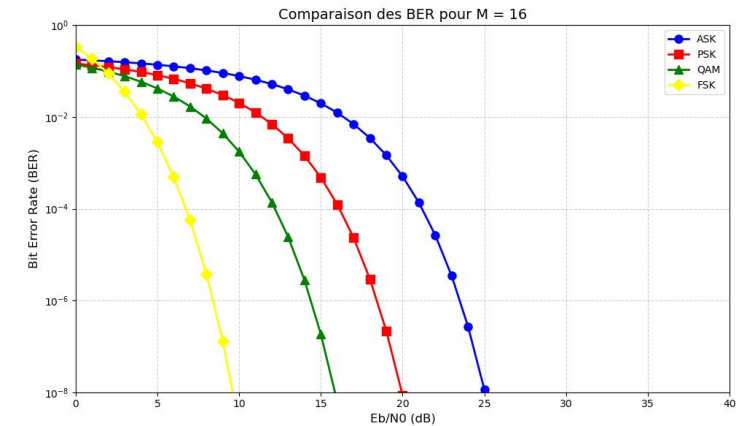
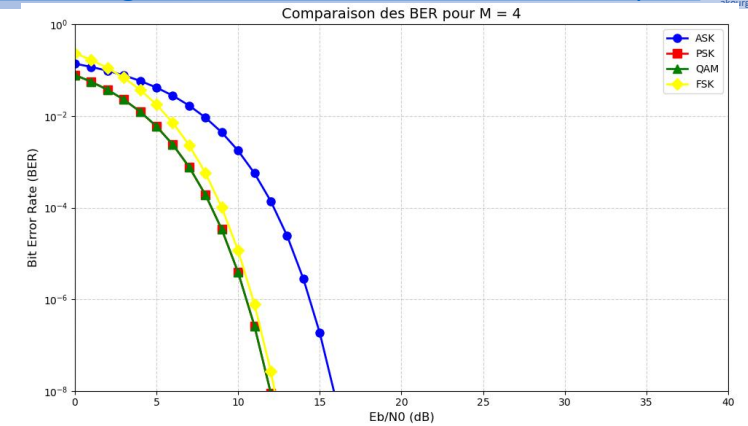
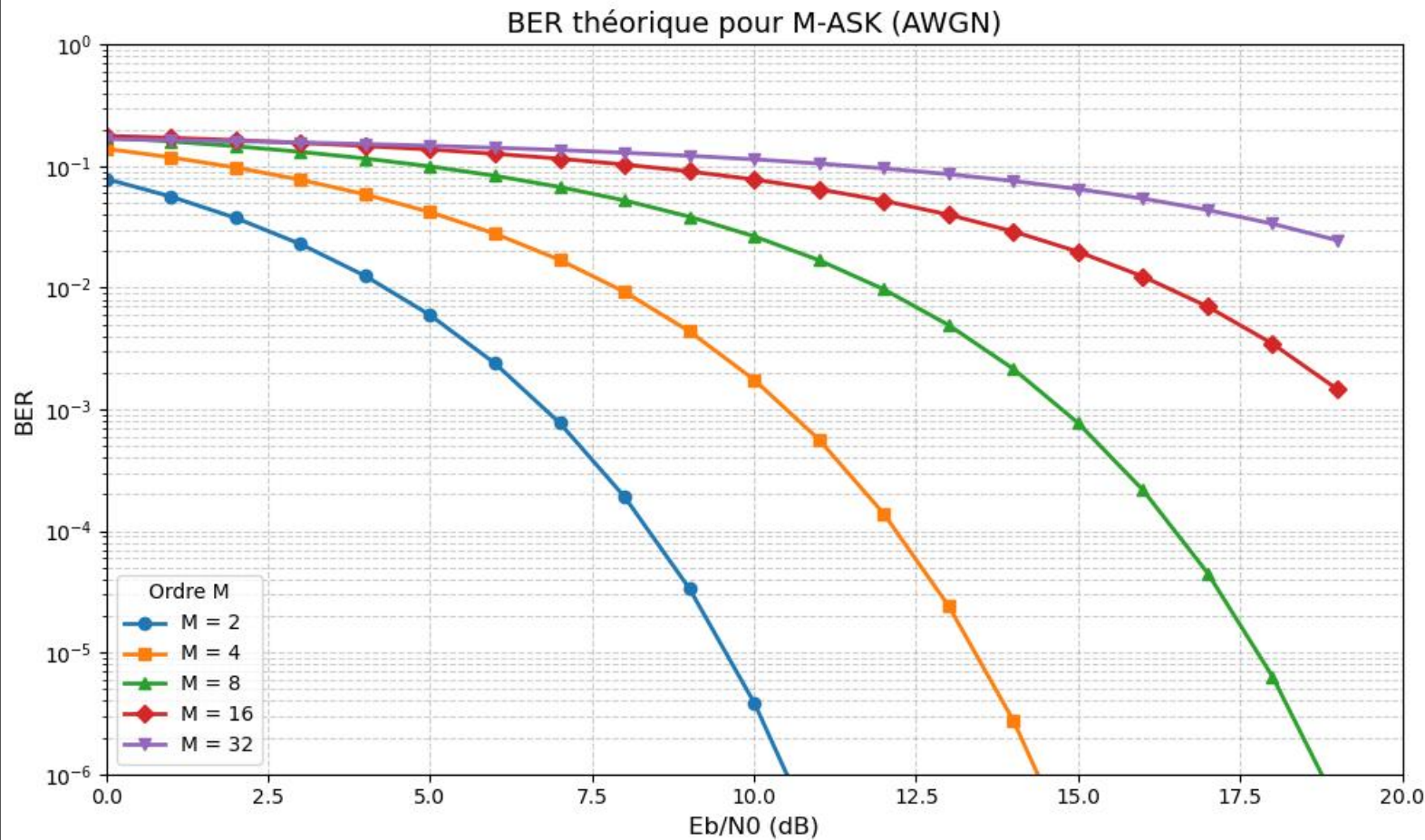
Application démodulation non cohérente (détection d'enveloppe)	Raison du Choix	Exemple Concret
Capteurs IoT basse consom	Simplicité de mise en œuvre	Réseaux LoRa/LPWAN
Communications mobiles legacy	Compatibilité avec équipements anciens	Systèmes AM analogiques
Contrôle industriel robuste	Tolérance aux perturbations de phase	Automates programmables
Dispositifs médicaux portables	Contraintes énergétiques strictes	Moniteurs cardiaques sans fil
Systèmes de localisation	Robustesse aux multi-trajets	RFID UWB

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA ou ASK (Amplitude Shift Keying)

Comparaison entre modulation M-ASK et autres modulations

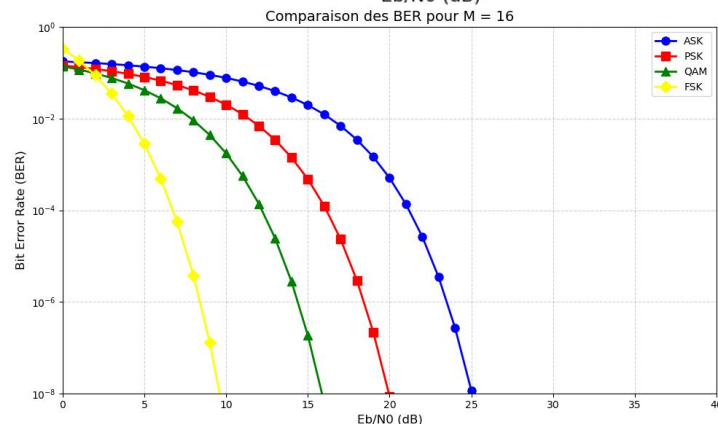
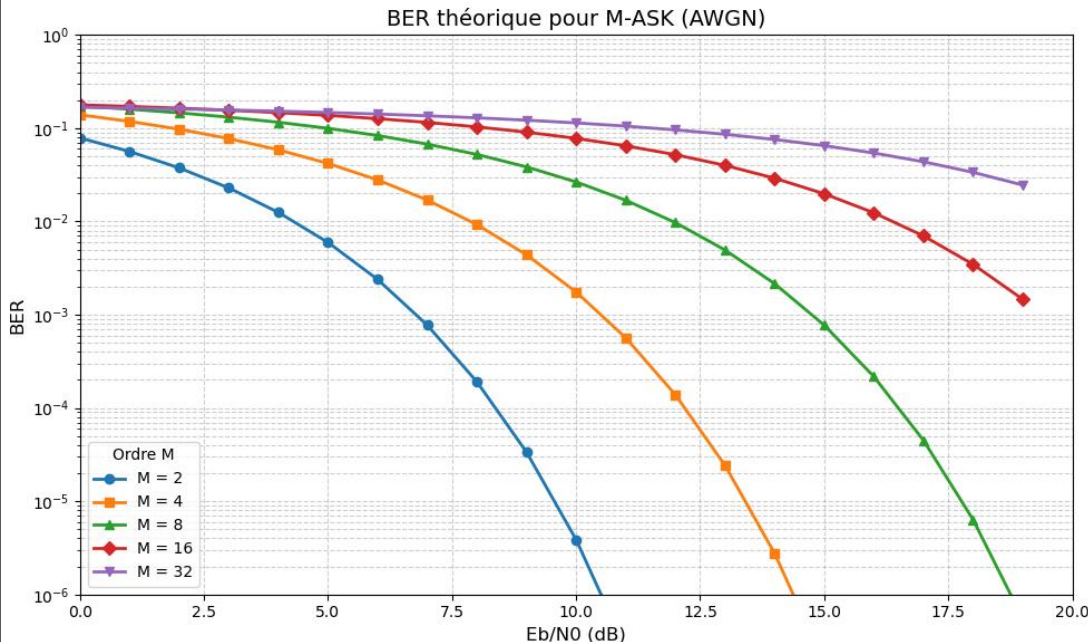


4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude MDA ou ASK (Amplitude Shift Keying)

Comparaison entre modulation M-ASK et autres modulations



Modulation	Comportement du BER	Observations clés
M-ASK	- BER augmente rapidement avec M. - M=32, BER > 10^{-1} même à $E_b/N_0=20$ dB.	- Très sensible au bruit pour M≥8 - Nécessite un $\frac{E_b}{N_0}$ élevé pour M grand. - Utilisée en bande de base (ex. ADSL).
M-PSK	- Performances stables pour M=2 (BPSK) et M=4 (QPSK). - BER dégrade fortement pour M≥8	- Robustesse moyenne au bruit. - Sensible aux erreurs de phase pour M≥8 - Idéale pour les canaux à puissance limitée (ex. satellites).
M-QAM	- Meilleur compromis débit/performance. - 16-QAM atteint BER= 10^{-5} pour $E_b/N_0=15$ dB.	- Efficacité spectrale élevée. - Nécessite un E_b/N_0 croissant avec M. - Standard pour la 4G/5G et le Wi-Fi (ex. 64-QAM).
M-FSK	- BER diminue avec M (grâce à l'orthogonalité). - Pour M=32, BER ≈ 10^{-5} à $E_b/N_0=15$ dB..	- Robustesse au bruit accrue avec M. - Faible efficacité spectrale. - Utilisée dans les canaux bruyants (ex. RFID, communications militaires).

4. Modulation numérique à bande étroite

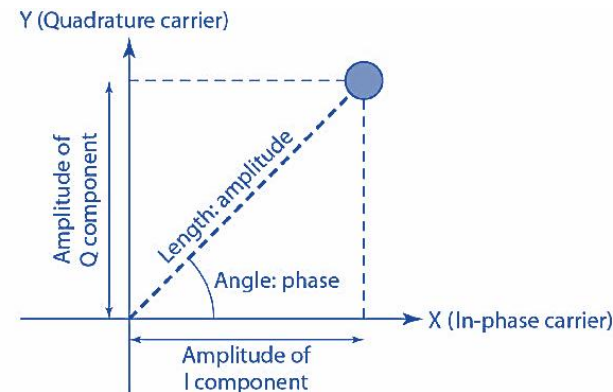
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$



$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$$

On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$\mathbf{i}(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad \mathbf{q}(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT) \rightarrow m(t) = \mathbf{i}(t) A \cos(2\pi f_p t) - \mathbf{q}(t) A \sin(2\pi f_p t)$$

Remarque :

Les modulateurs/démodulateurs traditionnels non I/Q nécessitent des circuits analogiques complexes (**oscillateurs à phase précise**). Une modulation de phase pure nécessite des modulateurs RF à large plage de phases (coûteux). Avec l'I/Q, on utilise deux modulateurs en quadrature (I et Q) à amplitude constante, plus simples et moins sensibles aux défauts.

4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1,M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

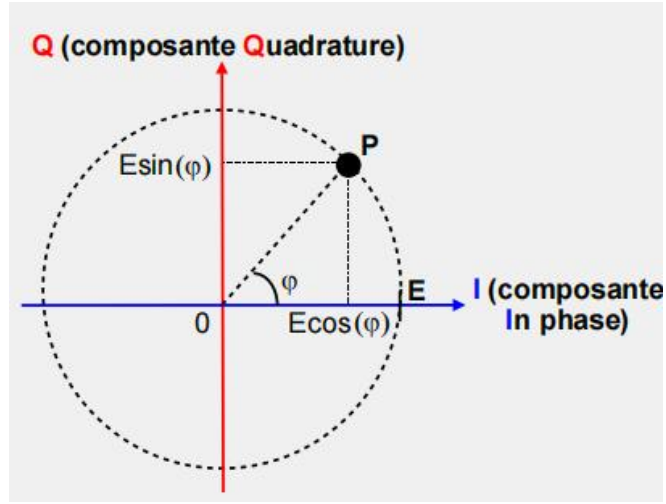
On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$i(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT) \rightarrow m(t) = i(t) A \cos(2\pi f_p t) - q(t) A \sin(2\pi f_p t)$$

Remarque :

- **Coût d'un émetteur QPSK sans décomposition I/Q** : Oscillateur à 4 phases précises (+45°, +135°, etc.) + commutateur analogique rapide → coût élevé en précision et stabilité.
- **Coût d'un émetteur QPSK Avec décomposition I/Q** : Deux DAC générant des signaux I et Q (ex : ±1/√2) + deux mixers RF → solution numérique standard, 30 à 50 % moins chère.



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

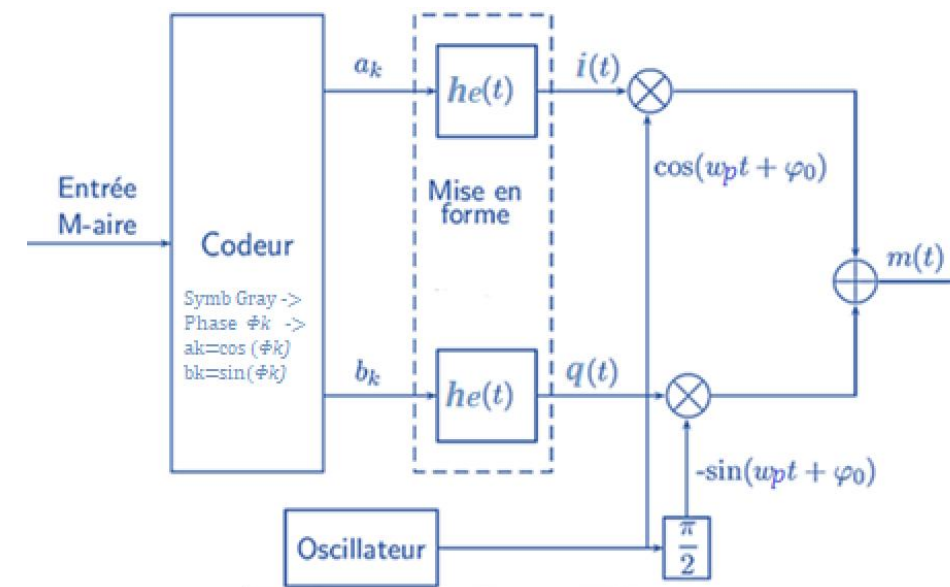
On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$\mathbf{i}(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad \mathbf{q}(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT) \rightarrow m(t) = \mathbf{i}(t) A \cos(2\pi f_p t) - \mathbf{q}(t) A \sin(2\pi f_p t)$$

Remarque :

- **Coût d'un émetteur QPSK sans décomposition I/Q** : Oscillateur à 4 phases précises (+45°, +135°, etc.) + commutateur analogique rapide → coût élevé en précision et stabilité.
- **Coût d'un émetteur QPSK Avec décomposition I/Q** : Deux DAC générant des signaux I et Q (ex : ±1/√2) + deux mixers RF → solution numérique standard, 30 à 50 % moins chère.



4. Modulation numérique à bande étroite

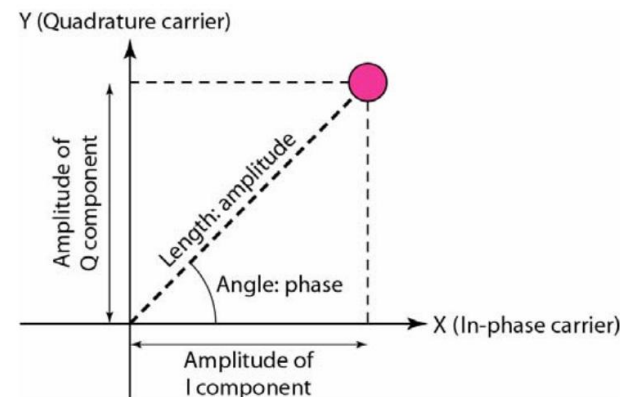
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$



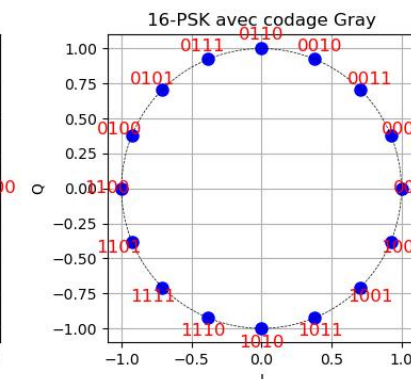
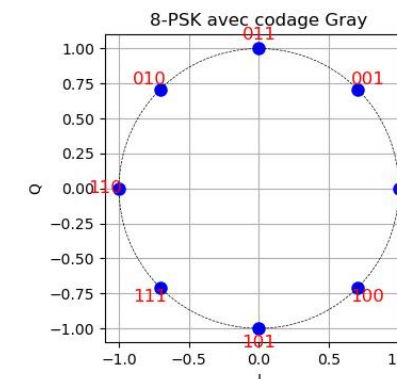
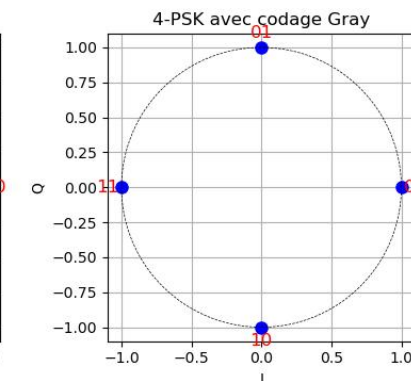
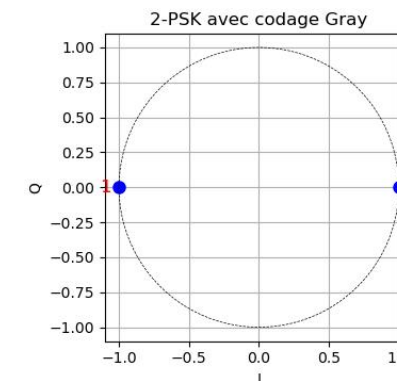
On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$i(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT)$$

Une modulation M-PSK permet de coder n bits :

- 2-PSK (2^1) dite aussi BPSK : Binary Phase Shift Keying → On code un bit
- 4-PSK (2^2) dite QPSK : Quadrature Phase Shift Keying → On code 2 bits
- 8-PSK (2^3) → On code 3 bits
- 16-PSK (2^4) → On code 4 bits



4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

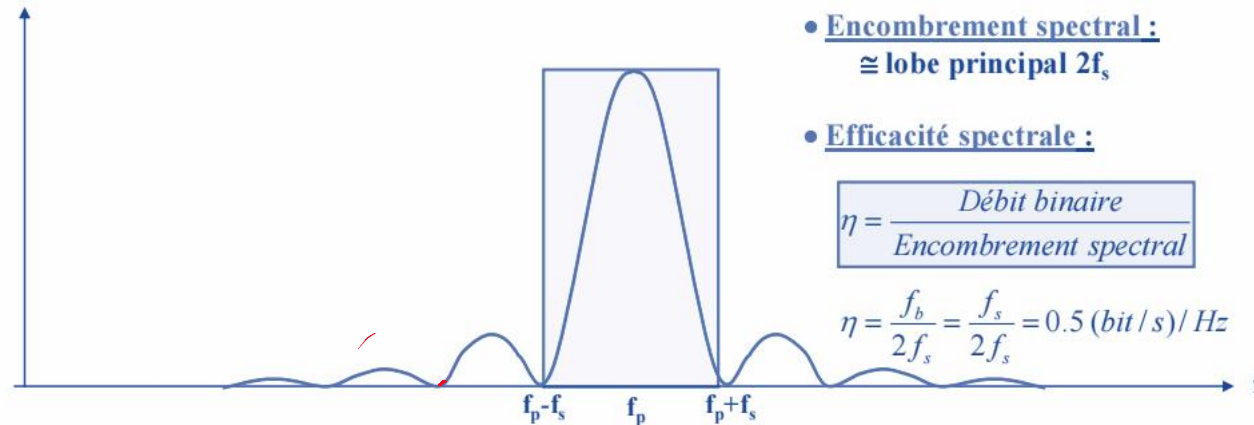
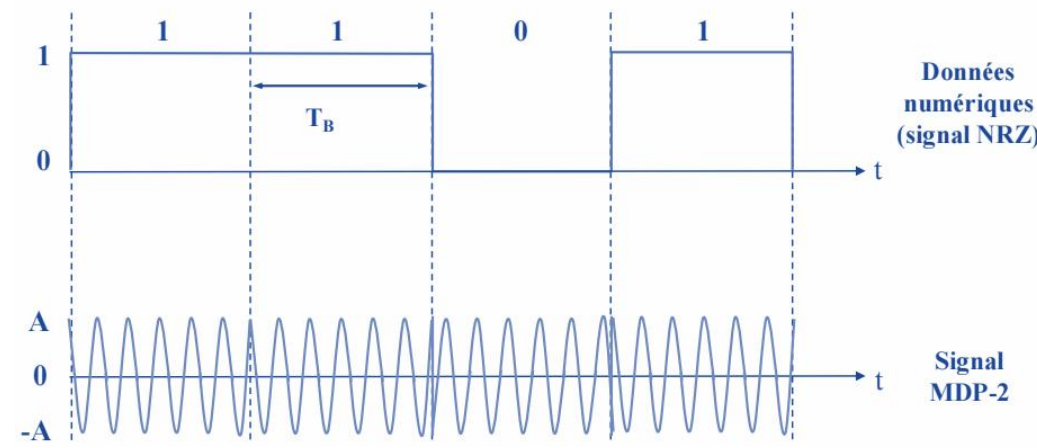
On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

Modulation 2-PSK

$\Phi_k = 0$ pour 0 et $\Phi_k = \pi$ pour 1

→ $m(t) = \sum_k [a_k h_e(t - kT) A \cos(2\pi f_p t)]$ avec $a_k \in \{1, -1\}$



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

On décompose le signal selon les voies I et Q :

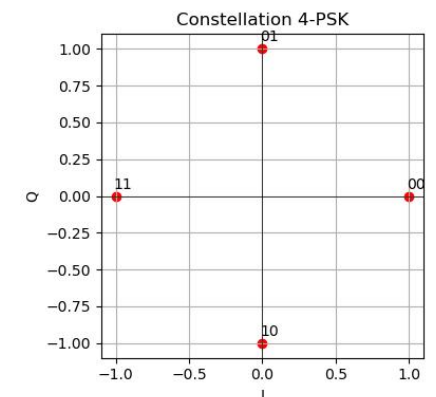
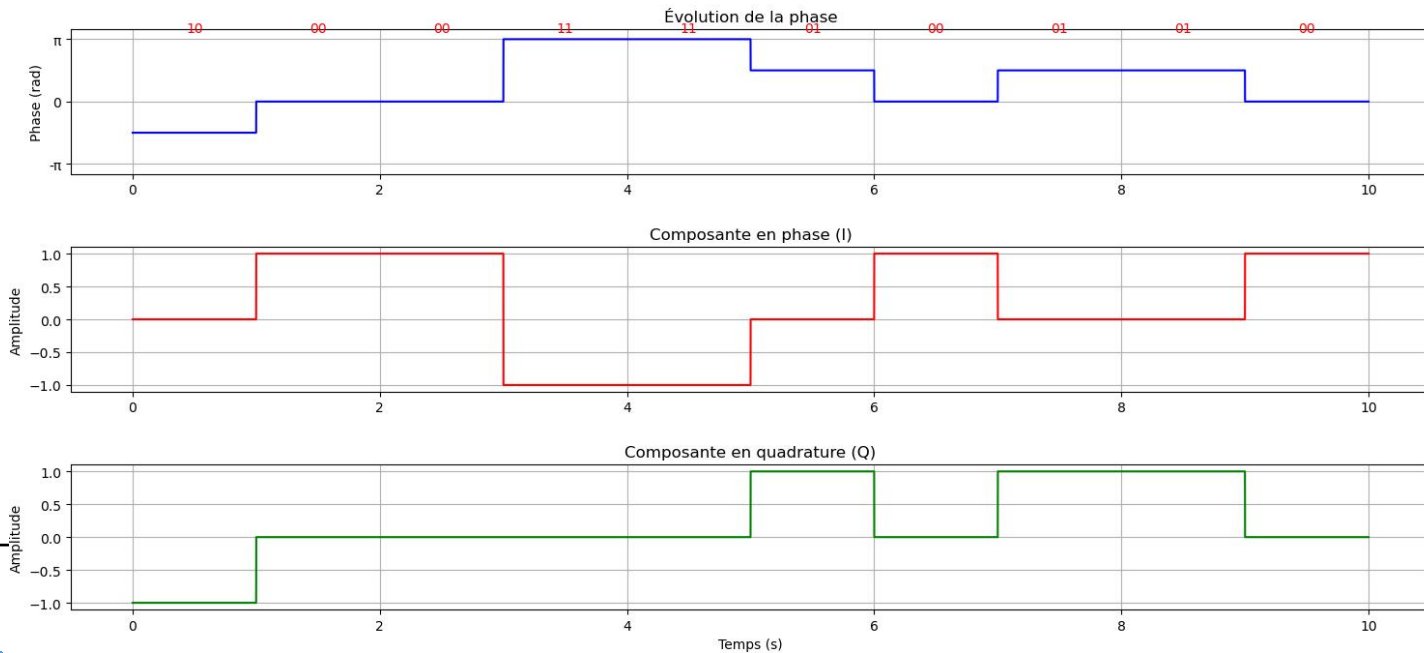
$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

Modulation 4-PSK

$$\Phi_k \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Sym	00	01	11	10
a_k	1	0	-1	0
b_k	0	1	0	-1

La QPSK est la modulation de 2 porteuses en quadrature par deux signaux en bande de base $i(t)$ et $q(t)$



4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

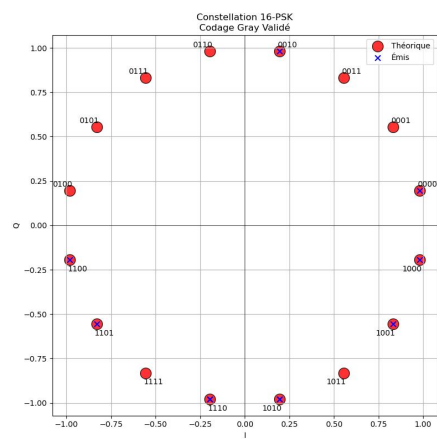
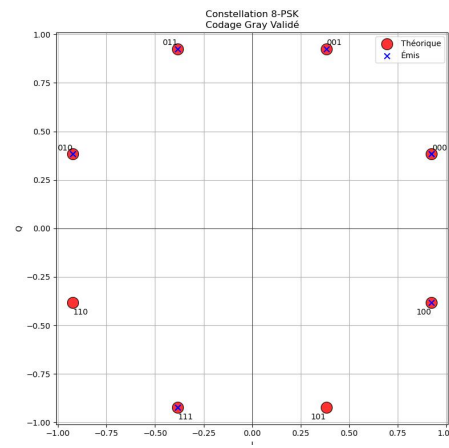
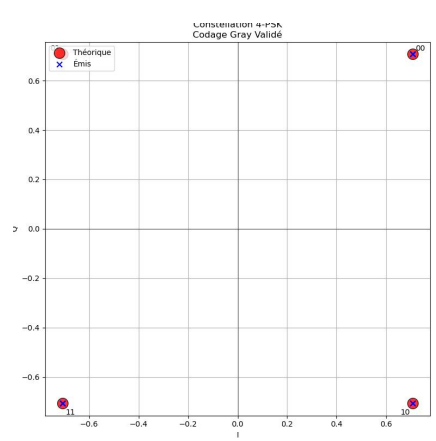
Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1,M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$



Modulation 4-PSK

$$\Phi_k \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Sym	00	01	11	10
a_k	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
b_k	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$

Remarque : Les variations rapides d'amplitude provoquent des **distorsions d'intermodulation** et une régénération de *bruit*

4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1,M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

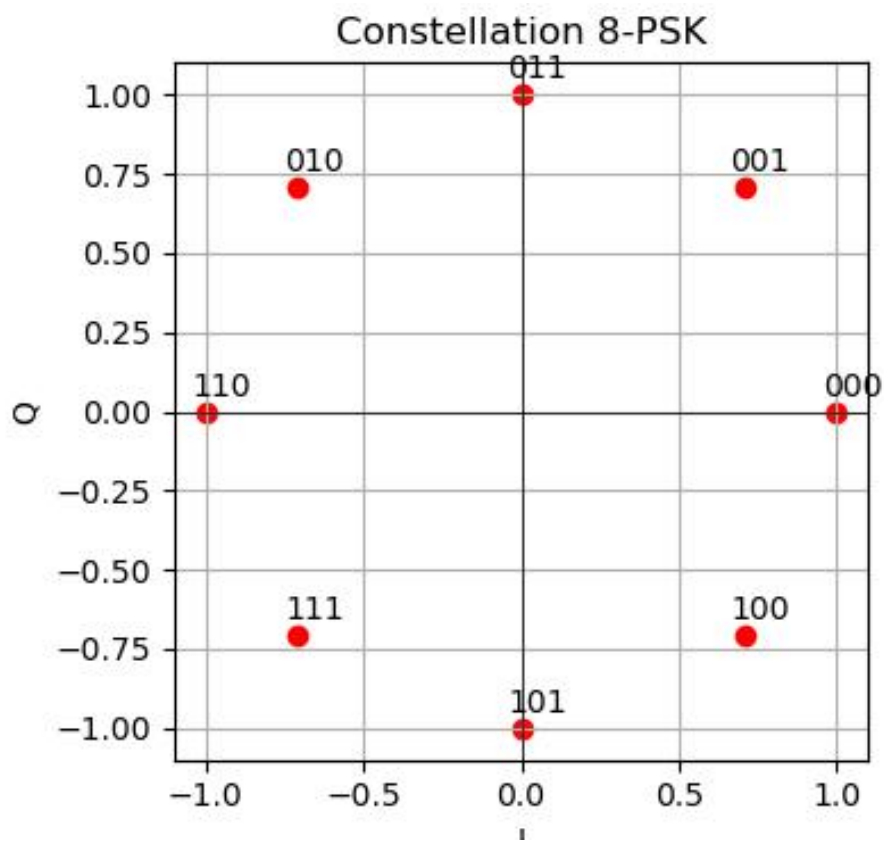
On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

Modulation 8-PSK

$$\Phi_k \in \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Sym	000	001	011	010	110	111	101	100
a_k	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
b_k	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$



4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1,M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

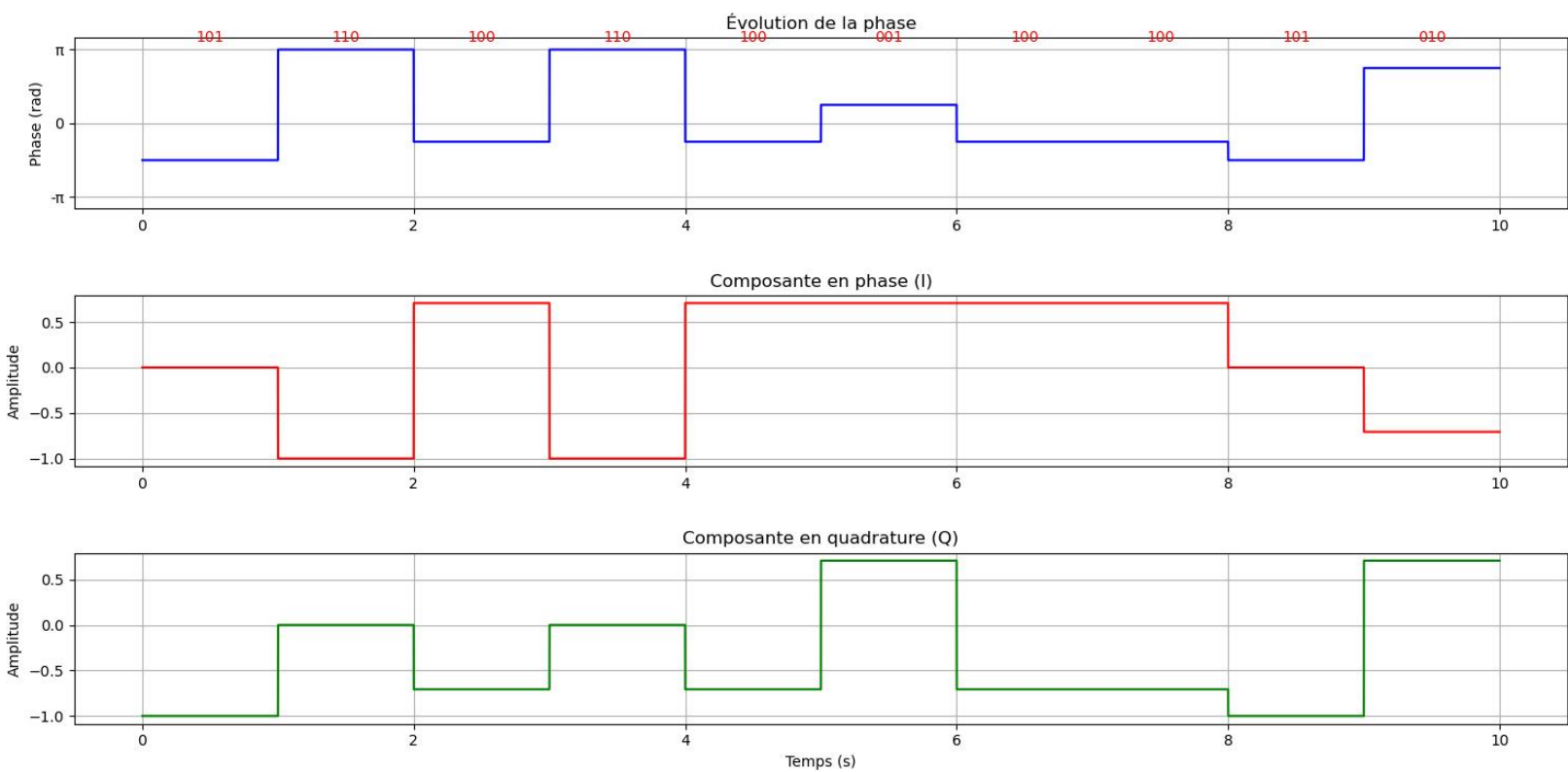
$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

On décompose le signal selon les voies I et Q

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) -$$

Modulation 8-PSK

$$\Phi_k \in \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$



Sym	000	001	011	010	110	111	101	100
a_k	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
b_k	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

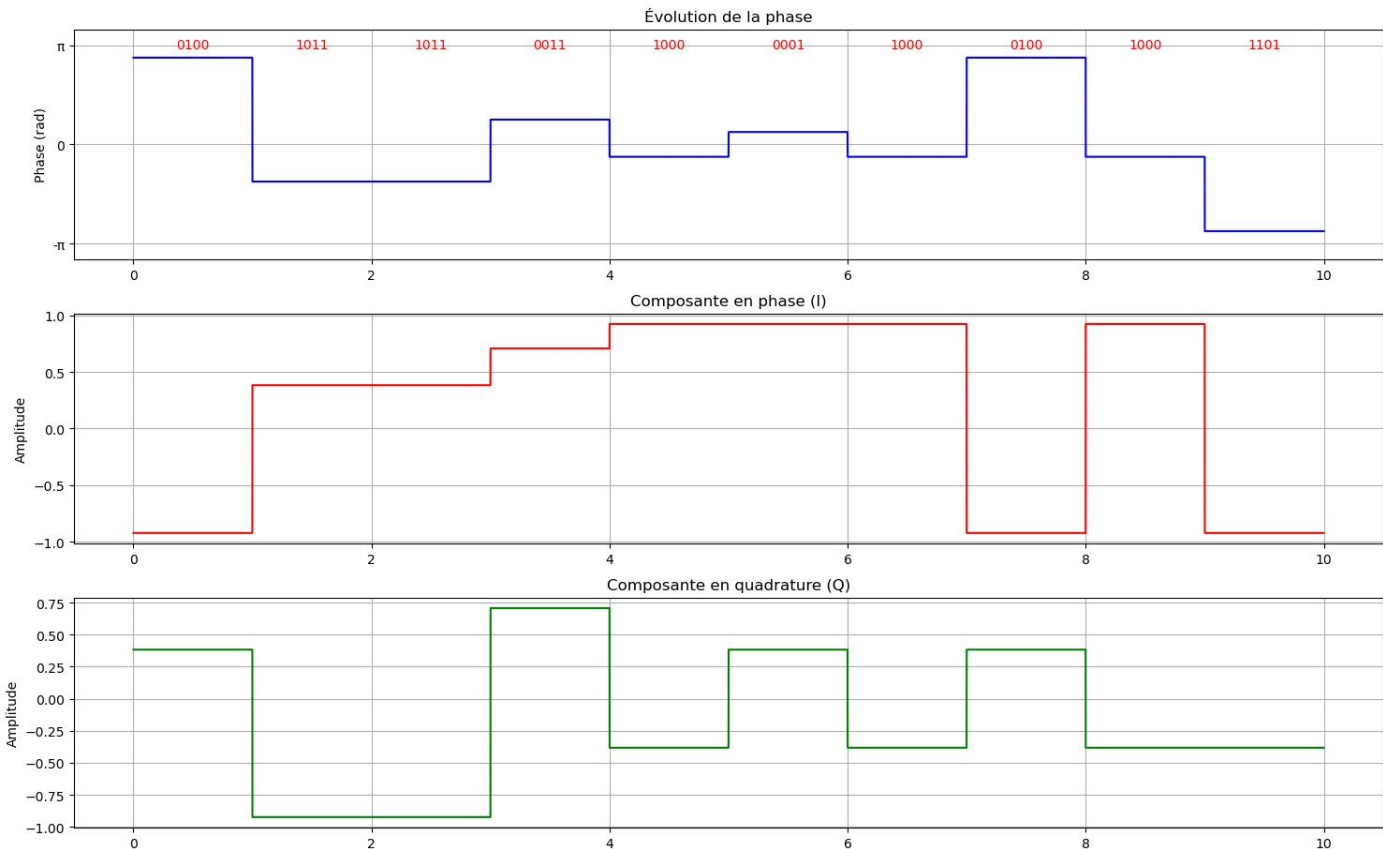
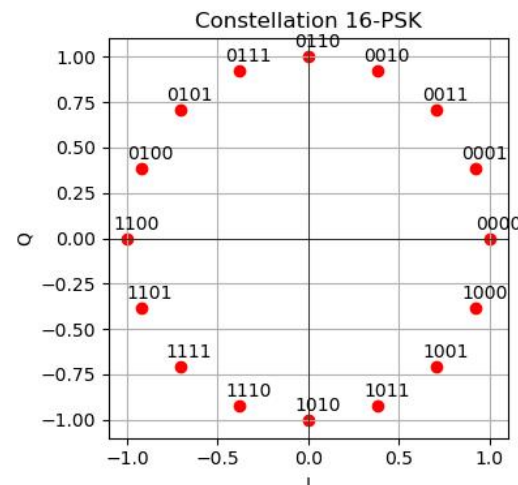
Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

Modulation 16-PSK



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Modulation M-PSK

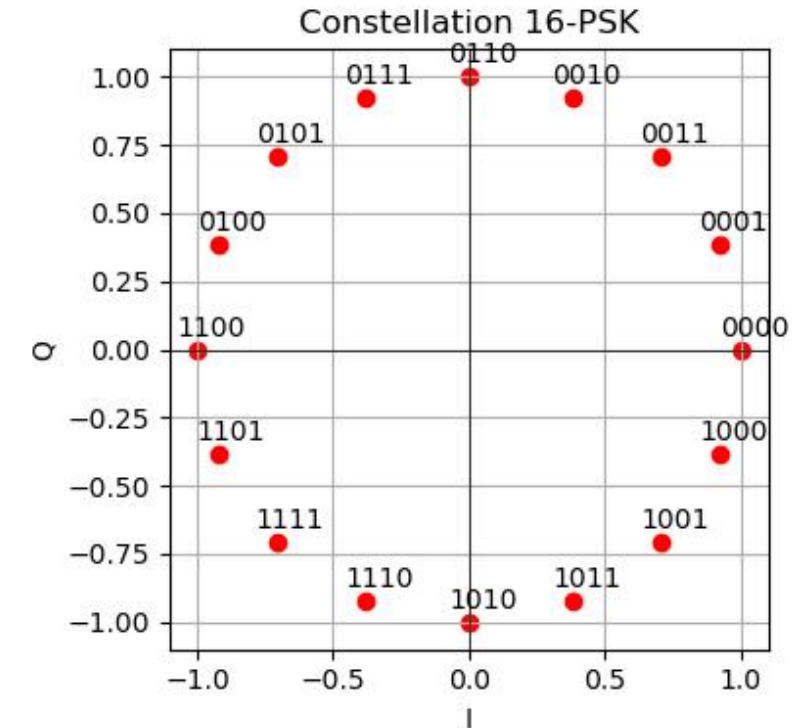
$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

Modulation 16-PSK

En augmentant la valence d'une PSK on rapproche les points de la constellation et on augmente le risque d'erreur →
 Mieux vaut employer une M-MAQ (une modulation qui répartit les points uniformément dans le plan complexe)
 C'est une modulation bien adaptée aux systèmes avec des limitations en puissance émise (la puissance émise par symbole est constante et égale à 1)



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits, on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

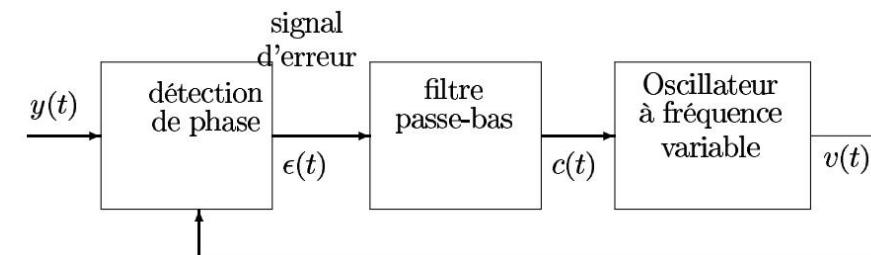
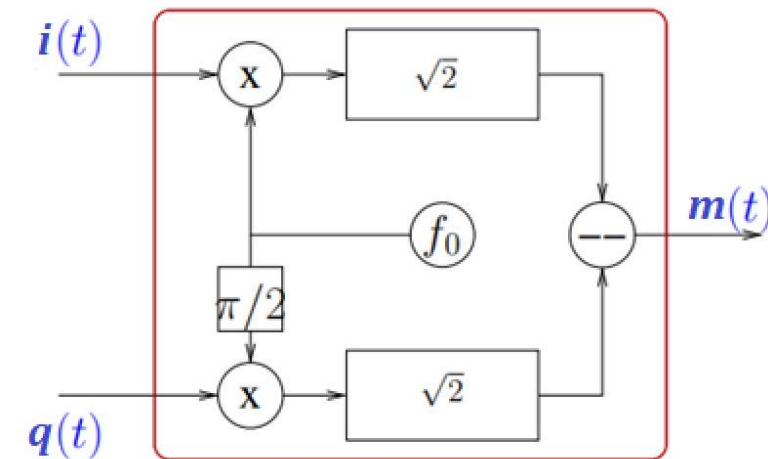
Modulation M-PSK

$$m(t) = \sum_k [A \cos(2\pi f_p t + \Phi_k) h_e(t - kT)]$$

On décompose le signal selon les voies I et Q :

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$i(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT)$$



Caractéristiques de la démodulation

Nécessité de synchroniser la fréquence et la phase entre émetteurs et récepteurs grâce à une boucle de verrouillage de phase. La PLL est utilisée pour récupérer la porteuse (carrier recovery) et compenser les dérives de phase induites par le canal de transmission. La PLL ou boucle de Costas sont des circuits électroniques qui ajustent dynamiquement la phase de l'oscillateur local du récepteur pour qu'elle coïncide avec celle de l'émetteur.

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$i(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT)$$

L'**orthogonalité des porteuses** permet de transmettre simultanément les composantes I et Q sur la même fréquence, sans interférence.
La corrélation à la réception sépare parfaitement les deux flux, même présence de bruit.

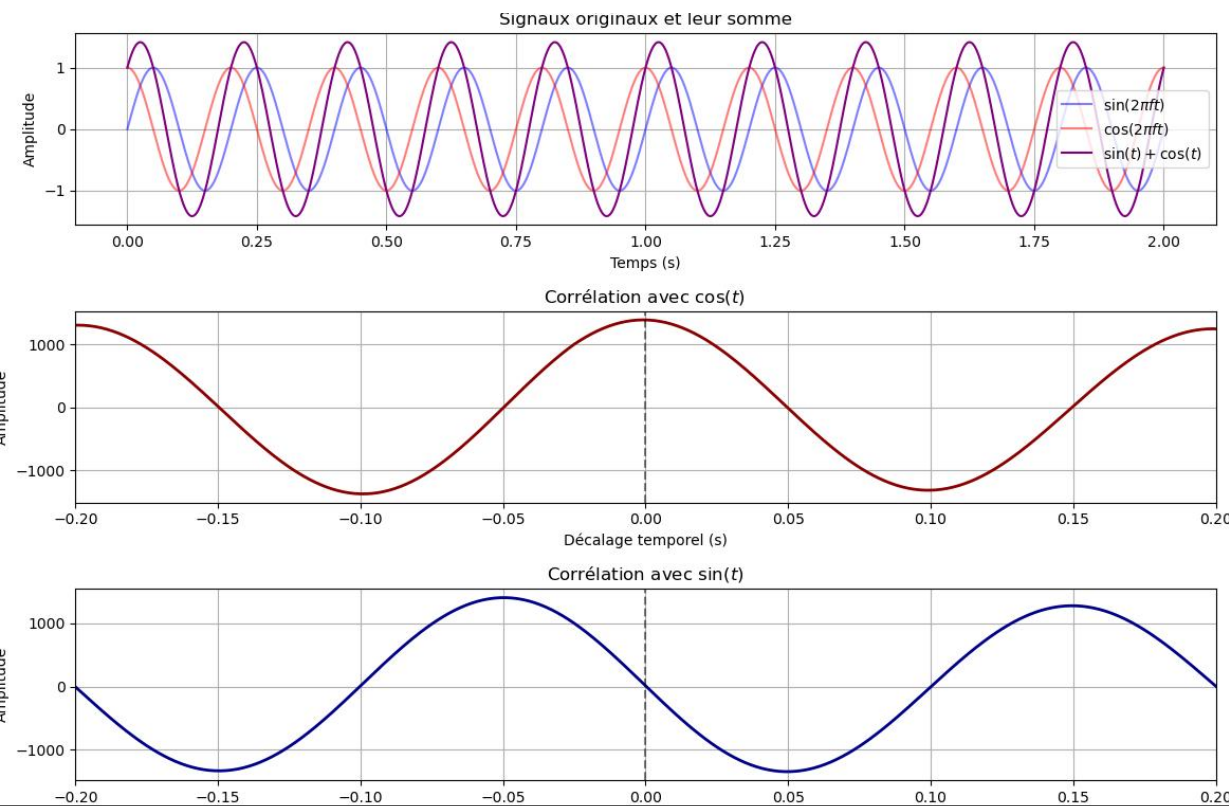
Orthogonalité et occupation spectrale

Les signaux $\cos(2\pi f_p t)$ et $\sin(2\pi f_p t)$ sont orthogonaux :

$$\int_0^T \cos(2\pi f_p t) \sin(2\pi f_p t) dt = 0$$

→ Cela permet de séparer les composantes I et Q à la réception.

Le signal reçu est corrélé avec $\cos(2\pi f_p t)$ et $\sin(2\pi f_p t)$ pour extraire les composantes I et Q.
Puis, les intégrales (moyennes) annulent les termes croisés grâce à l'orthogonalité



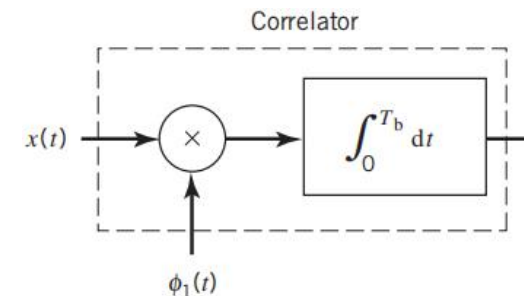
4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$i(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT)$$



L'**orthogonalité des porteuses** permet de transmettre simultanément les composantes I et Q sur la même fréquence, sans interférence. La corrélation à la réception sépare parfaitement les deux flux, même présence de bruit.

Orthogonalité et occupation spectrale

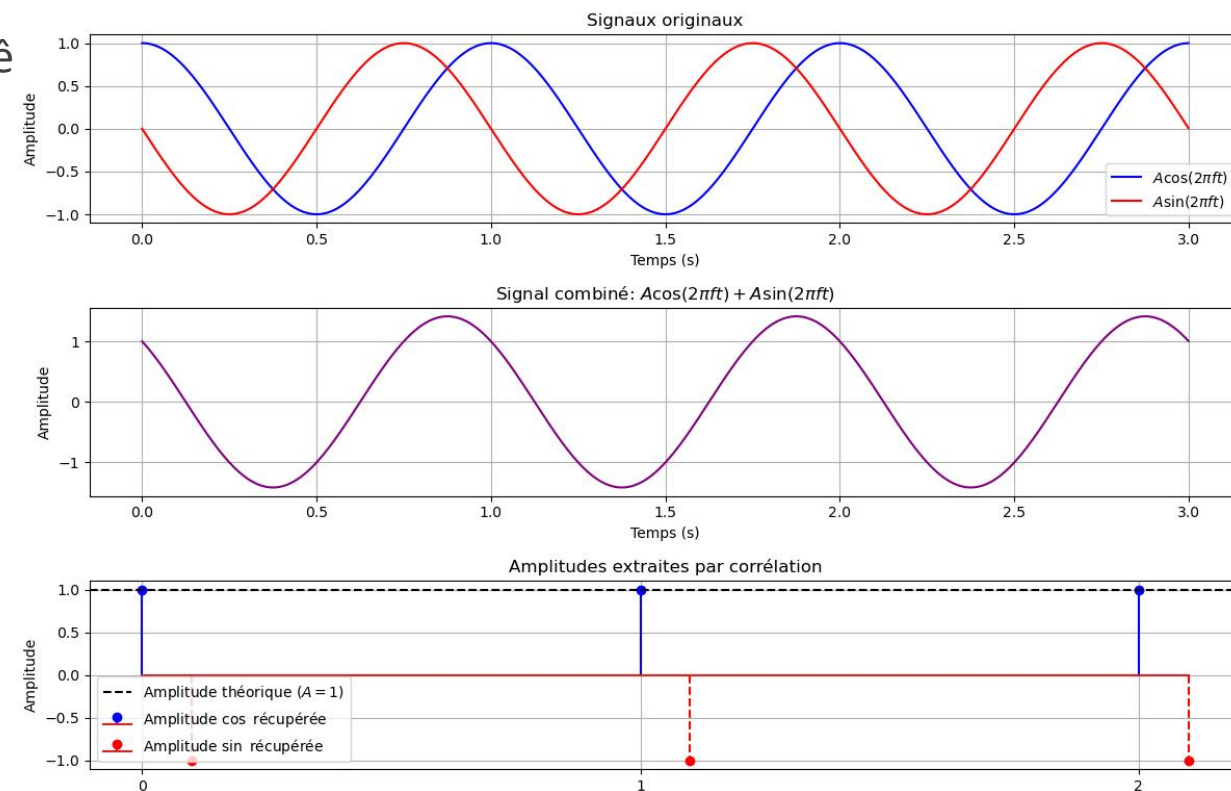
Les signaux $\cos(2\pi f_p t)$ et $\sin(2\pi f_p t)$ sont orthogonaux :

$$\int_0^T \cos(2\pi f_p t) \sin(2\pi f_p t) dt = 0$$

→ Cela permet de séparer les composantes I et Q à la réception.

Le signal reçu est corrélé avec $\cos(2\pi f_p t)$ et $\sin(2\pi f_p t)$ pour extraire les composantes I et Q.

Puis, les intégrales (moyennes) annulent les termes croisés grâce à l'orthogonalité



4. Modulation numérique à bande étroite

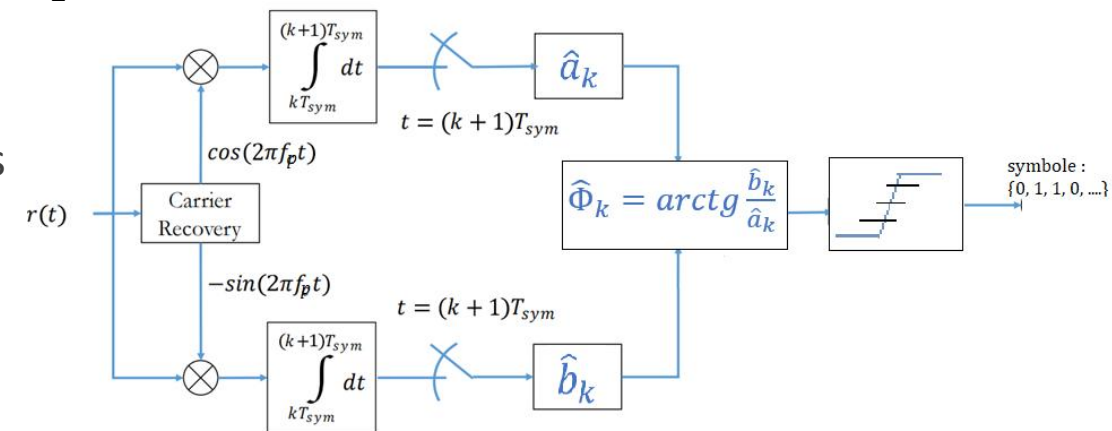
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$i(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT)$$

L'orthogonalité des porteuses permet de transmettre simultanément les composantes I et Q sur la même fréquence, sans interférence. La corrélation à la réception sépare parfaitement les deux flux, même en présence de bruit.



Démodulation M-PSK

- Le signal reçu est corrélé avec $\cos(2\pi f_p t)$ et $\sin(2\pi f_p t)$ pour extraire les composantes I et Q.

(Les intégrales (moyennes) annulent les termes croisés grâce à l'orthogonalité.

→ récupération de $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k$ puis calcul de $\hat{\Phi}_k = \arctg \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_k}$

- Comparaison aux phases de références $\Phi_l = l \frac{2\pi}{M}$ pour $l = 0, M - 1 \rightarrow$ Détection par seuil (maximum de vraisemblance)
- Conversion symboles-bits : Passage du symbole Φ_k détecté au code gray correspondant.

Dans un système pratique, des algorithmes de correction d'erreurs sont mis en place pour corriger les écarts dus au bruit et aux imprécisions de synchronisation.

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

$$m(t) = \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\cos(\Phi_k)}^{a_k} \right] A \cos(2\pi f_p t) - \sum_k \left[h_e(t - kT) \overbrace{\sin(\Phi_k)}^{b_k} \right] A \sin(2\pi f_p t)$$

$$i(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{et} \quad q(t) = \sum_k b_k h_e(t - kT)$$

L'orthogonalité des porteuses permet de transmettre simultanément les composantes I et Q sur la même fréquence, sans interférence.

La corrélation à la réception sépare parfaitement les deux flux, même en présence de bruit.

Démodulation M-PSK

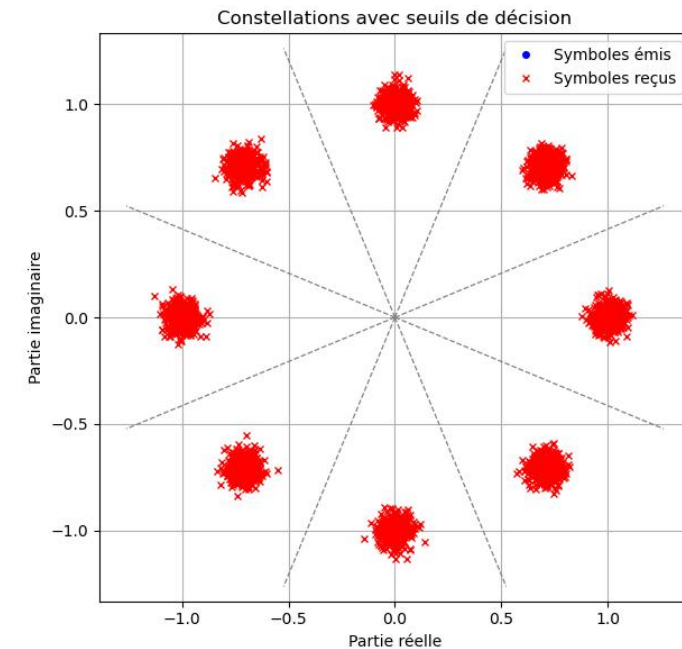
- Le signal reçu est corrélé avec $\cos(2\pi f_p t)$ et $\sin(2\pi f_p t)$ pour extraire les composantes I et Q.

(Les intégrales (moyennes) annulent les termes croisés grâce à l'orthogonalité.

→ récupération de $\hat{a}_k$ et $\hat{b}_k$ puis calcul de $\hat{\Phi}_k = \arctg \frac{\hat{b}_k}{\hat{a}_k}$

- Comparaison aux phases de références $\Phi_l = l \frac{2\pi}{M}$ pour $l = 0, M - 1 \rightarrow$ Détection par seuil (maximum de vraisemblance)
- Conversion symboles-bits : Passage du symbole Φ_k détecté au code gray correspondant.

Dans un système pratique, des algorithmes de correction d'erreurs sont mis en place pour corriger les écarts dus au bruit et aux imprécisions de synchronisation.



4. Modulation numérique à bande étroite

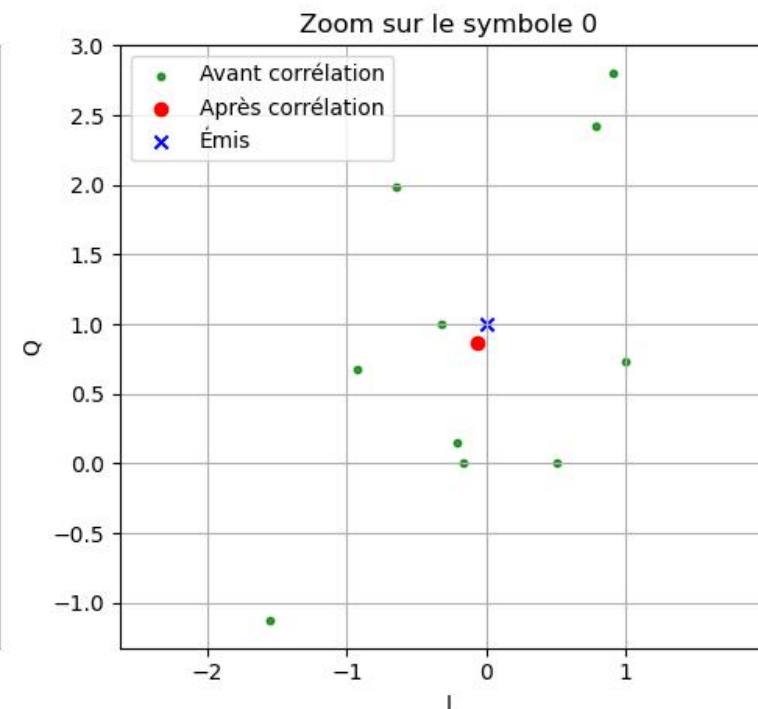
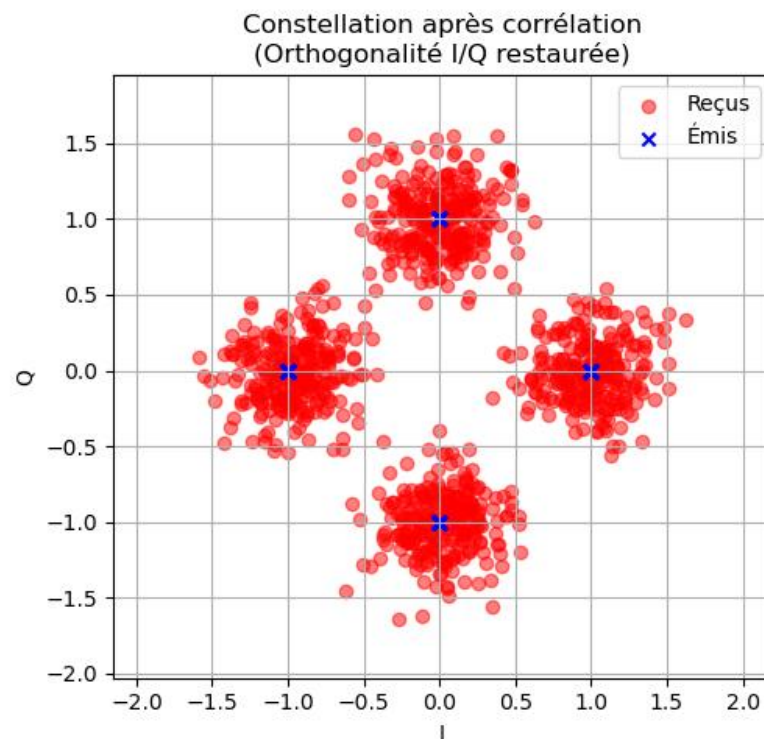
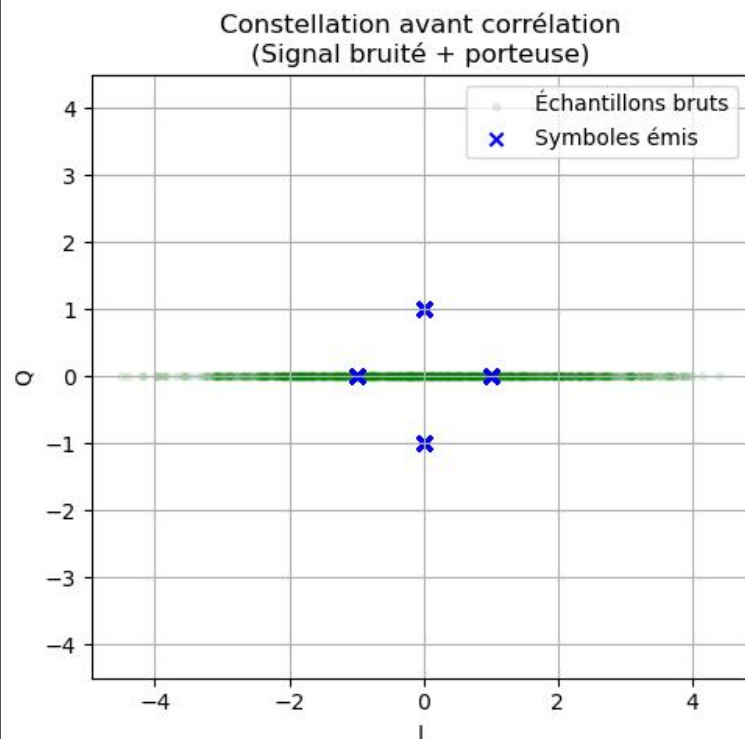
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

L'**orthogonalité des porteuses** permet de transmettre simultanément les composantes I et Q sur la même fréquence, sans interférence. La corrélation à la réception sépare parfaitement les deux flux, même en présence de bruit.

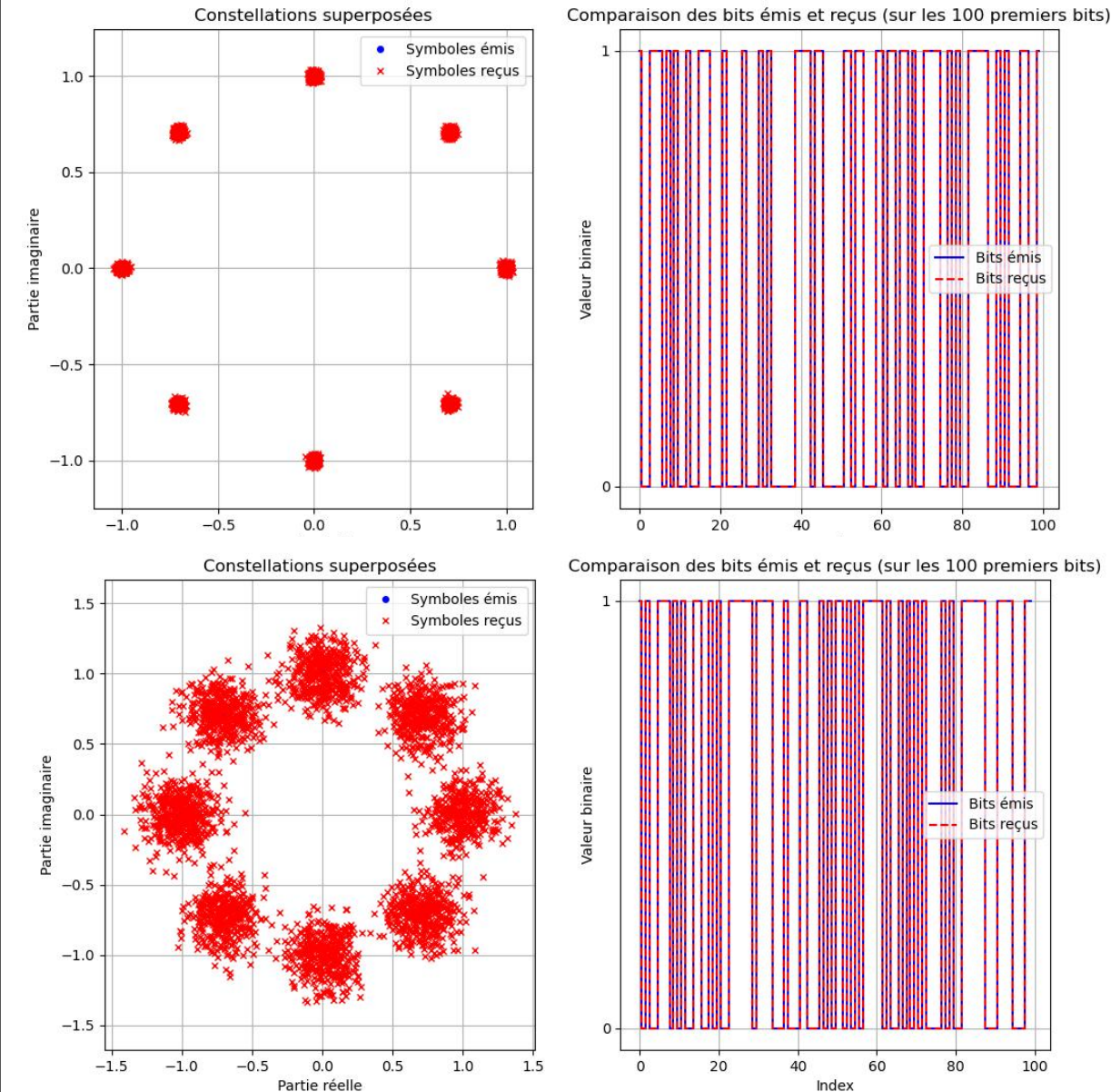
Orthogonalité et occupation spectrale



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)



Remarques

- Un démodulateur cohérent pour le QPSK peut être réalisé avec des multiplieurs numériques et des filtres FIR, évitant les boucles à verrouillage de phase analogiques (PLL) coûteuses.
- Les radios logicielles (SDR) exploitent l'I/Q pour implémenter des modulations variées (PSK, QAM, etc.) sur une même plateforme matérielle. Cela réduit les coûts de Recherche et de développement ainsi que de mise à jour des systèmes.

4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1,M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

Applications :

- BPSK (équivalent à une PAM binaire) :

Téléphonie 2G (IS-95), Téléphonie 3G.
WLAN (WiFi), WMAN (Wimax), Bluetooth.

- QPSK :

Téléphonie 2G (IS-95), Téléphonie 3G.
WLAN (WiFi), WMAN (Wimax), Bluetooth.
Diffusion par satellite (S) ou terrestre (T) : DVB-S et DVB-T.

- 8-PSK :

Téléphonie 2,5G (Europe) : EDGE (Enhanced Data rates for GSM Evolution).

Critère	M-ASK	M-PSK	M-QAM	M-FSK
Efficacité	Faible à moyenne	Moyenne à élevée	Très élevée	Très faible
Robustesse	Faible	Moyenne pour $M < 8$	Moyenne Dépend de M	Très robuste au bruit
Complexité	Faible	Moyenne	Elevée	Élevée (multi - fréquences)
Applications	Communication optique, RFID bas débit, Télécommande, Capteurs simples	Satellites, Bluetooth, Wi-Fi (QPSK), RFID (DBPSK)	Télé num (16—QAM), 4G/5G (256-QAM), Wi-Fi (64-QAM)	RFID, IoT,(LoRa) communications militaires

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

Pour représenter un bit ou un ensemble de bits on code la phase Φ_k de la porteuse pour $k \in [1, M]$ où $M = 2^n$ est le nombre d'états de phase possibles.

$$\text{BER} : P_e = Q\left(\frac{(a_1 - a_0)E_h}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right)$$

La distance minimale entre 2 symboles : $d_{min} = 2\sqrt{E_{sym}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$

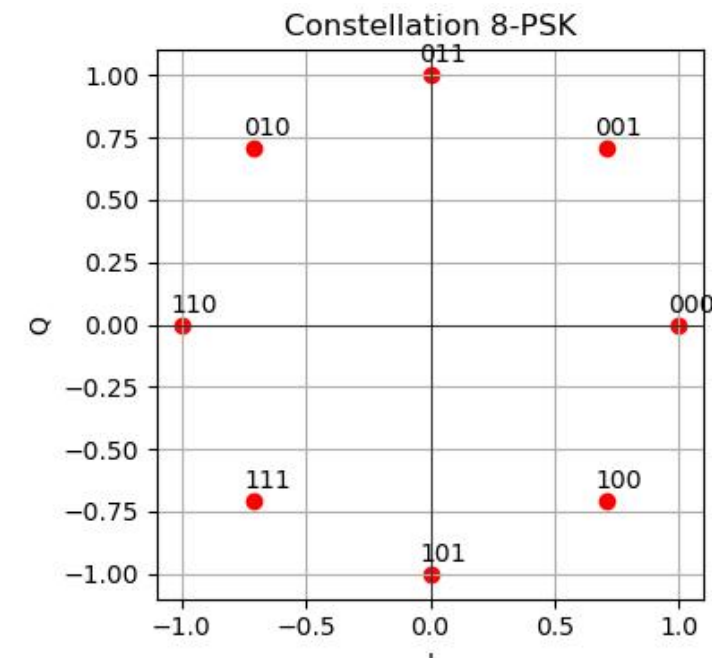
SER = Probabilité d'erreur à gauche + Probabilité d'erreur à droite $\rightarrow$

$$\text{SER} \approx 2 Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_b}\right) = 2 Q\left(\sqrt{\frac{2E_{sym}}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \text{ où } E_{sym} = E_b \log_2(M)$$

Avec un codage de Gray, une erreur de symbole entraîne généralement 1 bit erroné $\rightarrow \text{BER} \approx \frac{\text{SER}}{\log_2 M}$

$$\rightarrow \text{BER} \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2 M \cdot E_b}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

Pour une BPSK $\rightarrow \text{SER} = \text{BER} \approx Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$



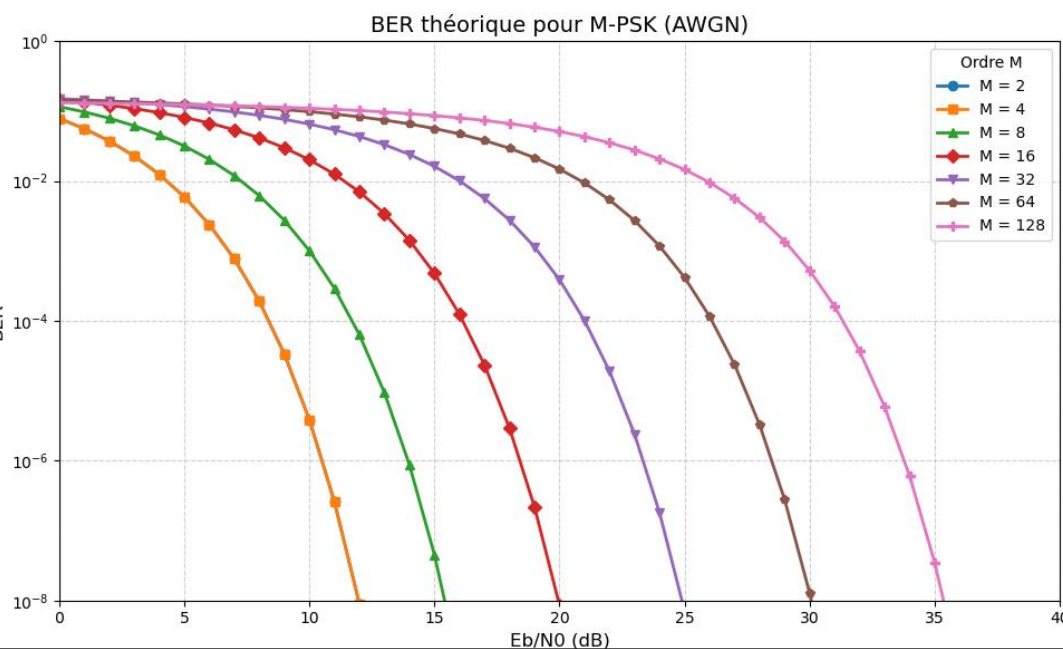
4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

$$BER : P_e = Q\left(\frac{(a_1 - a_0)E_h}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right)$$

$$\rightarrow P_e \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2 M E_b}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$



Modulation	Comportement du BER	Observations clés
M-ASK	- BER augmente rapidement avec M. - M=32, BER > 10⁻¹ même à E_b/N₀=20 dB.	- Très sensible au bruit pour M≥8 - Nécessite un $\frac{E_b}{N_0}$ élevé pour M grand. - Utilisée en bande de base (ex. ADSL).
M-PSK	- Performances stables pour M=2 (BPSK) et M=4 (QPSK). - BER dégrade fortement pour M≥8	- Robustesse moyenne au bruit. - Sensible aux erreurs de phase pour M≥8 - Idéale pour les canaux à puissance limitée (ex. satellites).
M-QAM	- Meilleur compromis débit/performance. - 16-QAM atteint BER= 10⁻⁵ pour E_b/N₀=15 dB.	- Efficacité spectrale élevée. - Nécessite un E_b/N₀ croissant avec M. - Standard pour la 4G/5G et le Wi-Fi (ex. 64-QAM).
M-FSK	- ER diminue avec M (grâce à l'orthogonalité). - Pour M=32, BER ≈ 10⁻⁵ à E_b/N₀=15 dB..	- Robustesse au bruit accrue avec M. - Faible efficacité spectrale. - Utilisée dans les canaux bruyants (ex. RFID, communications militaires).

QPSK (M=4) : BER environ 3 dB plus élevé que la BPSK

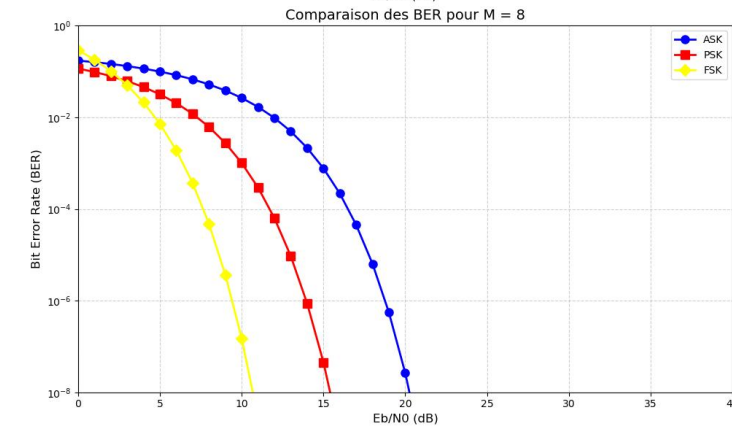
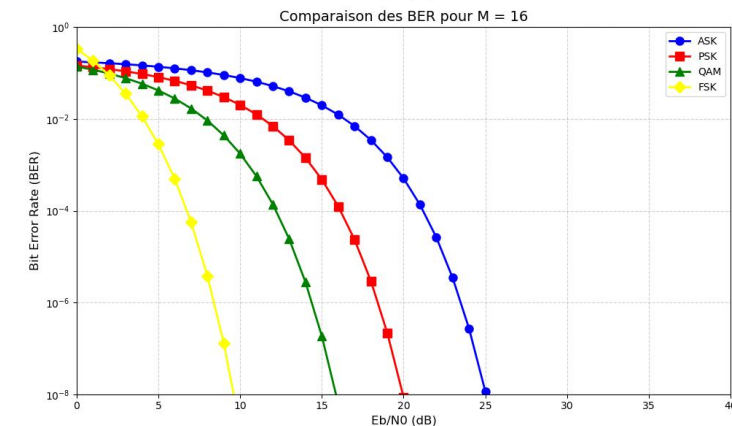
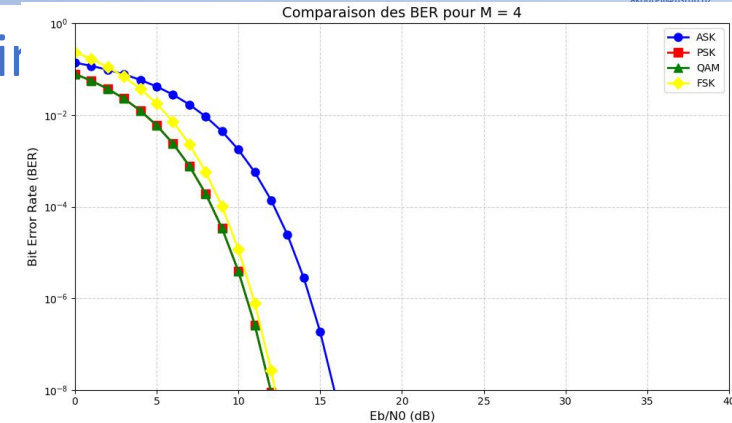
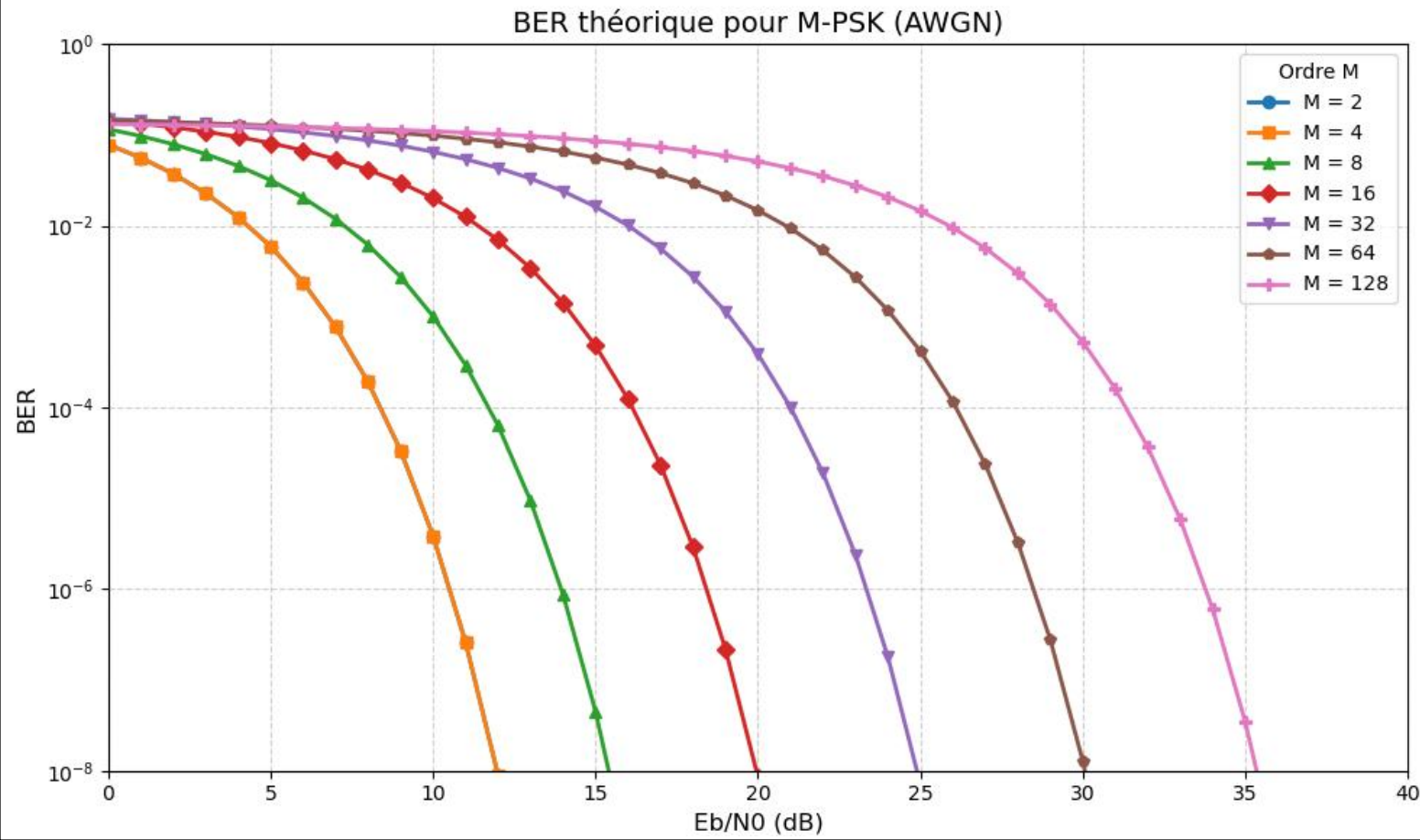
4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de phase MDP ou PSK (Phase Shift Keying)

$$\text{BER} : P_e = Q\left(\frac{(a_1 - a_0)E_h}{2\sigma_b}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(a_1 - a_0)^2 E_h}{2N_0}}\right)$$

$$\rightarrow P_e \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2 M E_b}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

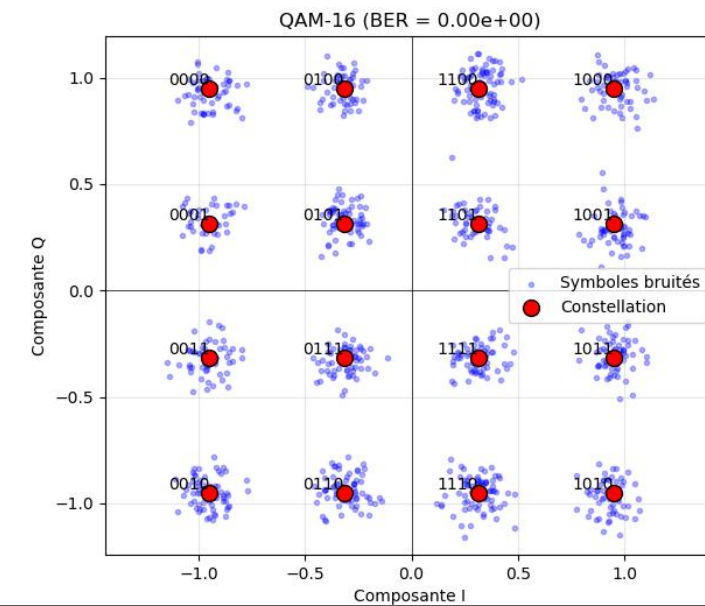
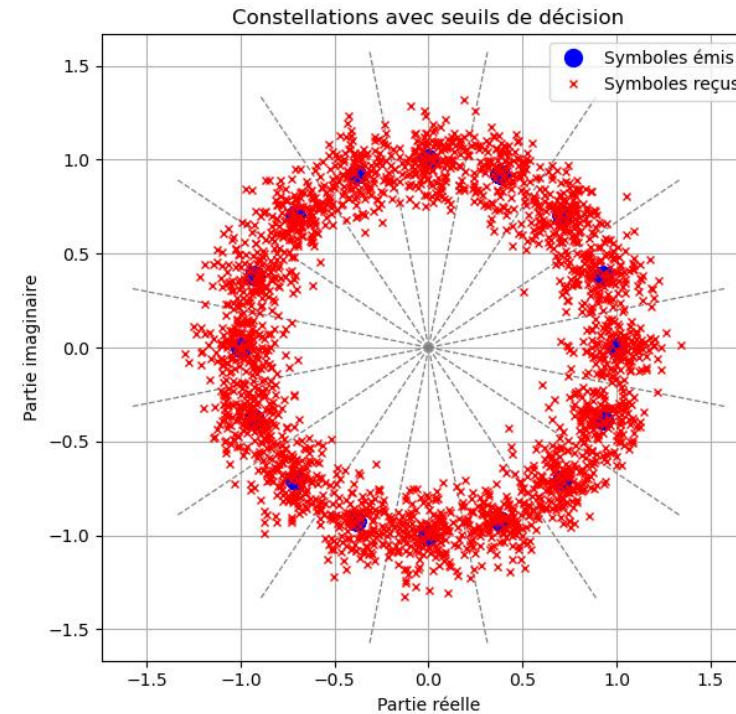
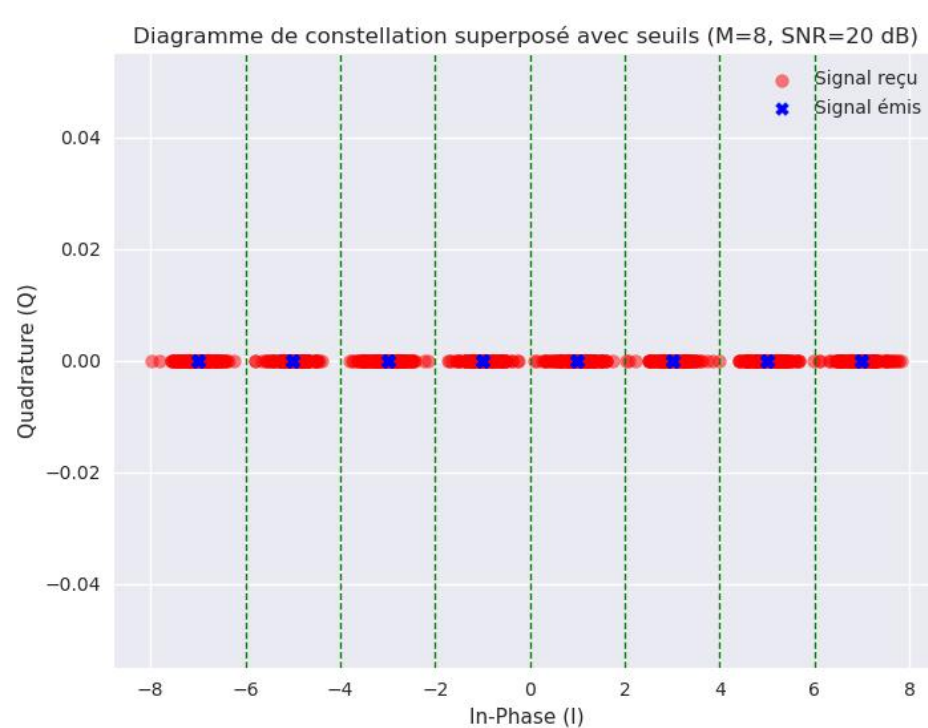


4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Lorsque le nombre de symboles devient grand (M), les modulations M-ASK et M-PSK ne sont plus satisfaisantes pour utiliser efficacement l'énergie émise : elles occupent un espace trop important.



- Points trop rapprochés → Risque de les confondre à la réception augmente.
- Points sont éloignés les uns des autres → Energie nécessaire pour générer le signal augmente.
- Répartir les symboles dans une zone la plus compacte tout en espaçant le plus possible les points → M-QAM

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

La QAM (modulation d'amplitude en quadrature) résulte de la composition de deux fréquences porteuses sinusoïdales déphasées l'une de l'autre de $\pi/2$. Du fait de cette orthogonalité, la détection (démodulation) s'en trouve facilitée.

Rappelons le schéma de principe de la modulation d'impulsion en amplitude est : $m(t) = A\sqrt{2} \sum_k a_k \cos(2\pi f_p t) h_e(t - kT)$

→ Ajouter un signal numérique modulant un sinus à la même fréquence $\sin(2\pi f_p t)$ ces deux signaux occupant le même spectre et sont facilement séparables à la démodulation (orthogonalité des porteuses).

→ Modulation des deux porteuses en quadrature (QAM) → $m(t) = A\sqrt{2} \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

○ Avec sa voie en sinus, la modulation QAM permet de passer **deux fois plus de données** que l'ASK classique pour une **même occupation spectrale** → $\int_0^{T_s} \cos(2\pi f_p t) \sin(2\pi f_p t) dt = 0$

A la réception, les deux composantes sont séparées par corrélation avec les porteuses de références → Ainsi, les deux canaux coexistent sans interférence.

- Son efficacité spectrale a été doublée.
- Quand la constellation est grande (M grand), elle peut consommer beaucoup de puissance.
- $M = 4, 16, 64, 256$ → Constellations carrés → voies I et Q peuvent être indépendantes.

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

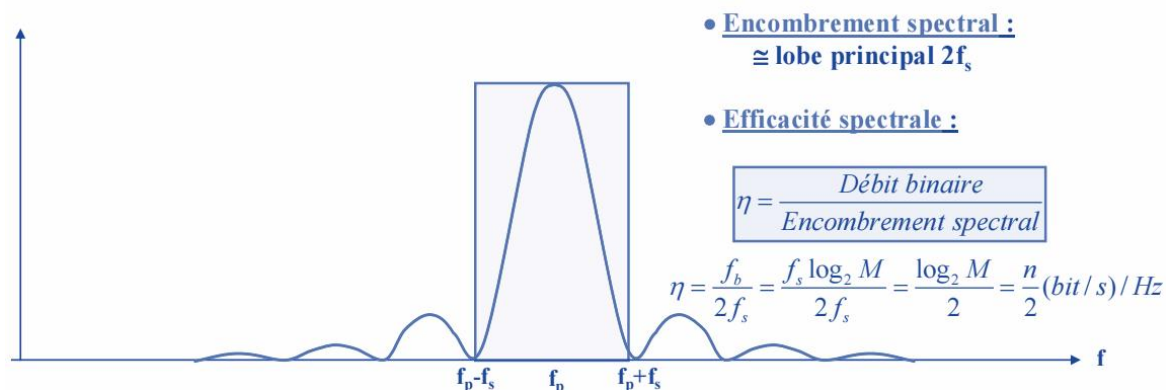
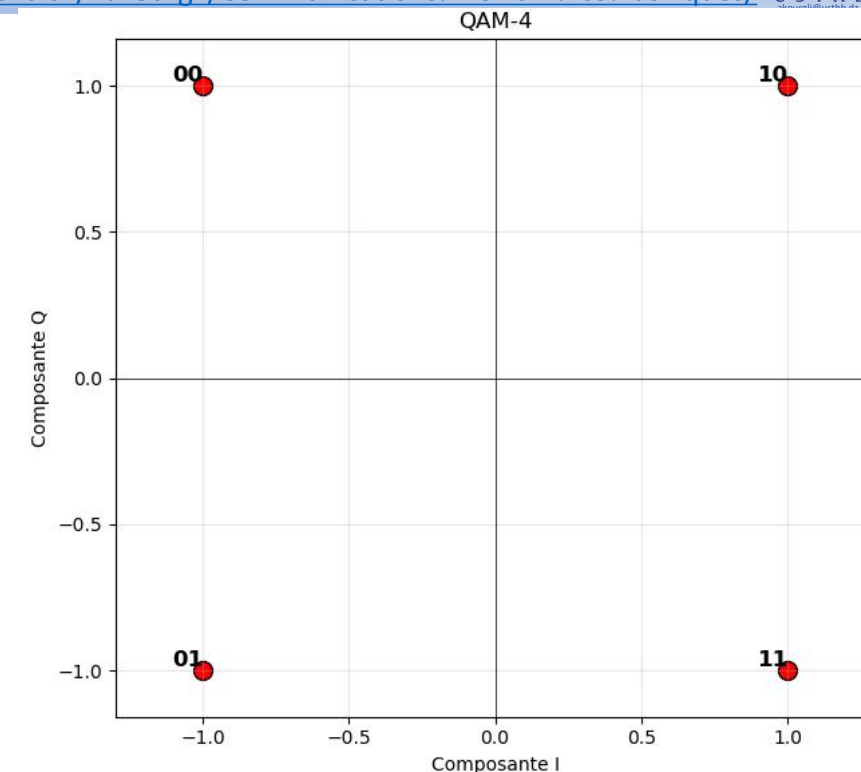
Signal modulé : $m(t) = A \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

Point de constellation : $A_k e^{j\Phi_k}$ où $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $\Phi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

Remarque

Les modulations PSK vues précédemment, peuvent être considérées, et réalisées, comme la modulation de deux porteuses I (en phase) et Q (en quadrature) par des symboles a_k et b_k respectivement.

$$m(t) = \underbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}_{i(t)} A \cos(2\pi f_p t) + \underbrace{\sum_k b_k h_e(t - kT)}_{q(t)} A \sin(2\pi f_p t) \rightarrow \text{Signaux en bande de base}$$



4. Modulation numérique à bande étroite

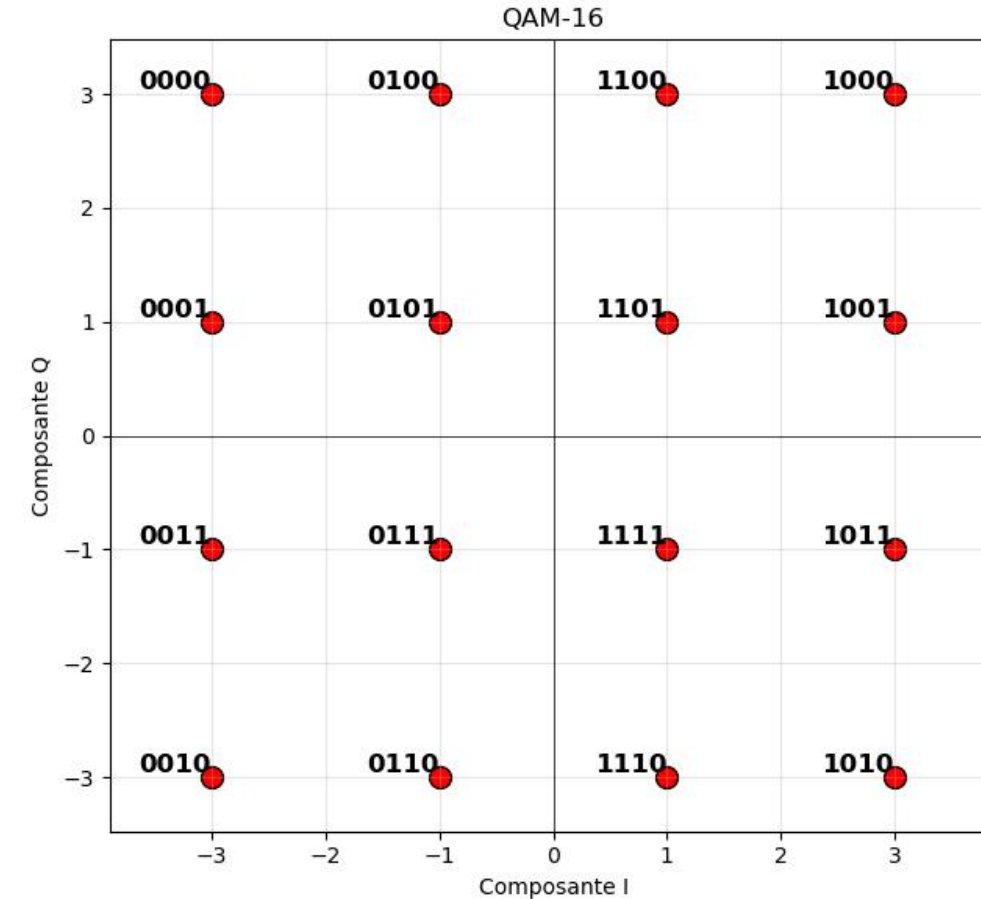
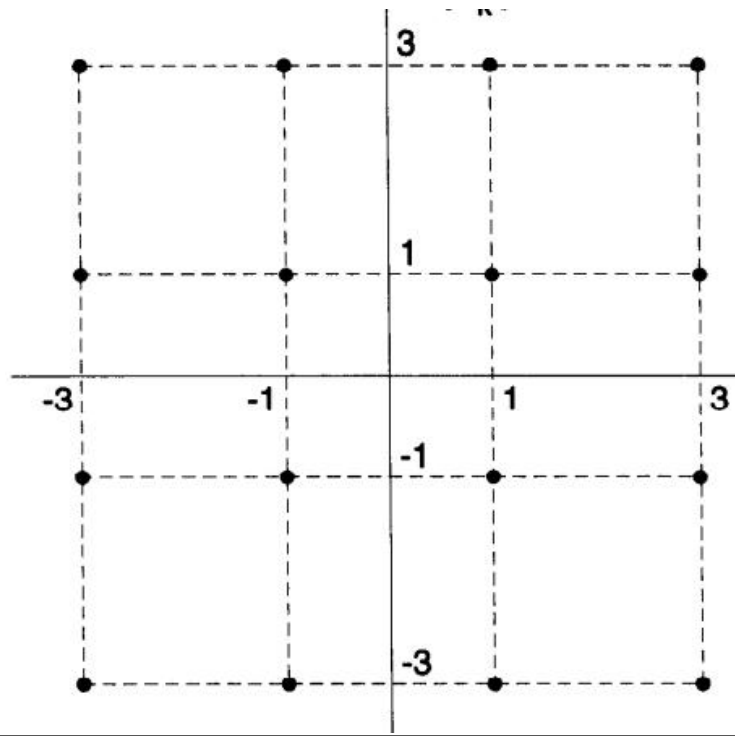
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Signal modulé : $m(t) = A \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

Point de constellation : $A_k e^{j\Phi_k}$ où $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $\Phi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

$$m(t) = \underbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}_{i(t)} A \cos(2\pi f_p t) + \underbrace{\sum_k b_k h_e(t - kT)}_{q(t)} A \sin(2\pi f_p t)$$



Chaque groupe de 4 bits ($b_3 b_2 b_1 b_0$) est divisé en deux groupes de 2 bits :

- 2 premiers bits ($b_3 b_2$) → Composante I.
- 2 derniers bits ($b_1 b_0$) → Composante Q

Le codage de Gray est utilisé pour minimiser les erreurs binaires (adjacents diffèrent d'un seul bit).

4. Modulation numérique à bande étroite

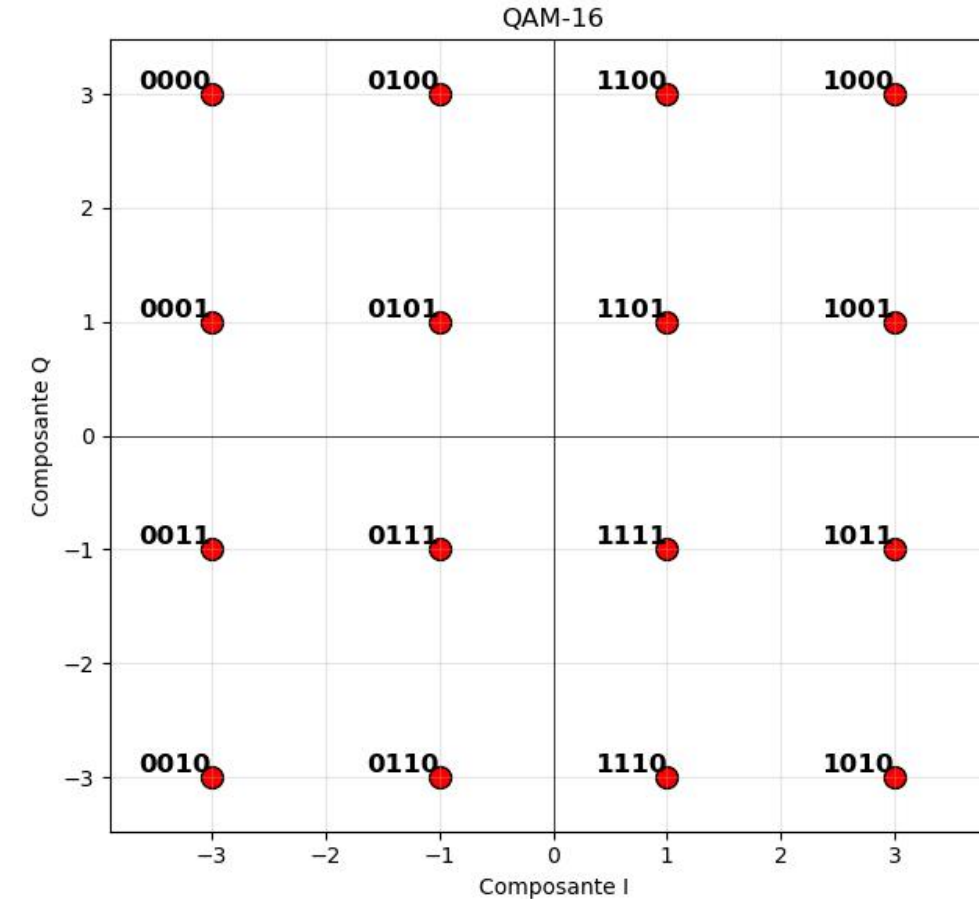
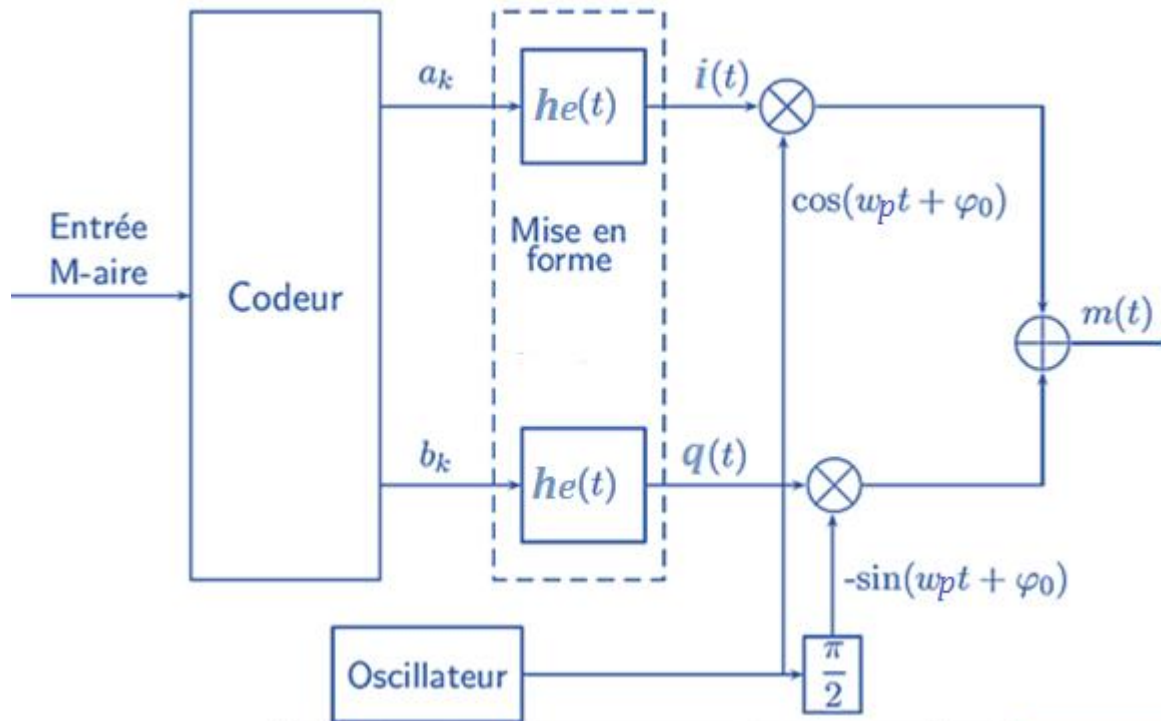
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Signal modulé : $m(t) = A \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

Point de constellation : $A_k e^{j\Phi_k}$ où $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $\Phi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

$$m(t) = \underbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}_{i(t)} A \cos(2\pi f_p t) + \underbrace{\sum_k b_k h_e(t - kT)}_{q(t)} A \sin(2\pi f_p t)$$



Bits ($b_3 b_2$)	Valeur I	Bits ($b_1 b_0$)	Valeur Q
00	-3	00	-3
01	-1	01	-1
11	+1	11	+1
10	+3	10	+3

4. Modulation numérique à bande étroite

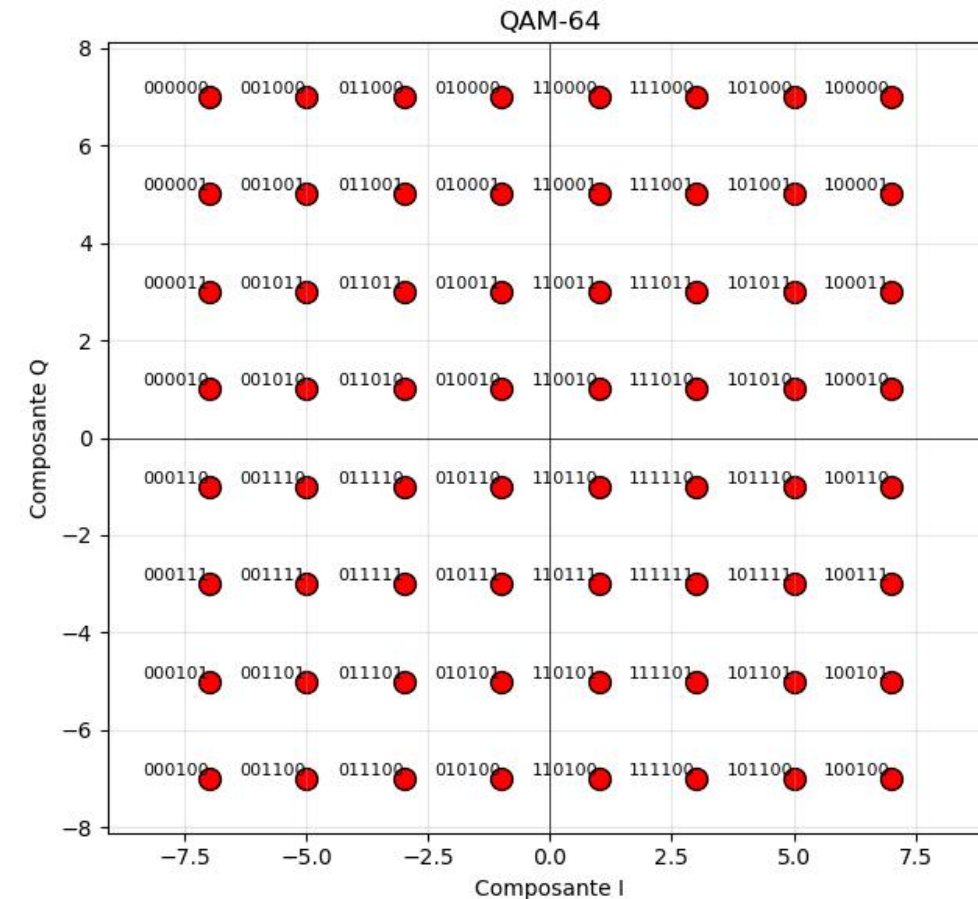
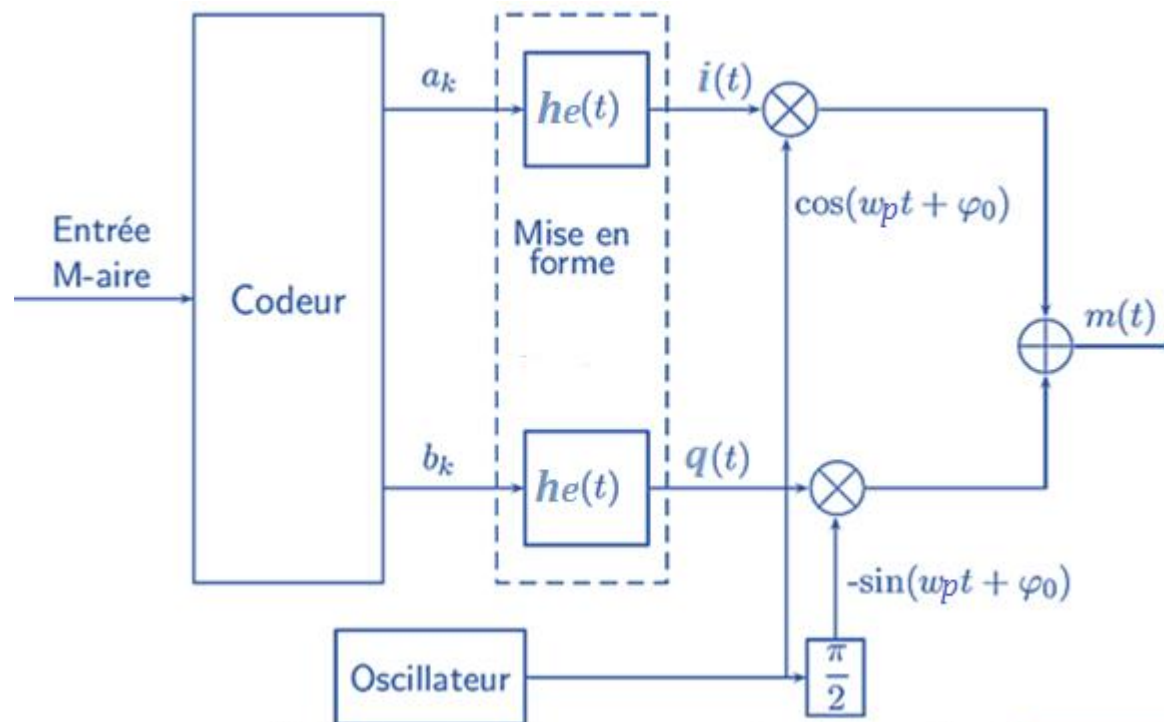
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Signal modulé : $m(t) = A \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

Point de constellation : $A_k e^{j\Phi_k}$ où $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $\Phi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

$$m(t) = \underbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}_{i(t)} A \cos(2\pi f_p t) + \underbrace{\sum_k b_k h_e(t - kT)}_{q(t)} A \sin(2\pi f_p t)$$



Les étiquettes $b_5 b_4 b_3(I)$, $b_2 b_1 b_0(Q)$ suivent le code gray.

- 32-QAM (symboles constitués de 5 bits),
- 64-QAM (symboles constitués de 6 bits),
- 128-QAM (symboles constitués de 7 bits),
- 256-QAM (symboles constitués de 8 bits = octets).

4. Modulation numérique à bande étroite

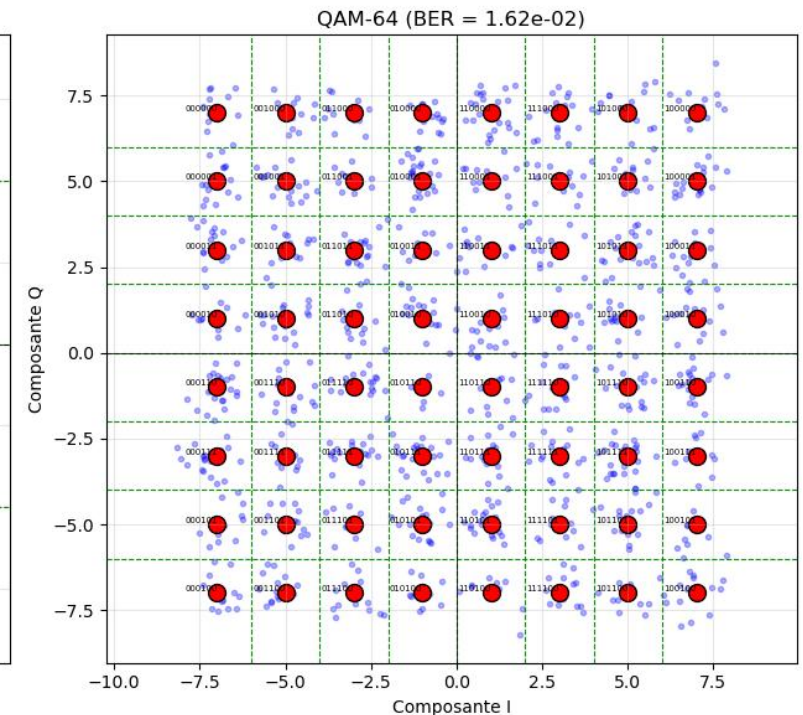
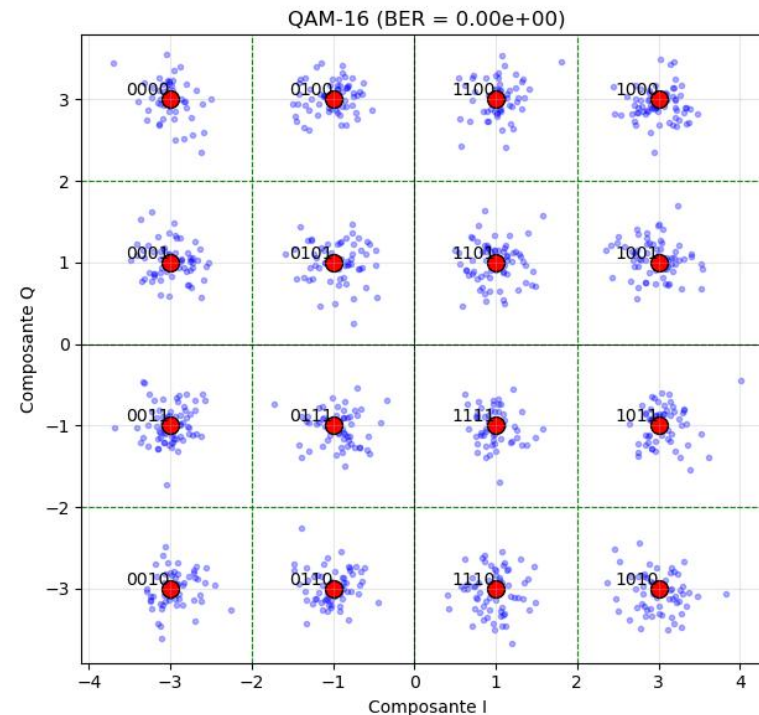
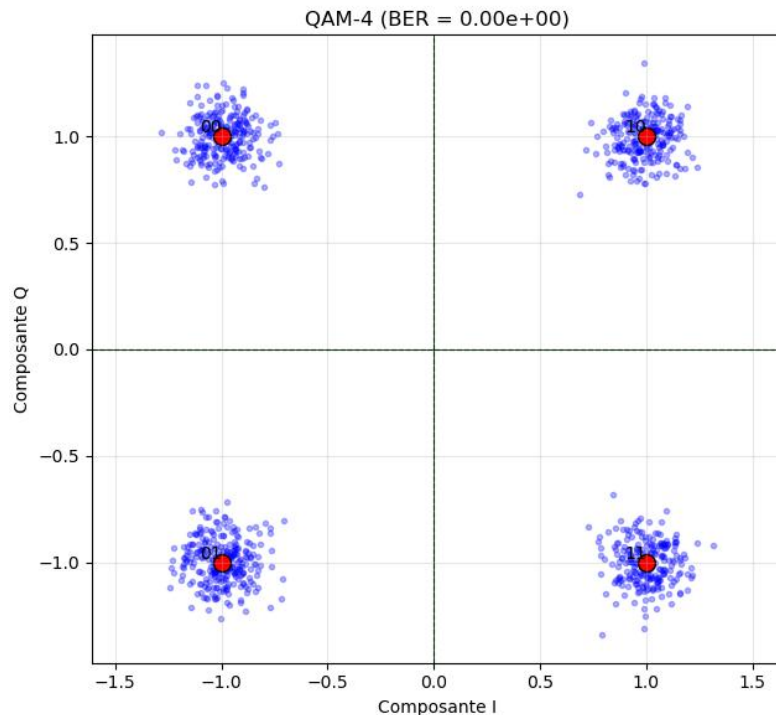
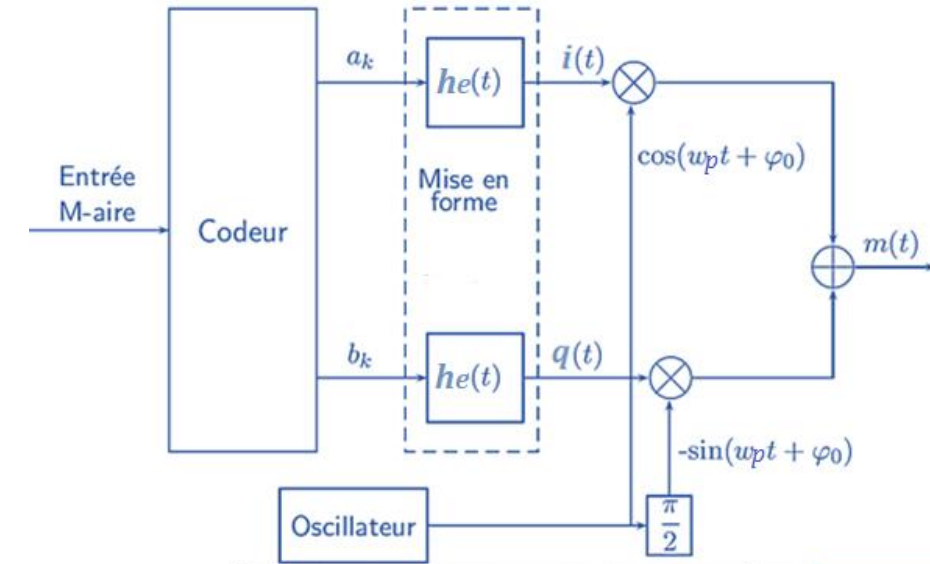
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Signal modulé : $m(t) = A \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

Point de constellation : $A_k e^{j\Phi_k}$ où $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $\Phi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

$$m(t) = \underbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}_{i(t)} A \cos(2\pi f_p t) + \underbrace{\sum_k b_k h_e(t - kT)}_{q(t)} A \sin(2\pi f_p t)$$



4. Modulation numérique à bande étroite

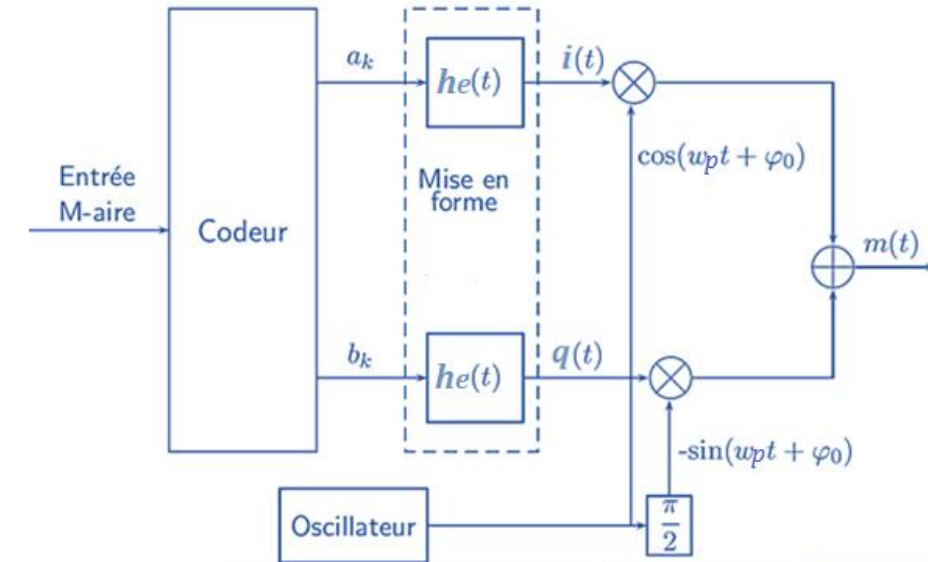
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Signal modulé : $m(t) = A \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

Point de constellation : $A_k e^{j\Phi_k}$ où $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $\Phi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

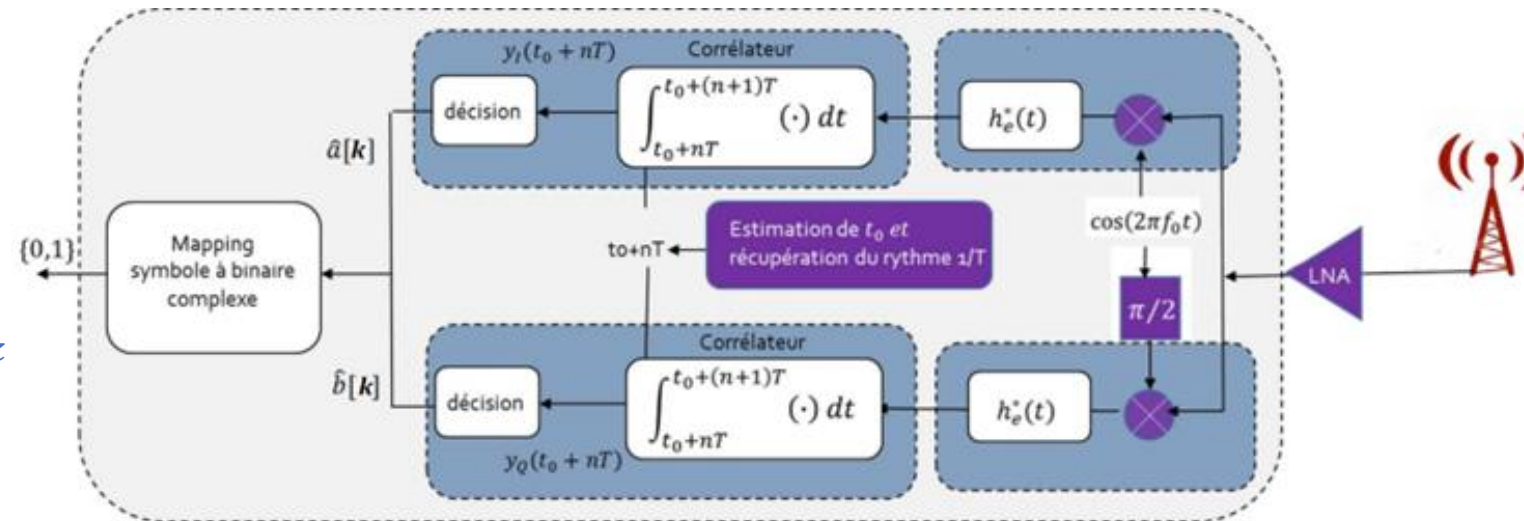
$$m(t) = \underbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}_{i(t)} A \cos(2\pi f_p t) + \underbrace{\sum_k b_k h_e(t - kT)}_{q(t)} A \sin(2\pi f_p t)$$



Démodulation M-QAM

Même principe que la démodulation M-PSK.

- Multiplication par les porteuses
- Filtrage adapté $g_r(t) = h_e^*(-t)$
- Echantillonnage
- Comparaison aux seuils → Détection de a_k et b_k



4. Modulation numérique à bande étroite

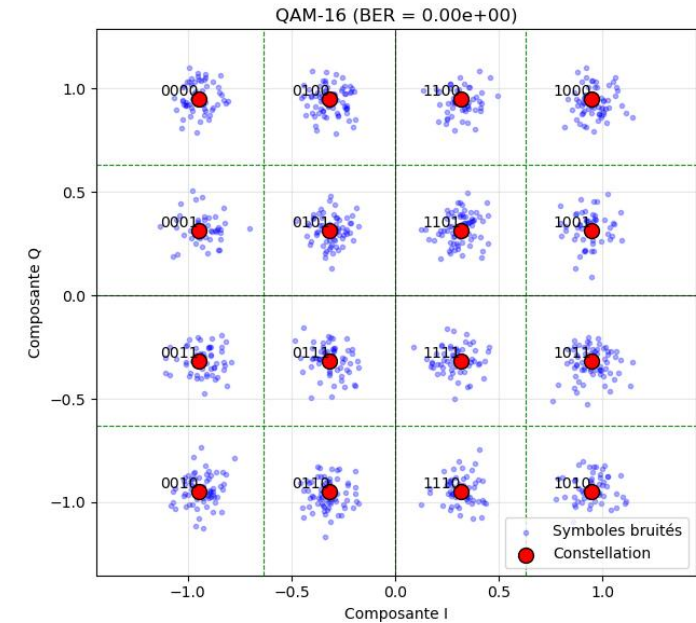
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Signal modulé : $m(t) = A \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

Point de constellation : $A_k e^{j\Phi_k}$ où $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $\Phi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

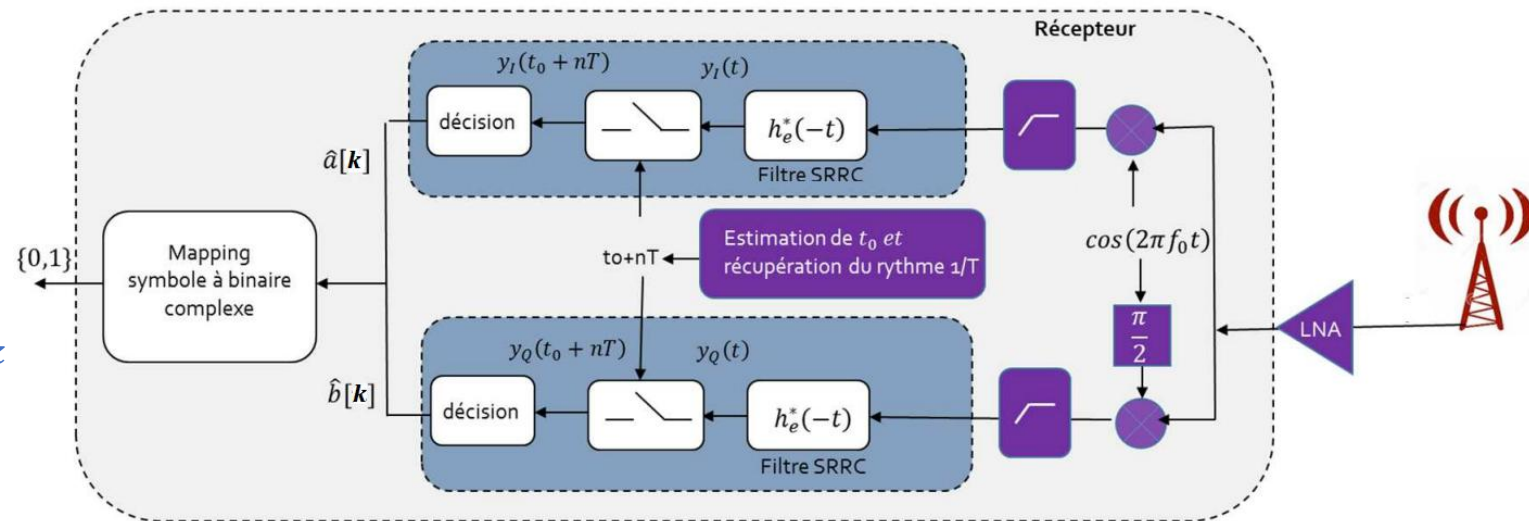
$$m(t) = \underbrace{\sum_k a_k h_e(t - kT)}_{i(t)} A \cos(2\pi f_p t) + \underbrace{\sum_k b_k h_e(t - kT)}_{q(t)} A \sin(2\pi f_p t)$$



Démodulation M-QAM

Même principe que la démodulation M-PSK.

- Multiplication par les porteuses
- Filtrage adapté $g_r(t) = h_e^*(-t)$
- Echantillonnage
- Comparaison aux seuils → Détection de a_k et b_k



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Une M-QAM ($M = L^2$) est l'équivalent être considérés comme deux systèmes M-ASK avec des constellations de signaux de taille L transmis sur les composantes de signal en phase et en quadrature, chacune avec la moitié de l'énergie du système M-QAM d'origine.

Rappel : Pour une M-ASK $\rightarrow BER \approx \frac{2(M-1)}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M \cdot E_b}{(M^2-1) N_0}} \right) \rightarrow SER \approx \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6 E_{sym}}{(M^2-1) N_0}} \right)$ où $E_{sym} = E_b \log_2(M)$

M-QAM $\rightarrow SER_{i(t),q(t)} \approx \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{3 E_{sym}}{(M-1) N_0}} \right)$ pour M-QAM $\rightarrow BER \approx \frac{4}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot E_b}{(M-1) N_0}} \right)$

Remarque

- Probabilité d'erreur : Il faut respecter une distance minimale entre les points des symboles $\rightarrow$ La probabilité d'erreur est inversement proportionnelle à cette distance.
- Energie : Pour chacun des symboles de la constellation, la distance entre un point et l'origine est proportionnelle à la racine carrée de l'énergie nécessaire pour émettre ce symbole pendant l'intervalle de temps $[k T, (k + 1) T]$.

Compromis entre éloigner les symboles au maximum pour diminuer la probabilité d'erreur et les rapprocher de l'origine pour minimiser l'énergie nécessaire à la transmission.

En outre, il faut viser :

- Une faible occupation spectrale du signal modulé.
- Une simplicité de réalisation de l'émetteur et du récepteur

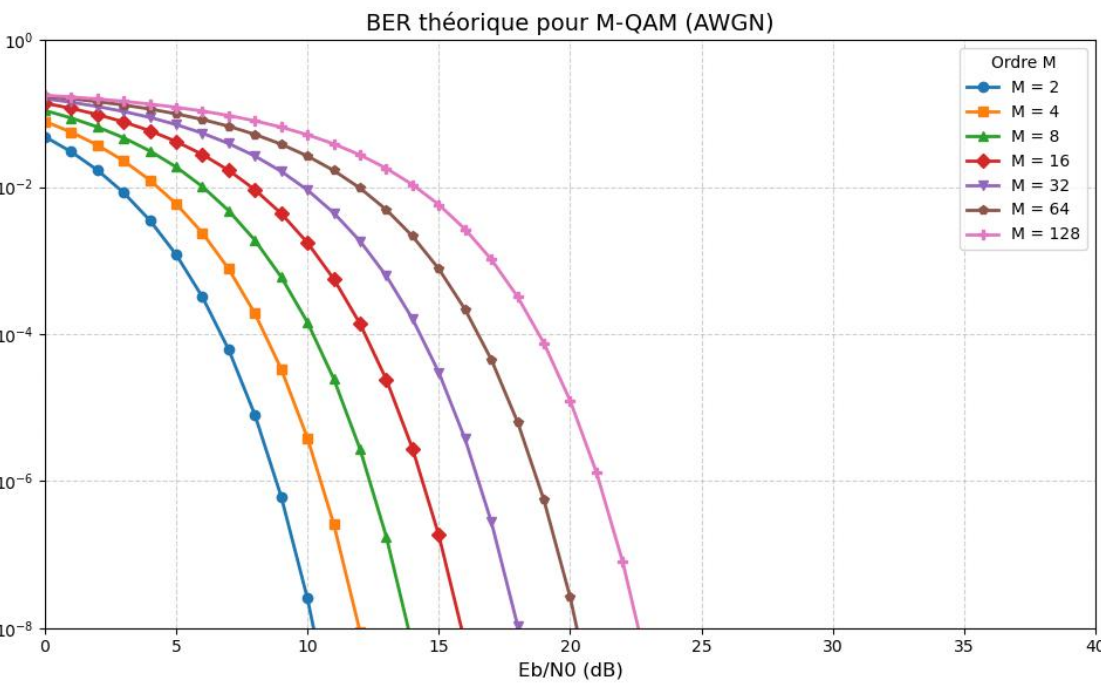
4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

Signal modulé : $m(t) = A \sum_k [a_k \cos(2\pi f_p t) + b_k \sin(2\pi f_p t)] h_e(t - kT)$

BER : $P_e \approx \frac{4}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot E_b}{(M-1) N_0}}\right)$

Applications



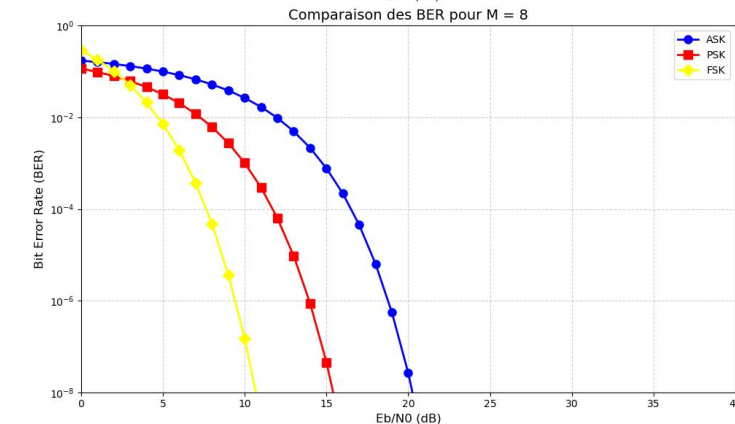
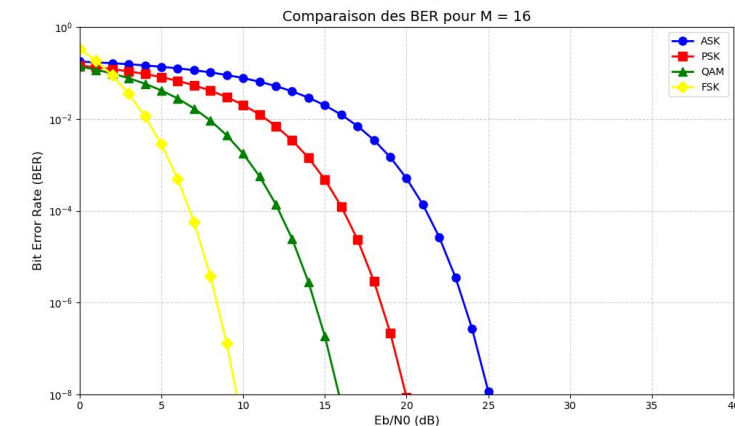
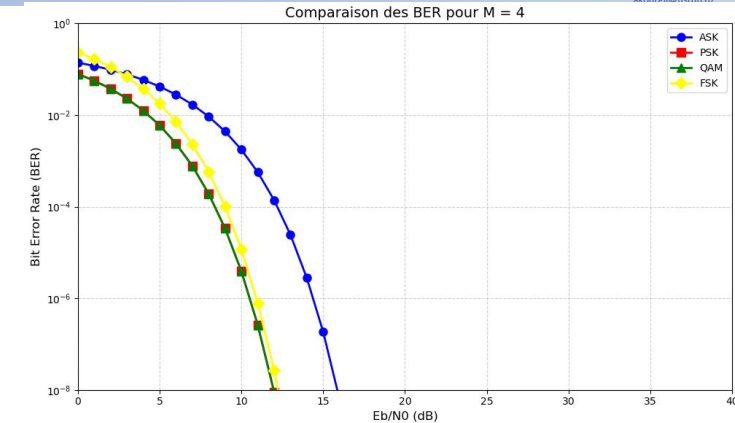
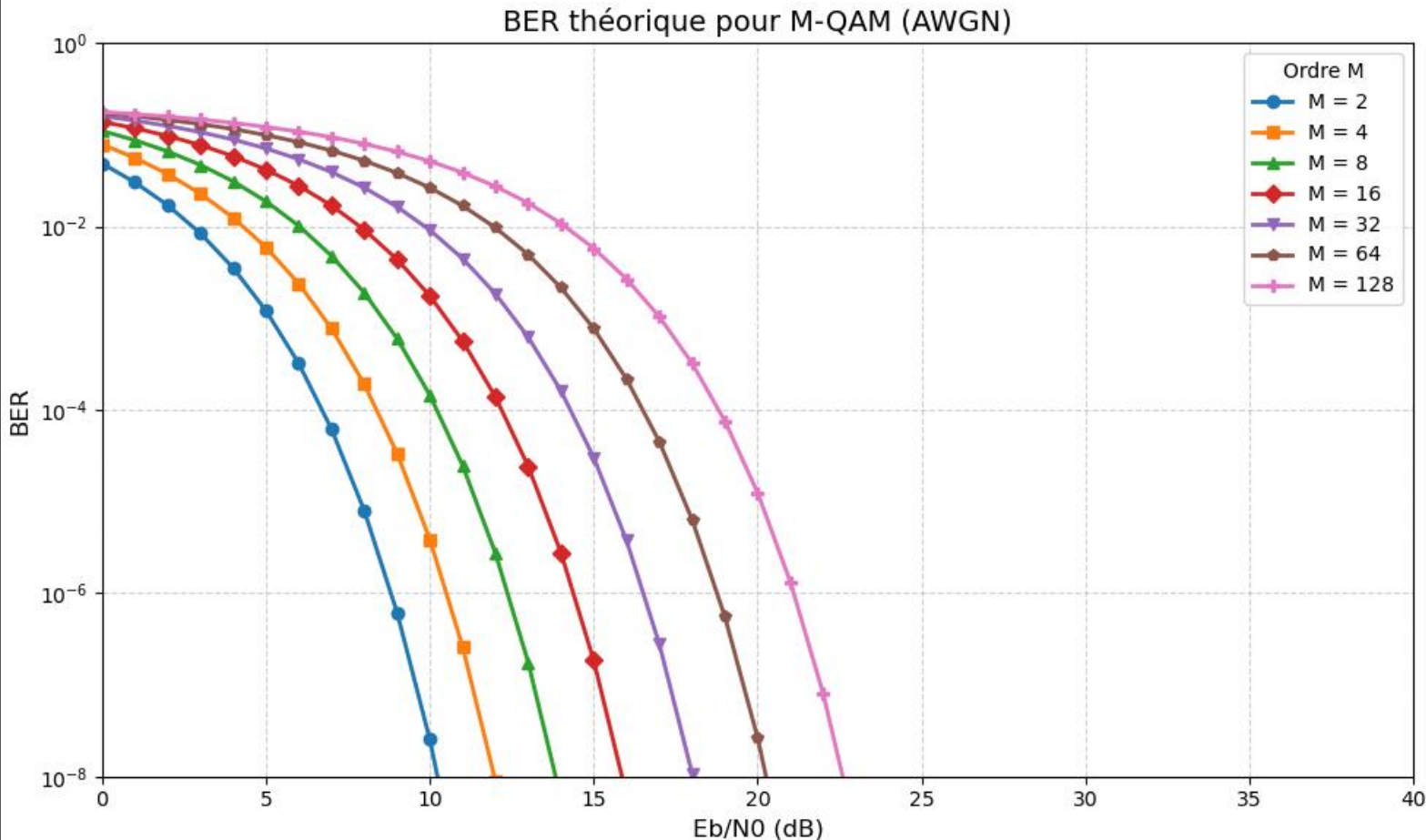
Modulation	Comportement du BER	Observations clés
M-ASK	- BER augmente rapidement avec M. M=32, BER > 10 ⁻¹ même à E _b /N ₀ =20 dB.	- Très sensible au bruit pour M≥8 - Nécessite un $\frac{E_b}{N_0}$ élevé pour M grand. - Utilisée en bande de base (ex. ADSL).
M-PSK	- Performances stables pour M=2 (BPSK) et M=4 (QPSK). - BER dégrade fortement pour M≥8	- Robustesse moyenne au bruit. - Sensible aux erreurs de phase pour M≥8 - Idéale pour les canaux à puissance limitée (ex. satellites).
M-QAM	- Meilleur compromis débit/performance. 16-QAM atteint BER= 10 ⁻⁵ pour E _b /N ₀ =15 dB.	- Efficacité spectrale élevée. - Nécessite un E _b /N ₀ croissant avec M. - Standard pour la 4G/5G et le Wi-Fi (ex. 64-QAM).
M-FSK	- BER diminue avec M (grâce à l'orthogonalité). - Pour M=32, BER ≈ 10 ⁻⁵ à E _b /N ₀ =15 dB..	- Robustesse au bruit accrue avec M. - Faible efficacité spectrale. - Utilisée dans les canaux bruyants (ex. RFID, communications militaires).

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation d'amplitude en quadrature à M états M-QAM

$$\text{BER} : P_e \approx \frac{4}{\log_2 M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot E_b}{(M-1) N_0}} \right)$$



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

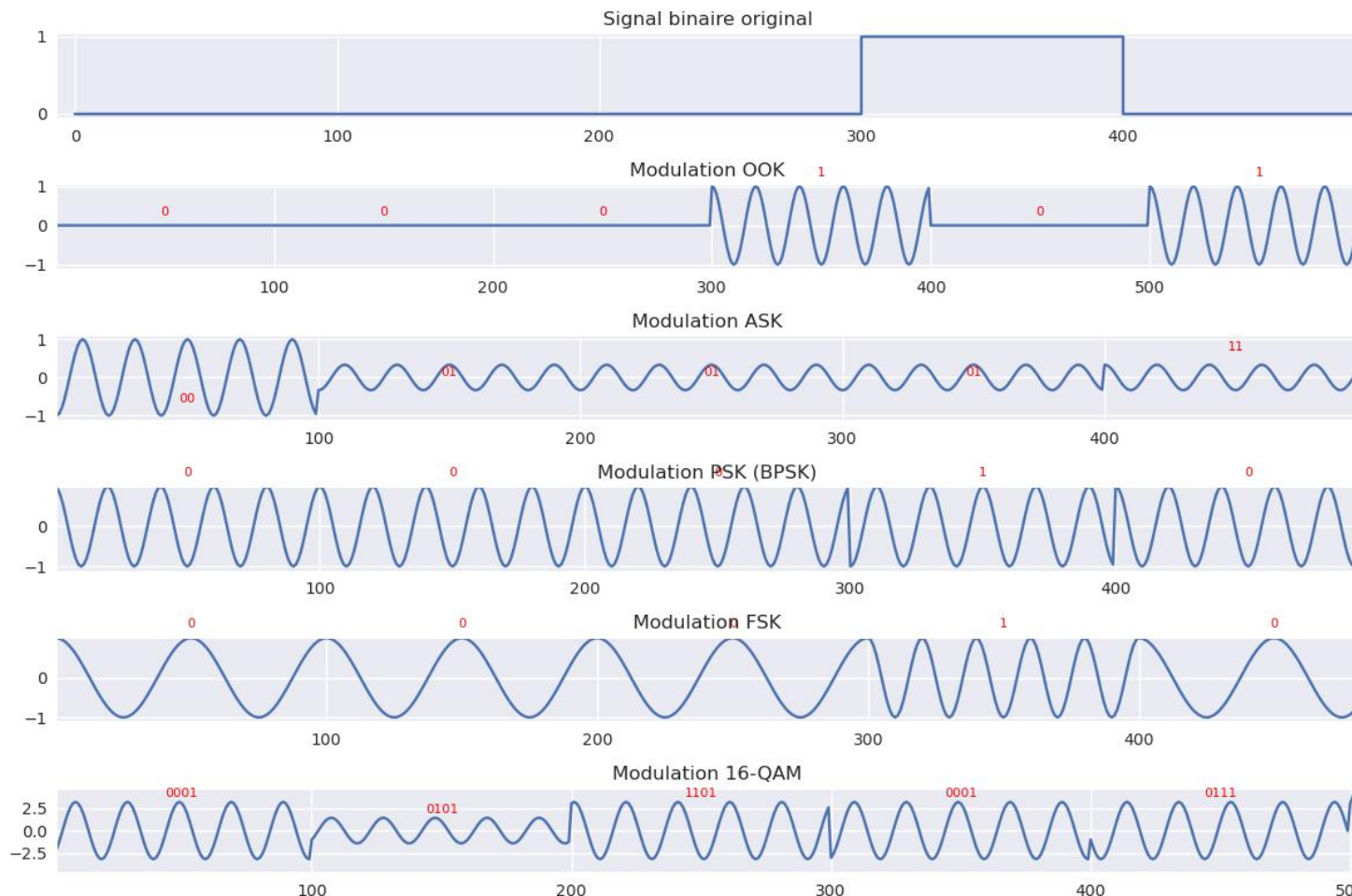
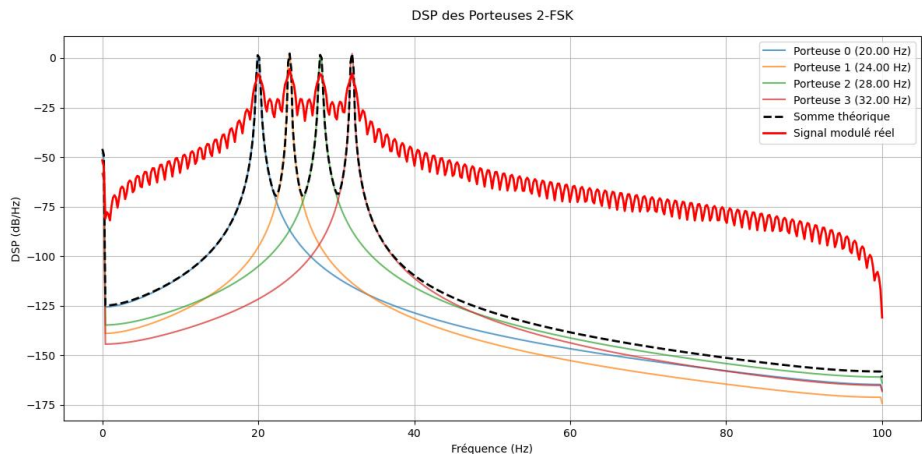
Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$

Une modulation FSK est définie par:

- $f_p = \frac{f_1 + f_0}{2}$ fréquence centrale du spectre FSK
- $\delta_f = \frac{|f_1 - f_0|}{2}$ excursion en fréquence
- $f_B = \frac{1}{T_B}$ débit binaire

Contrairement aux modulations de type ASK et PSK, les ondes $i(t)$ et $q(t)$ ne sont pas constantes pendant la durée de transmission d'un bit.



4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

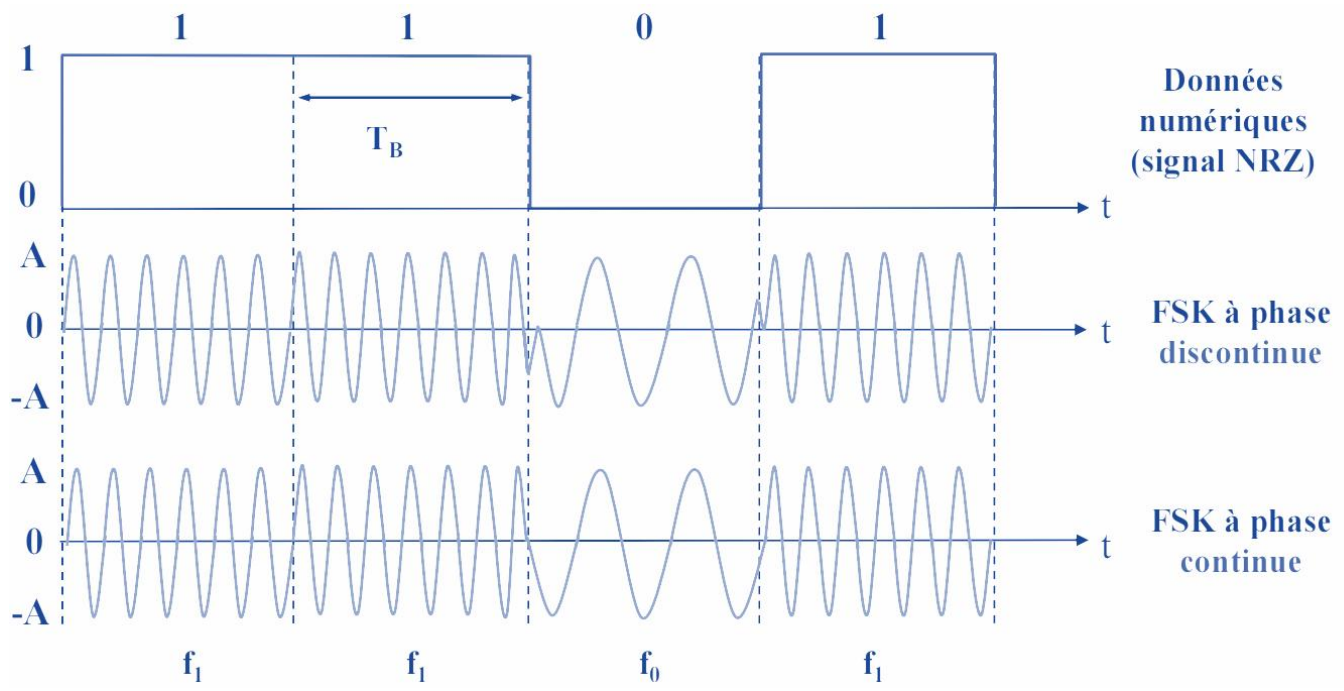
à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$

Une modulation FSK est définie par:

- $f_p = \frac{f_1 + f_0}{2}$ fréquence centrale du spectre FSK
- $\delta_f = \frac{|f_1 - f_0|}{2}$ excursion en fréquence
- $f_B = \frac{1}{T_B}$ débit binaire

On distingue deux types de FSK :

- DP-FSK à phase discontinue (spectre plus large)
- CP-FSK à phase continue (Robustesse aux perturbations et adaptée aux canaux à bande limitée).



Caractéristiques M-FSK

- Moins sensible au bruit que l'ASK
- Bande passante plus large que l'ASK en théorie
- Utilisation : Satellites et communications longue distance (ex. LoRa en mode FSK), Protocoles IoT (Sigfox, certaines versions de Zigbee), GMSK= modulation sophistiquée utilisée pour le GSM.

La GMSK (utilisée en GSM) combine la CP-FSK avec un filtrage gaussien pour optimiser l'efficacité spectrale.

4. Modulation numérique à bande étroite

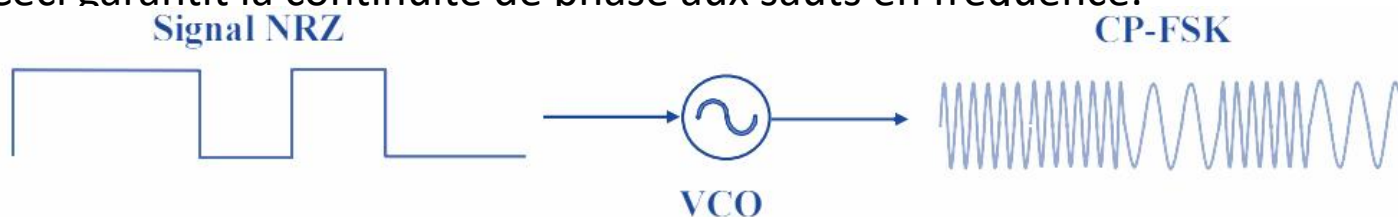
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$

M-FSK à phase continue (CP-FSK)

Cette condition est réalisée en utilisant un oscillateur unique, dont on peut moduler la fréquence. Ainsi, f_1 et f_0 sont issues d'un même VCO piloté par le signal NRZ des données. Ceci garantit la continuité de phase aux sauts en fréquence.



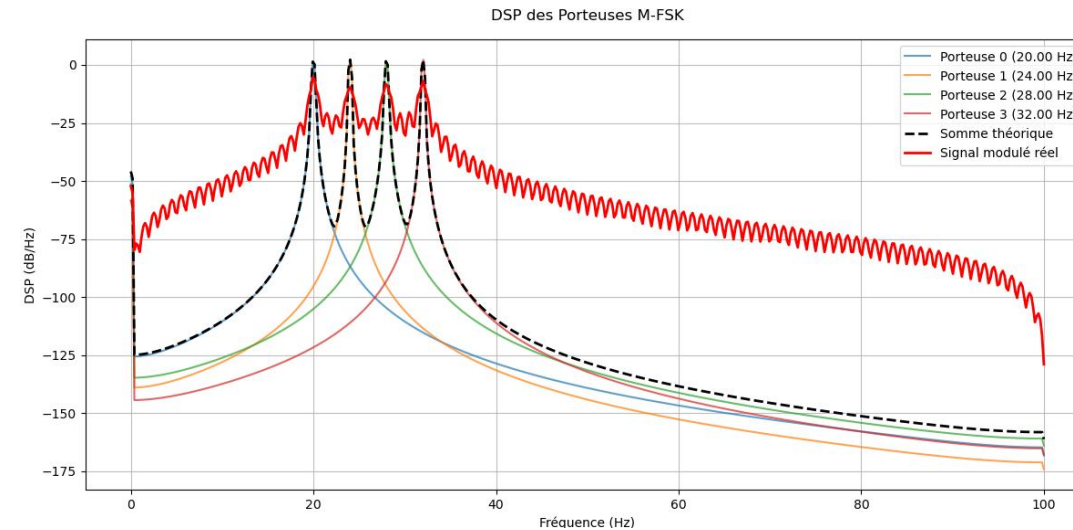
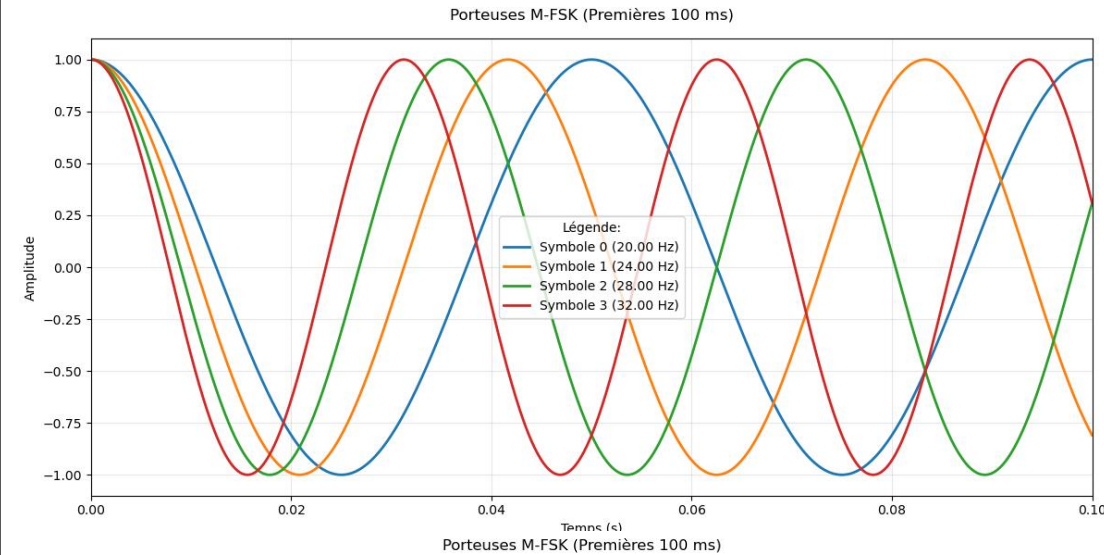
La tension de sortie, en format NRZ, est représentative du symbole à transmettre. Cette tension module en effet un oscillateur commandé en tension (VCO).

4. Modulation numérique à bande étroite

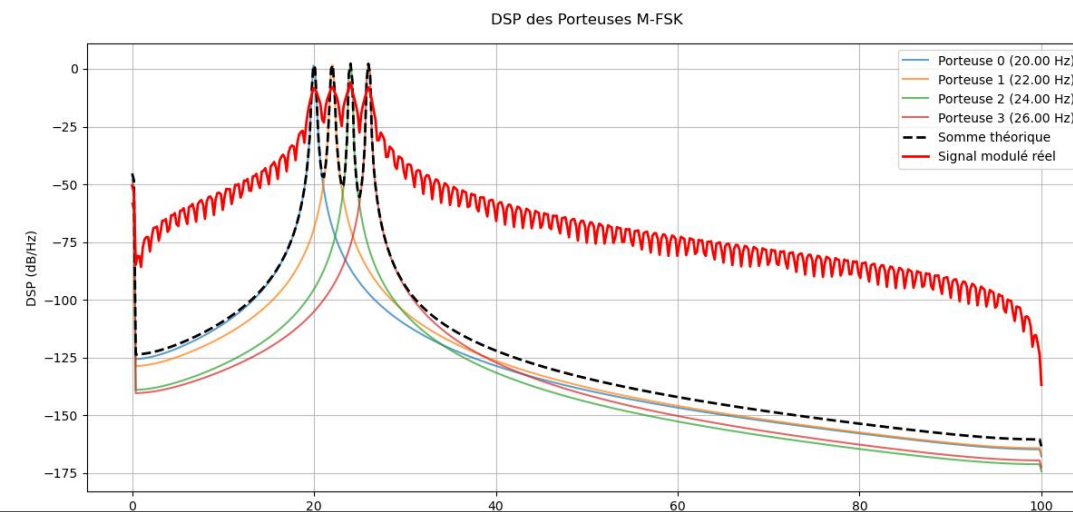
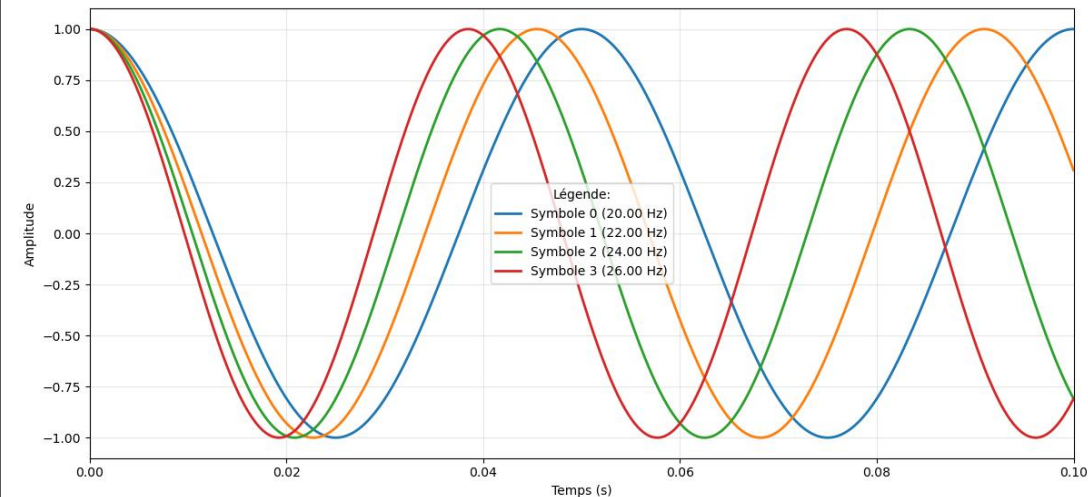
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence CP-FSK

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$



$$\delta_f = 4/T_B$$



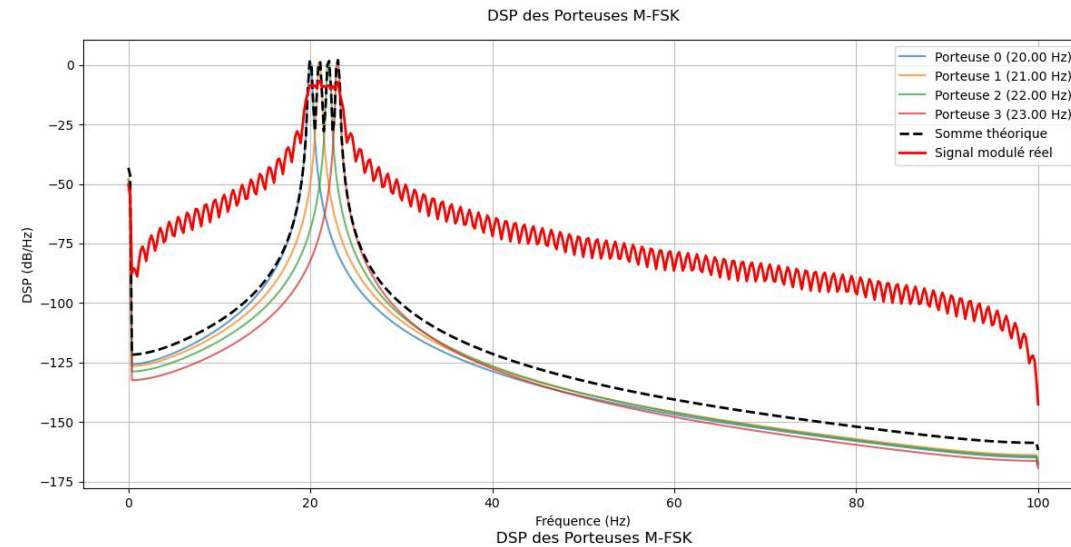
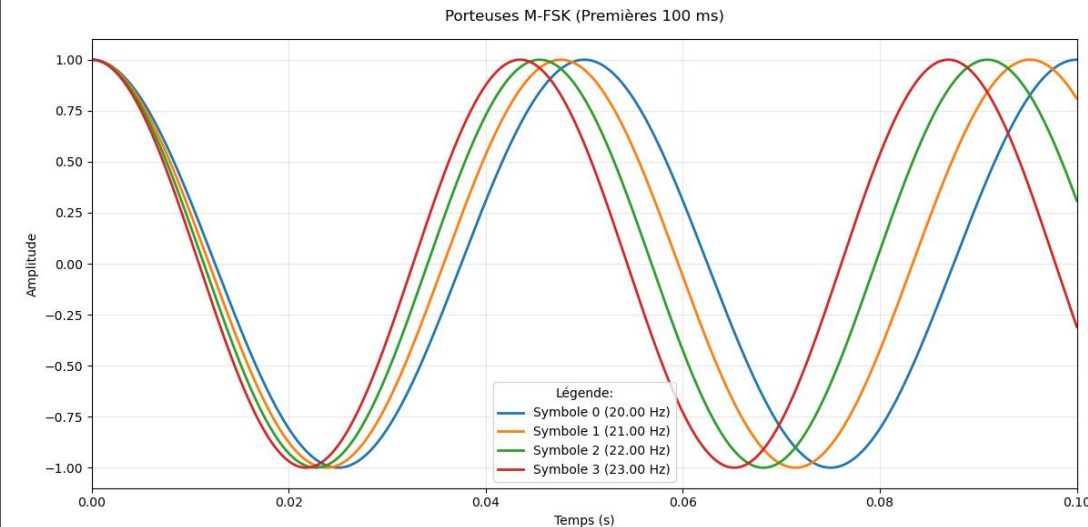
$$\delta_f = 2/T_B$$

4. Modulation numérique à bande étroite

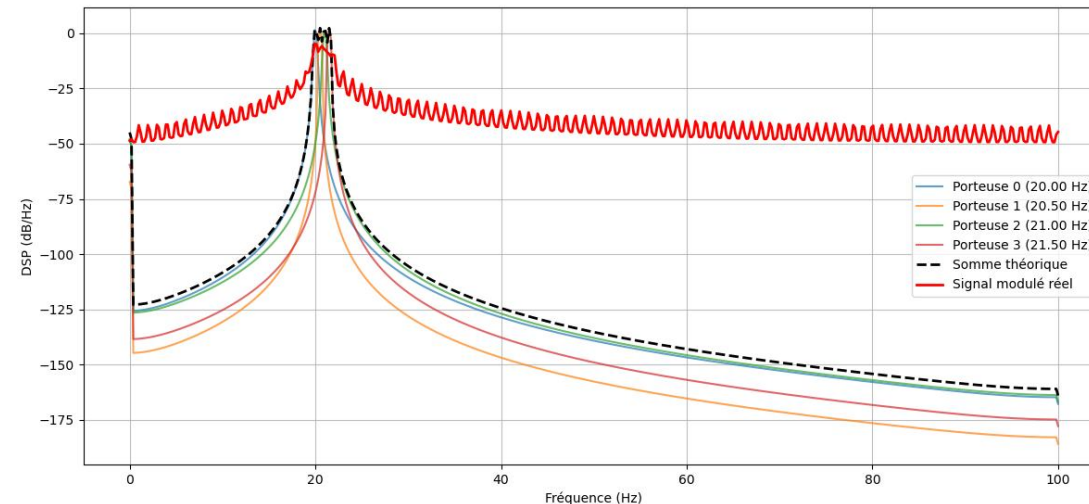
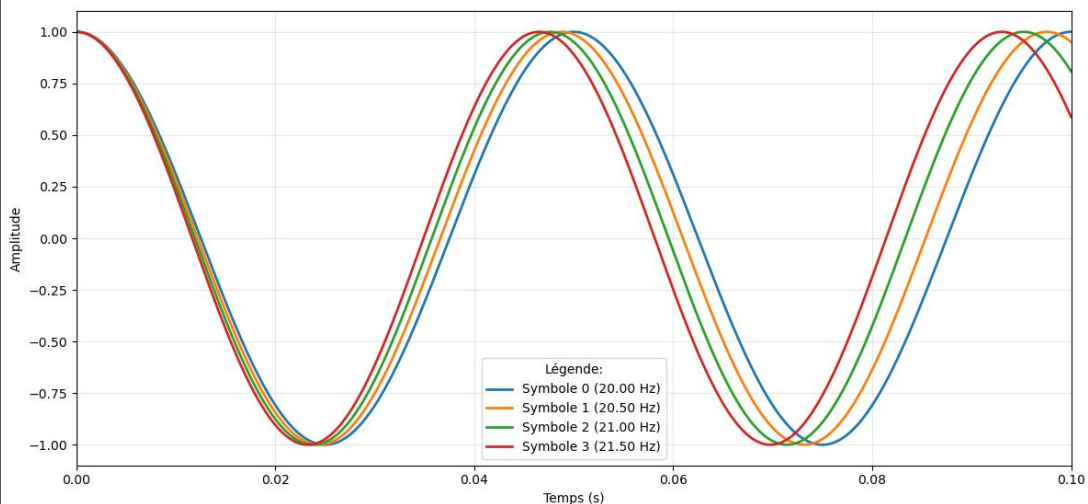
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence CP-FSK

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$



$$\delta_f = 1/T_B$$



$$\delta_f = 1/2T_B$$

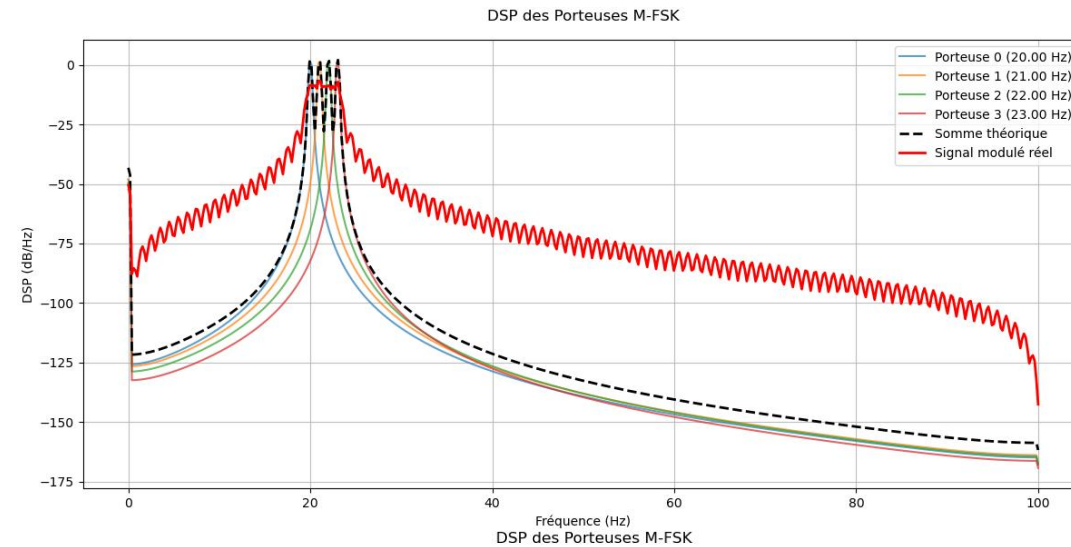
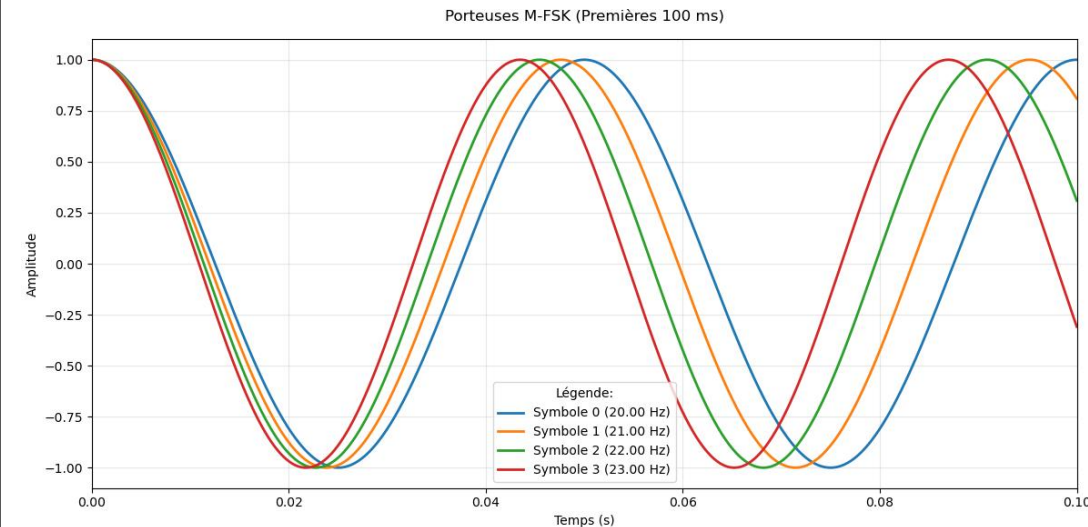
→ MSK (Minimum Shift Keying)

4. Modulation numérique à bande étroite

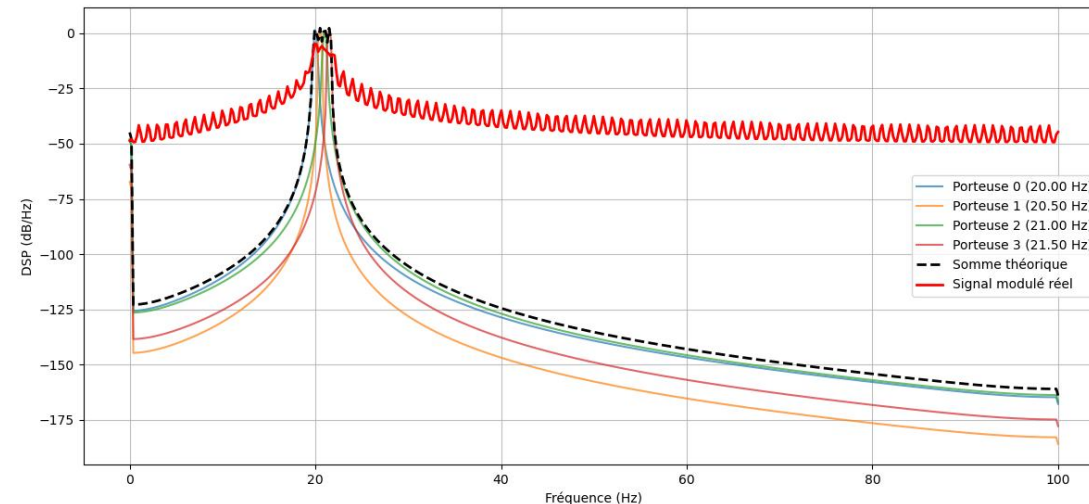
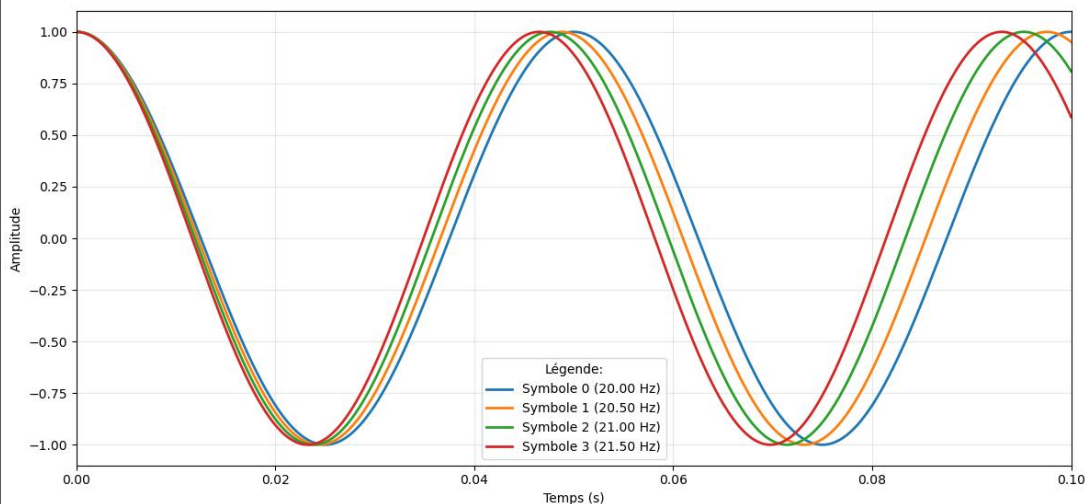
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence CP-FSK

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$



$$\delta_f = 1/T_B$$



$$\delta_f = 1/2T_B$$

→ MSK (Minimum Shift Keying)

4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$ où $\delta_f = \frac{|f_1 - f_0|}{2}$

MSK (Minimum Shift Keying)

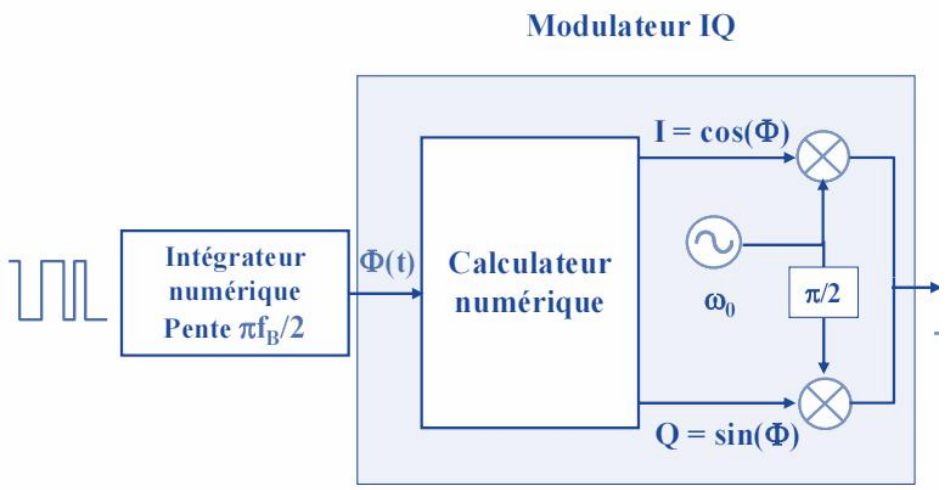
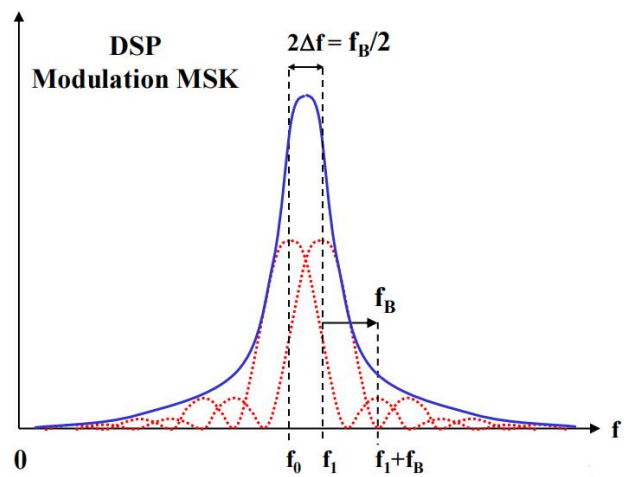
La modulation MSK est le cas particulier de FSK où l'intervalle entre f_1 et f_0 est minimum $\rightarrow h = \frac{f_1 - f_0}{f_B} = 0.5$ où $f_B = \frac{1}{T_B}$

Codage d'un 0 :

$$\begin{aligned} A \cos(2\pi f_0 t) &= A \cos(2\pi(f_p - \delta_f)t) \\ &= A \cos(2\pi(f_p - f_B/4)t) \\ &= A \cos(2\pi f_p t - \Phi_0) \end{aligned}$$

Codage d'un 1 :

$$\begin{aligned} A \cos(2\pi f_1 t) &= A \cos(2\pi(f_p + \delta_f)t) \\ &= A \cos(2\pi(f_p + f_B/4)t) \\ &= A \cos(2\pi f_p t + \Phi_0) \end{aligned}$$



La MSK pouvant être vue comme une modulation de phase, comme toute modulation de ce type, elle peut être réalisée au moyen d'un modulateur IQ. Cette technique est très utilisée en téléphonie portable (GSM, DCS 1800)

$$m(t) = \underbrace{\cos(\Phi)}_I \cos(2\pi f_c t) + \underbrace{\sin(\Phi)}_Q \sin(2\pi f_c t) = I \cos(2\pi f_c t) + Q \sin(2\pi f_c t)$$

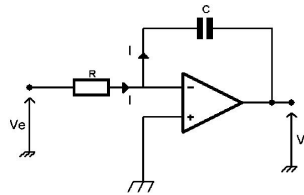
Communication analogique : Rappels

Modulation de Fréquence

La fréquence instantanée $f_i(t)$ varie linéairement avec le message $m(t)$

$$f_i(t) = f_p + k_f m(t)$$

$$v(t) = A \cos \left(2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t m(\alpha) d\alpha \right)$$



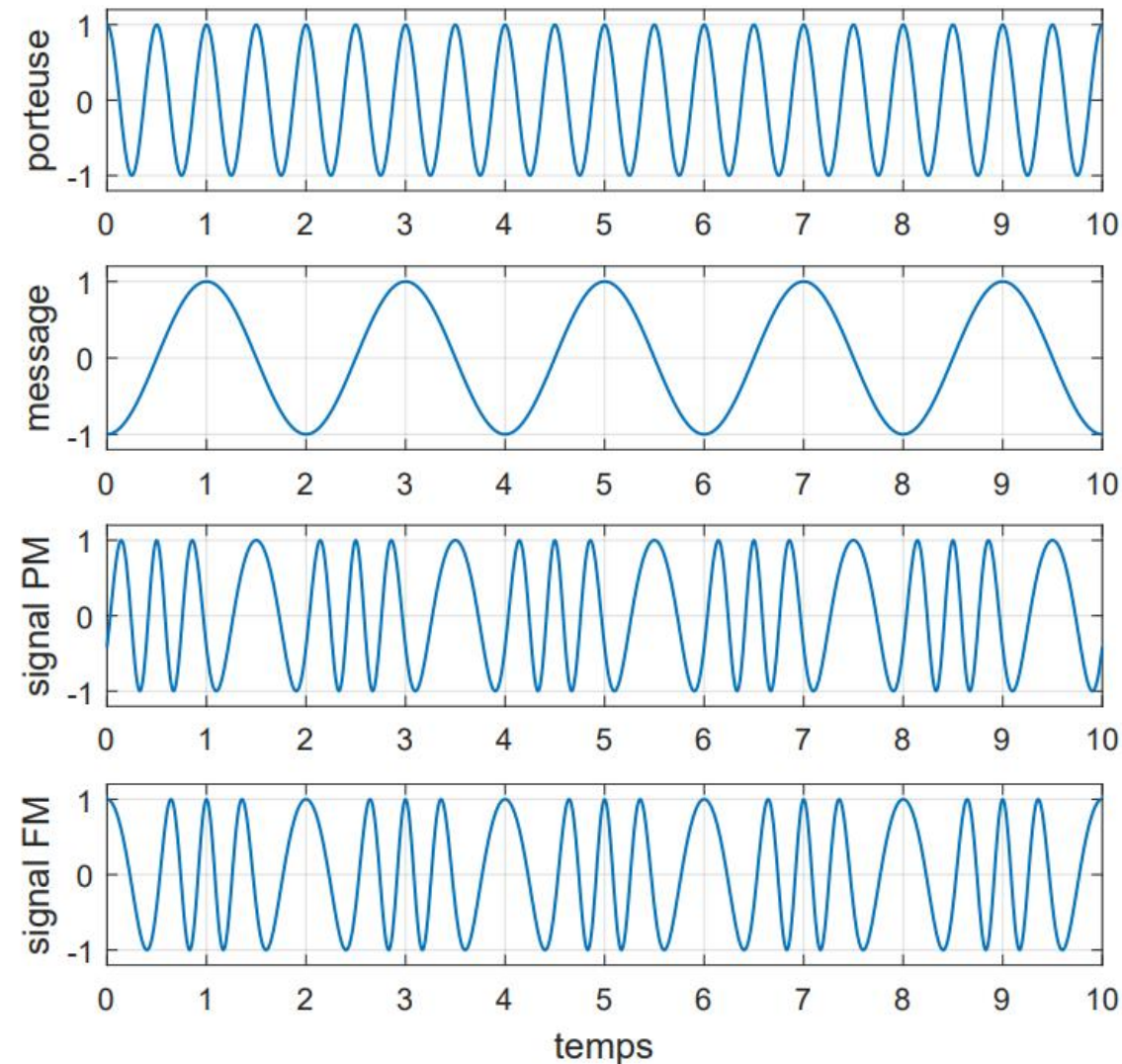
Modulation de Phase

L'angle instantané $\theta_i(t)$ varie linéairement avec le message $m(t)$

$$\theta_i(t) = 2\pi f_p t + k_p m(t)$$

où k_p : Constante de la modulation de phase.

$$v(t) = A \cos (2\pi f_p t + k_p m(t))$$



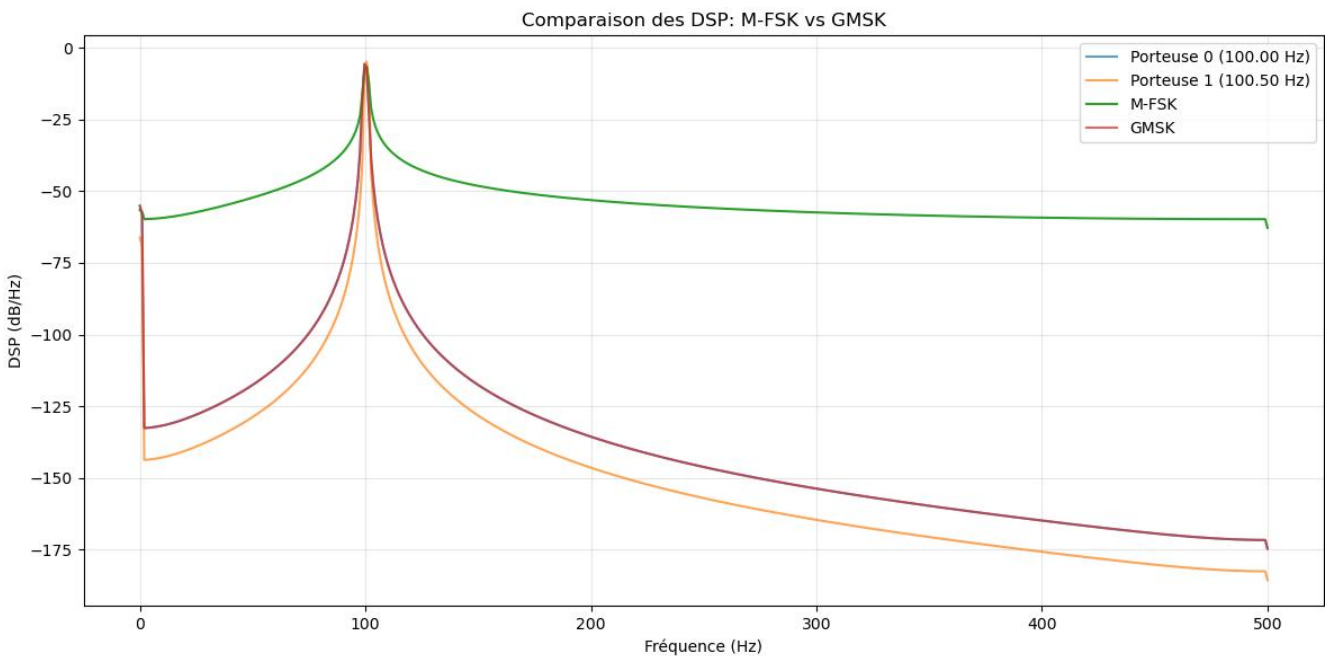
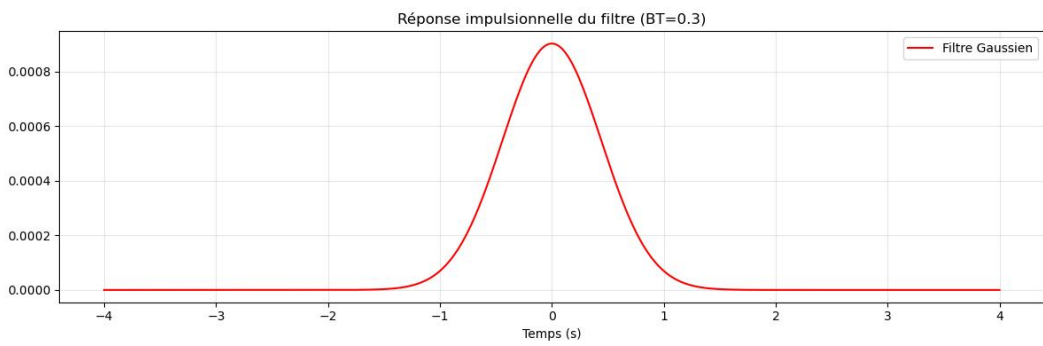
4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \Delta f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \Delta f$

GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying)

Il s'agit d'une MSK précédée d'un filtrage gaussien des données destiné à diminuer la bande passante du signal modulé en atténuant les lobes secondaires du spectre. Il est utilisé pour le GSM (téléphone mobile 2G). Il permet d'adoucir les transitions de phase du signal modulé.

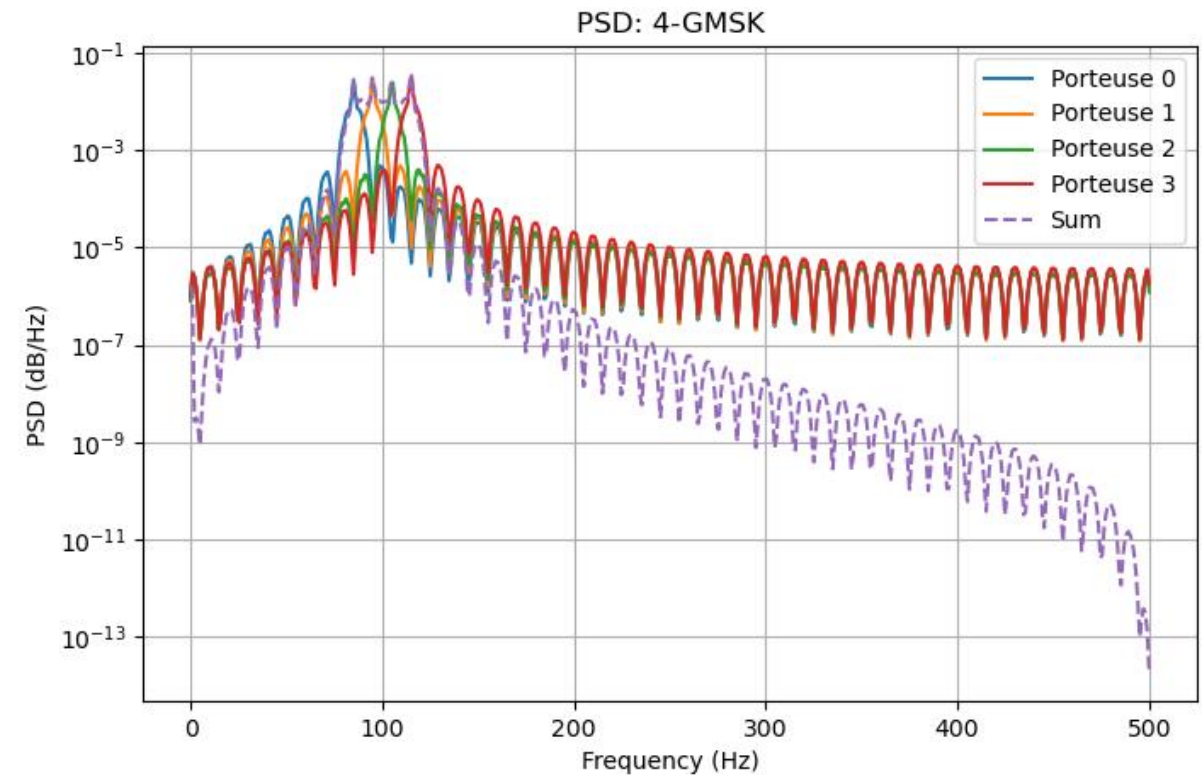
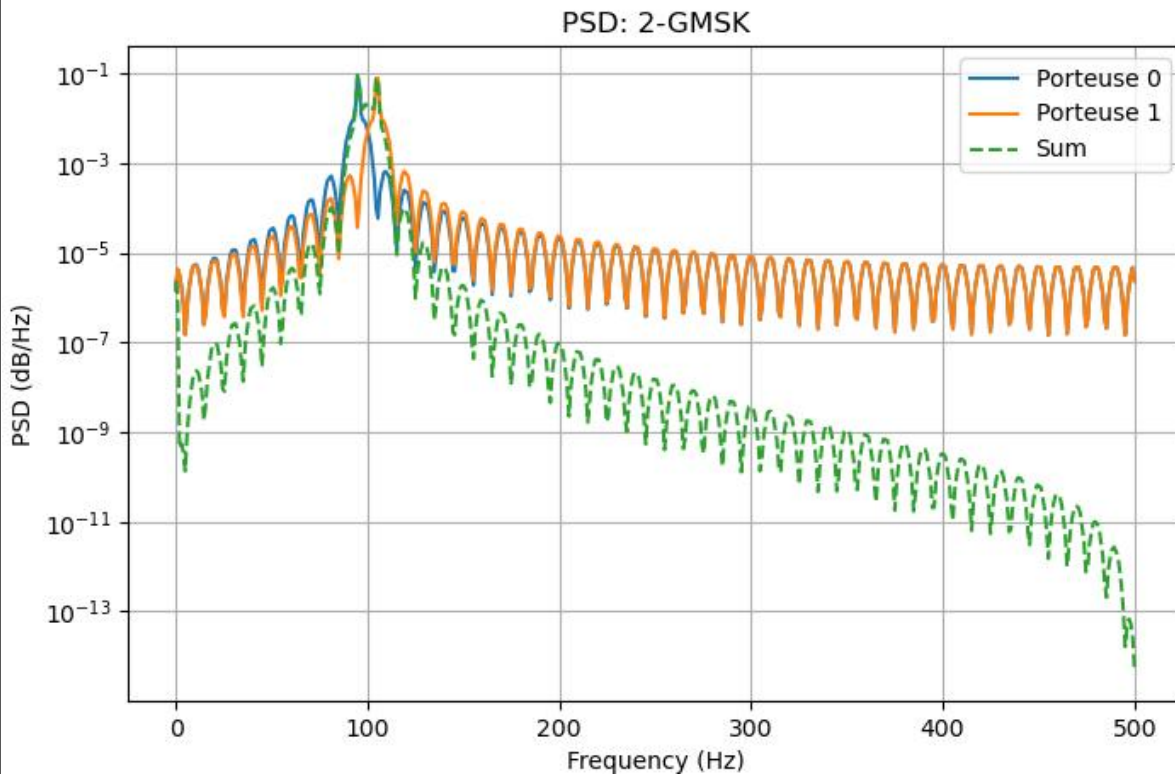


4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence GMSK (Minimum Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

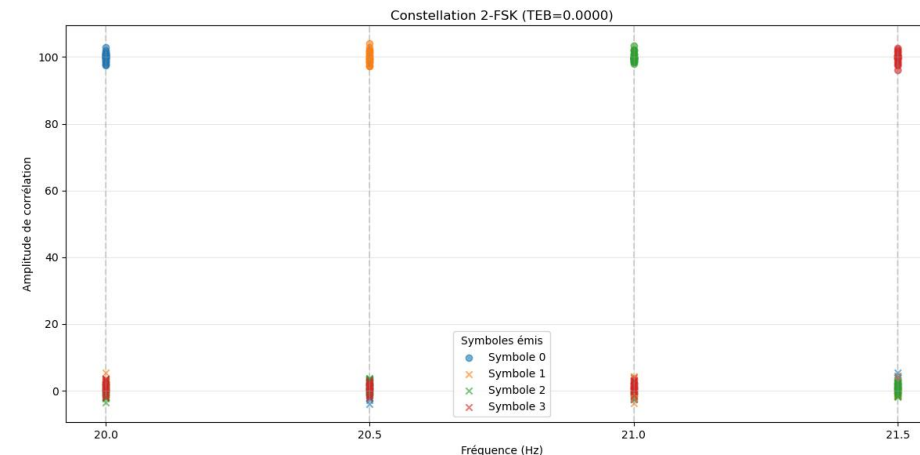
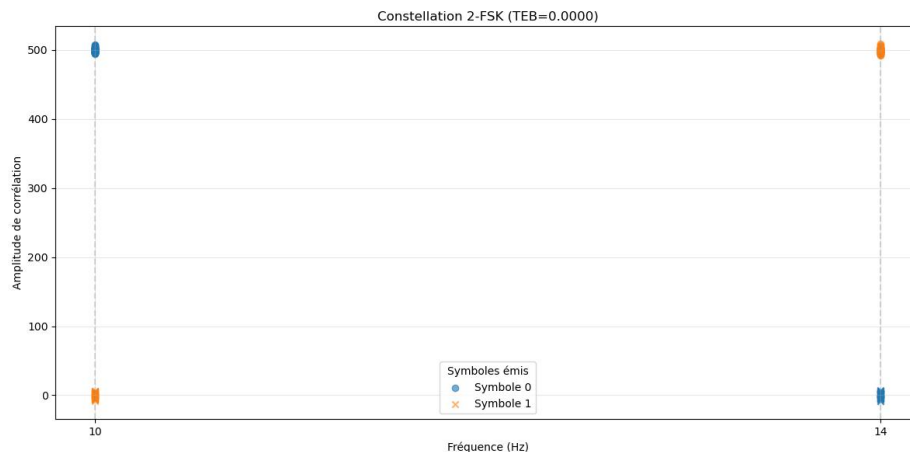
Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$

Démodulation M-FSK à phase continue (CP-FSK)

1. Détection cohérente (par corrélation)

- Principe : Comparer le signal reçu avec des références de fréquences prédéfinies :
 - Calculer la corrélation entre le signal reçu et chaque porteuse f_i sur la durée d'un symbole T
 - Décider en faveur de la fréquence avec la corrélation maximale.
- Avantages et inconvénients
 - Simple à implémenter (idéal pour les microcontrôleurs).
 - Robustesse aux variations de phase (pas besoin de synchronisation précise).
 - Sensible au bruit si les fréquences ne sont pas suffisamment orthogonales



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$

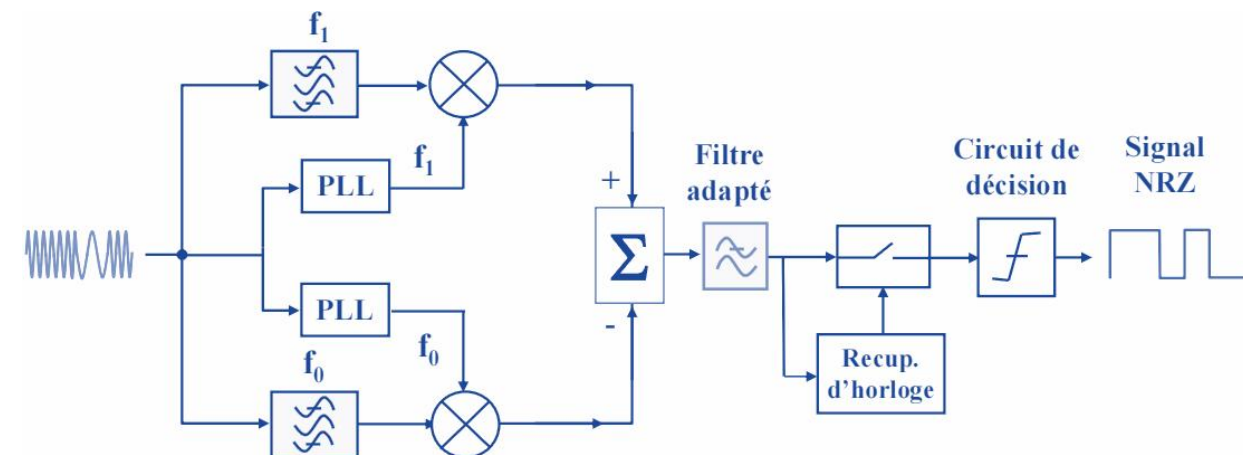
Démodulation M-FSK à phase continue (CP-FSK)

2. Détection cohérente (avec synchronisation de phase)

- Principe : Utiliser des oscillateurs locaux synchronisés en phase avec l'émetteur.
- Générer des références de fréquence cohérentes en phase (via une boucle à verrouillage de phase, PLL).
- Multiplier le signal reçu par $\cos(2\pi f_0 t)$ et $\cos(2\pi f_1 t)$
- Après filtrage adapté, choisir la fréquence avec l'énergie la plus élevée

○ Avantages et inconvénients

- Meilleure sensibilité que la détection non cohérente.
- Performances optimales en présence de bruit.
- Complexité accrue (nécessite une synchronisation précise)



Remarque :

1 et 2 sont deux formulations de **la même** méthode de démodulation cohérente M-FSK, vues sous deux angles :

La corrélation optimale suppose implicitement que la phase de nos références est alignée sur celle du signal : c'est précisément le rôle de la PLL.

La **PLL + produit par $\cos[f_0]$** n'est autre que l'implémentation pratique (analogique ou logicielle) du matched-filter : multiplication suivie d'intégration

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$

Démodulation M-FSK à phase continue (CP-FSK)

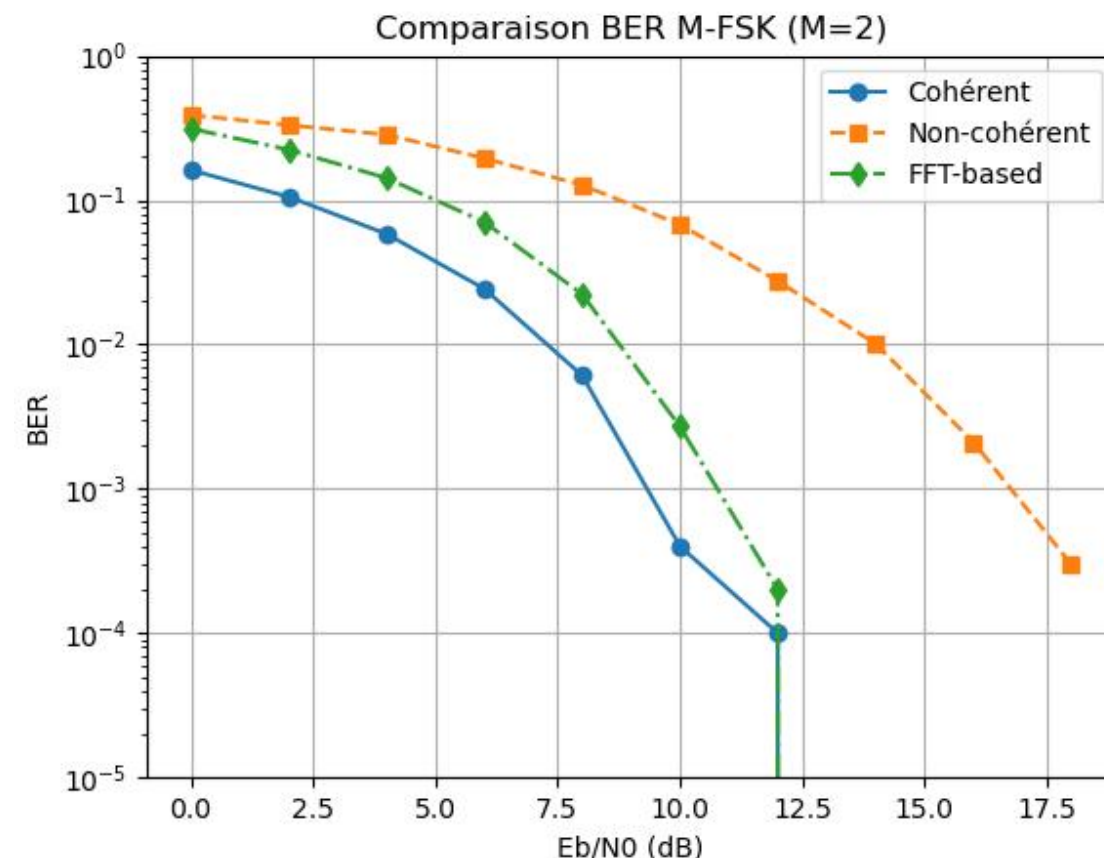
3. Détection par FFT (Analyse spectrale)

○ Principe : Utiliser une transformée de Fourier rapide (FFT) pour identifier la fréquence dominante.

- Appliquer une FFT sur chaque intervalle de symbole T
- Sélectionner la fréquence correspondant au pic spectral maximal.

○ Avantages et inconvénients

- Efficace pour les grandes valeurs de M
- Permet une détection parallèle de toutes les fréquences
- Résolution fréquentielle limitée par la durée.



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

à un '0' on associe une fréquence $f_0 = f_p - \delta_f$ et à un '1' on associe la fréquence $f_1 = f_p + \delta_f$

Démodulation M-FSK à phase continue (CP-FSK)

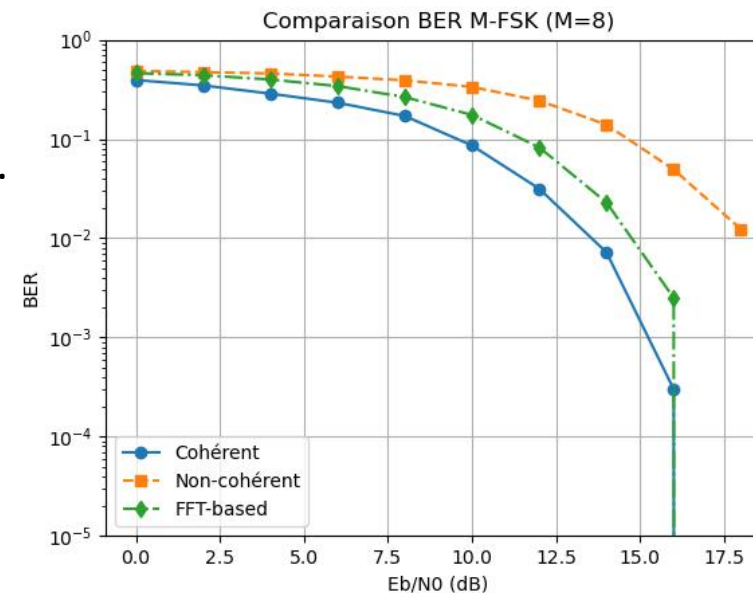
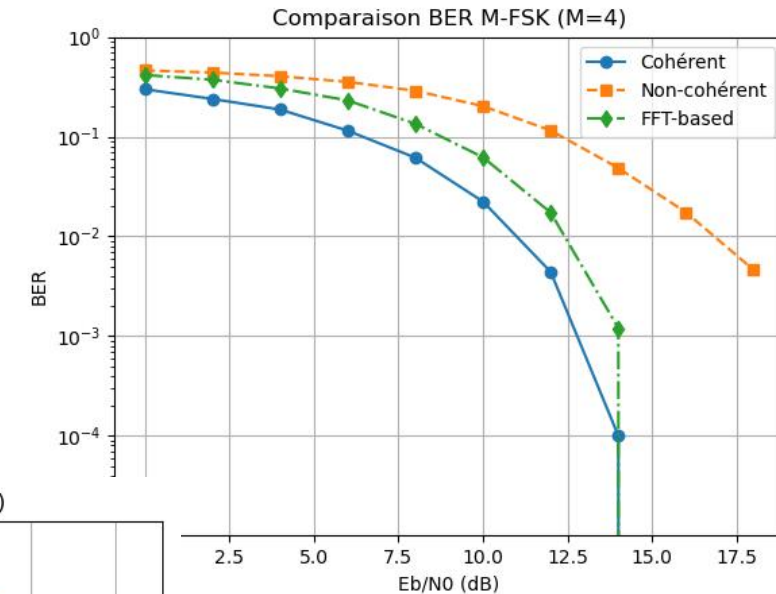
4. Détection par filtrage multiple

Principe : Utiliser M filtres passe-bande, chacun centré sur une fréquence symbole.

- Le signal reçu passe par chaque filtre.
- Un détecteur d'enveloppe (redresseur + filtre passe-bas) mesure l'énergie dans chaque bande.
- La fréquence correspondant au filtre avec l'énergie maximale est sélectionnée comme symbole reçu.

○ Avantages et inconvénients

- Simplicité, ne nécessite pas de synchronisation de phase.
- BER plus élevé



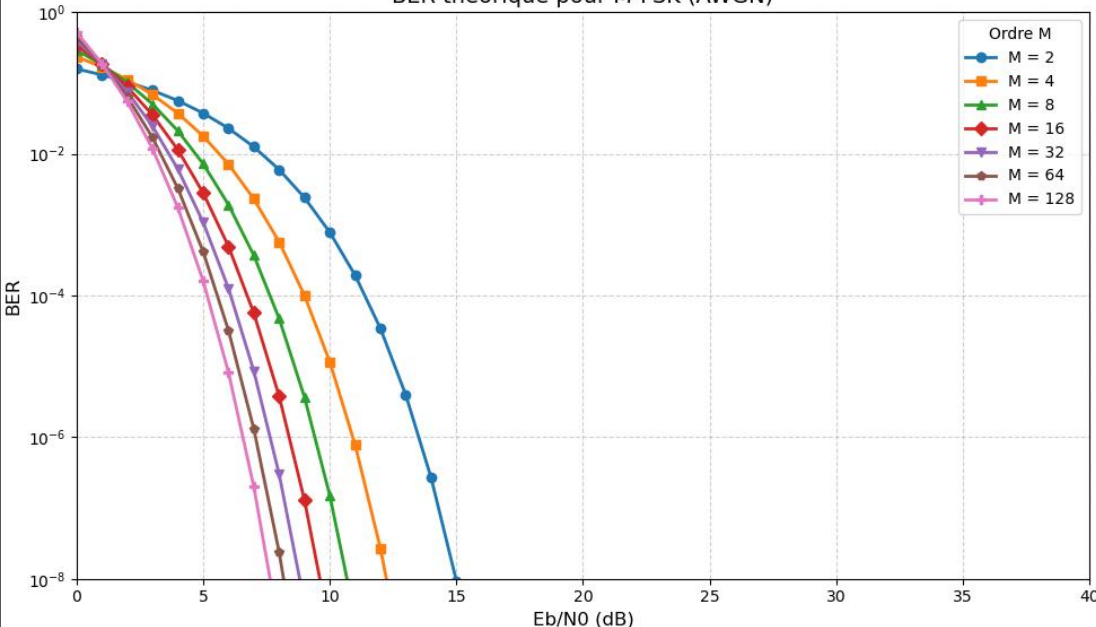
4. Modulation numérique à bande étroite

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

- Non cohérente $\rightarrow BER = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$
- Cohérente $\rightarrow BER \approx \frac{(M-1)}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\log_2 M \cdot E_b}{2N_0}}\right)$

Modulation	Comportement du BER	Observations clés
M-ASK	- BER augmente rapidement avec M. - M=32, BER > 10⁻¹ même à E_b/N₀=20 dB.	- Très sensible au bruit pour M≥8 - Nécessite un $\frac{E_b}{N_0}$ élevé pour M grand. - Utilisée en bande de base (ex. ADSL).
M-PSK	- Performances stables pour M=2 (BPSK) et M=4 (QPSK). - BER dégrade fortement pour M≥8	- Robustesse moyenne au bruit. - Sensible aux erreurs de phase pour M≥8 - Idéale pour les canaux à puissance limitée (ex. satellites).
M-QAM	- Meilleur compromis débit/performance. - 16-QAM atteint BER= 10⁻⁵ pour E_b/N₀=15 dB.	- Efficacité spectrale élevée. - Nécessite un E_b/N₀ croissant avec M. - Standard pour la 4G/5G et le Wi-Fi (ex. 64-QAM).
M-FSK	- BER diminue avec M (grâce à l'orthogonalité). - Pour M=32, BER ≈ 10⁻⁵ à E_b/N₀=15 dB..	- Robustesse au bruit accrue avec M. - Faible efficacité spectrale. - Utilisée dans les canaux bruyants (ex. RFID, communications militaires).

BER théorique pour M-FSK (AWGN)

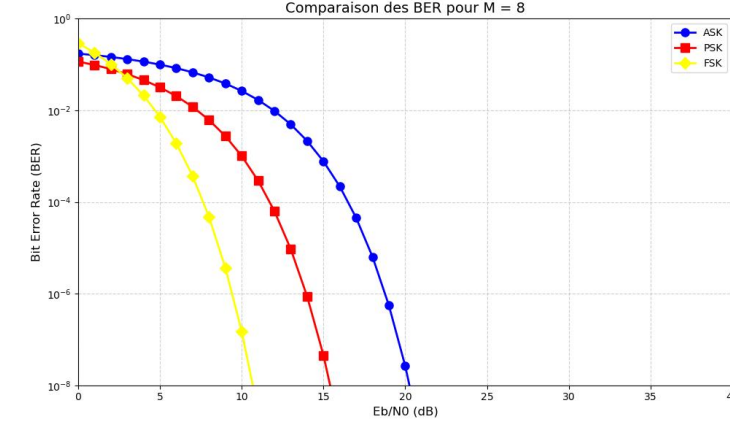
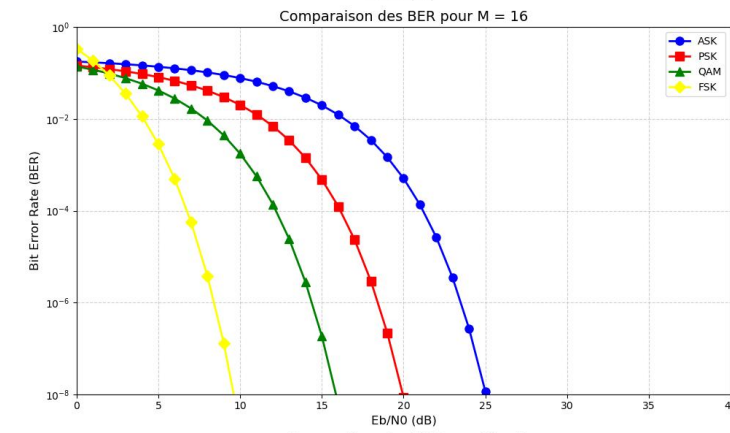
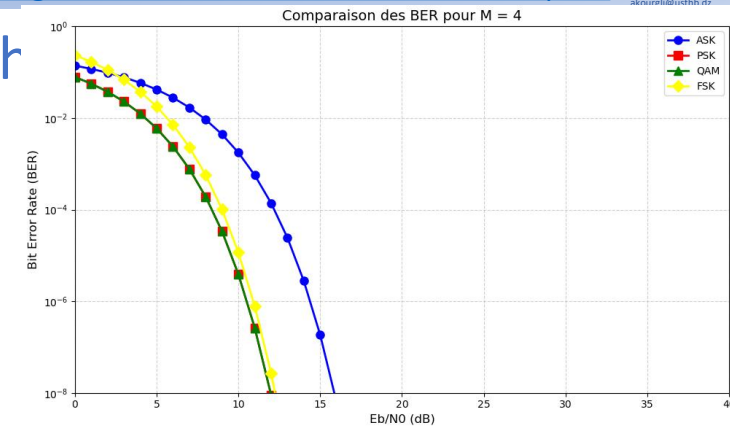
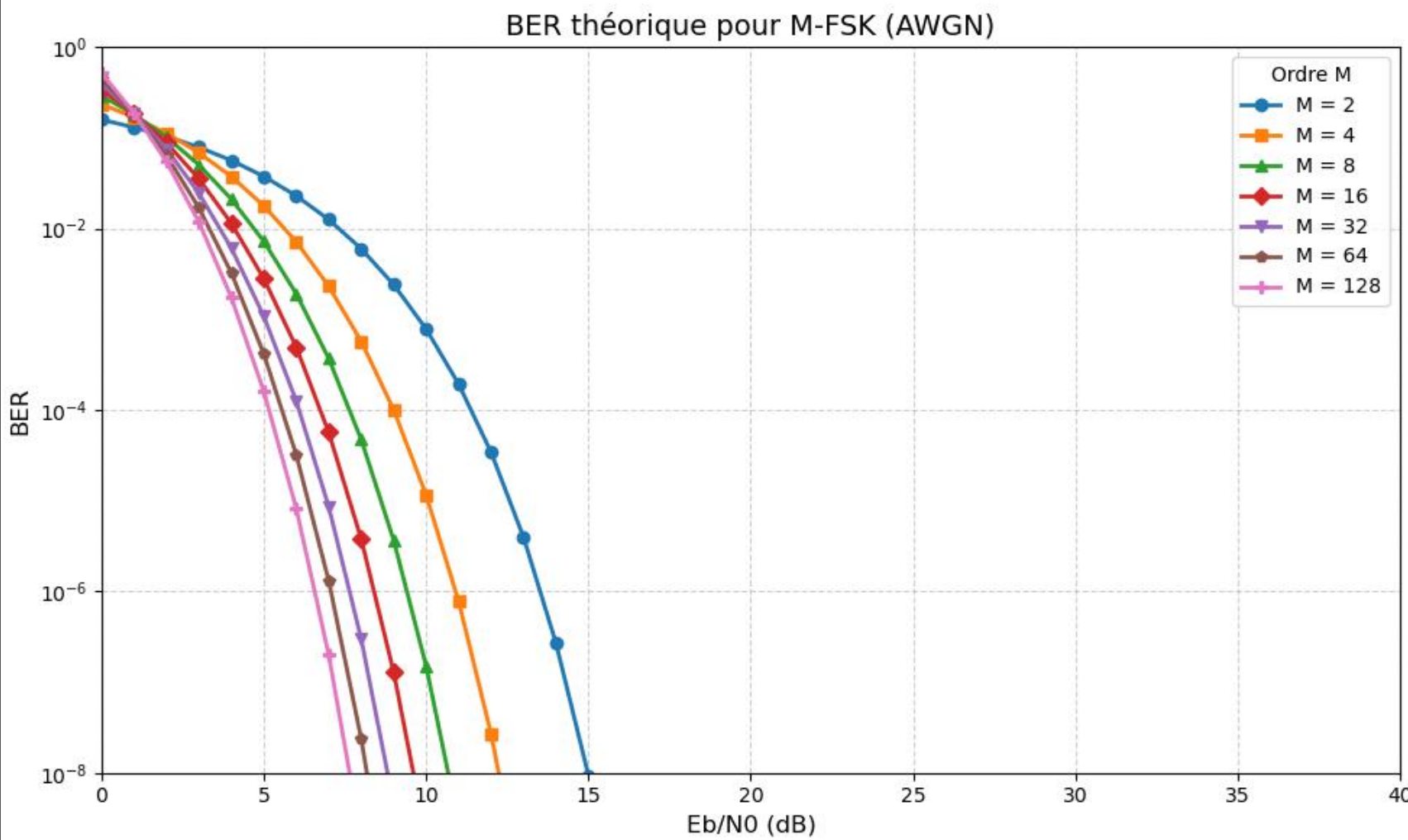


4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Modulation par déplacement de fréquence MDF ou FSK (Frequency Shift Keying)

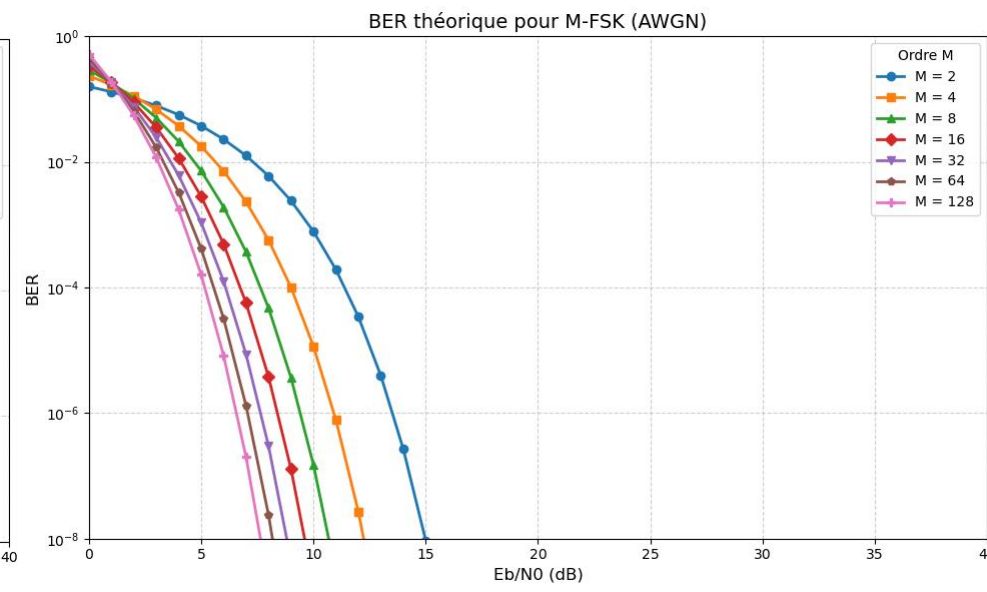
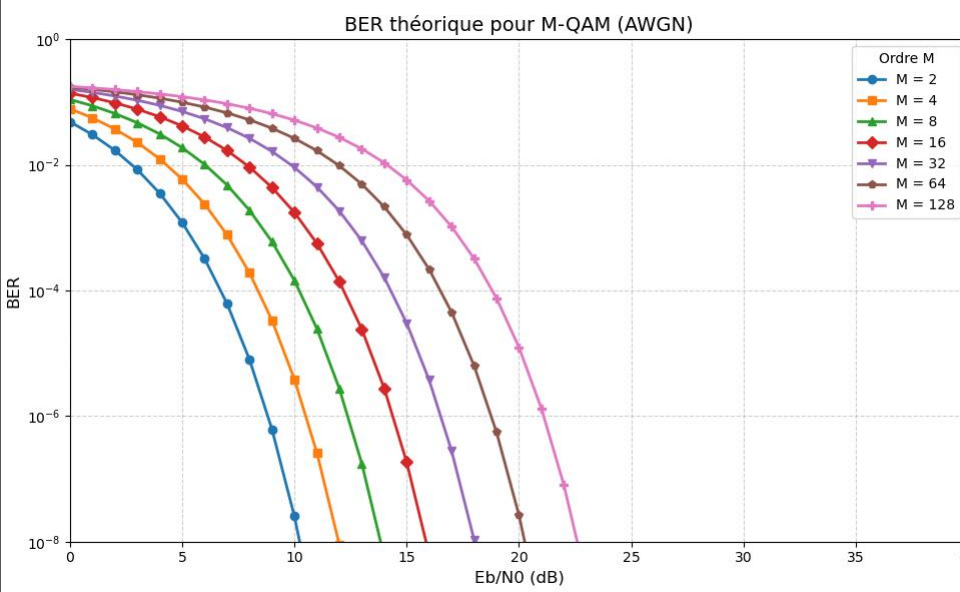
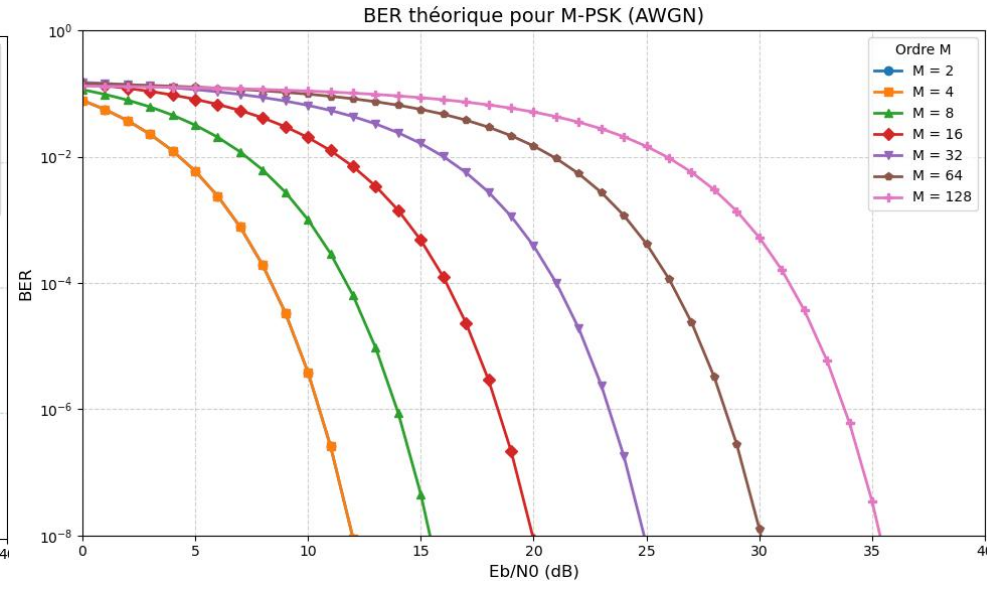
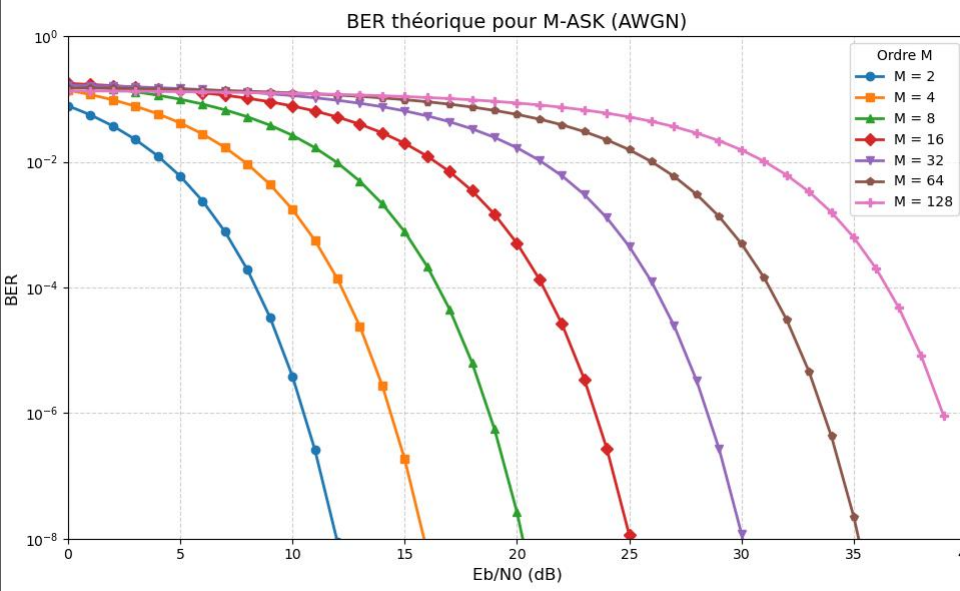
○ Cohérente $\rightarrow BER \approx \frac{(M-1)}{2} Q \left(\sqrt{\frac{\log_2 M \cdot E_b}{2N_0}} \right)$



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Performances des systèmes de Transmission

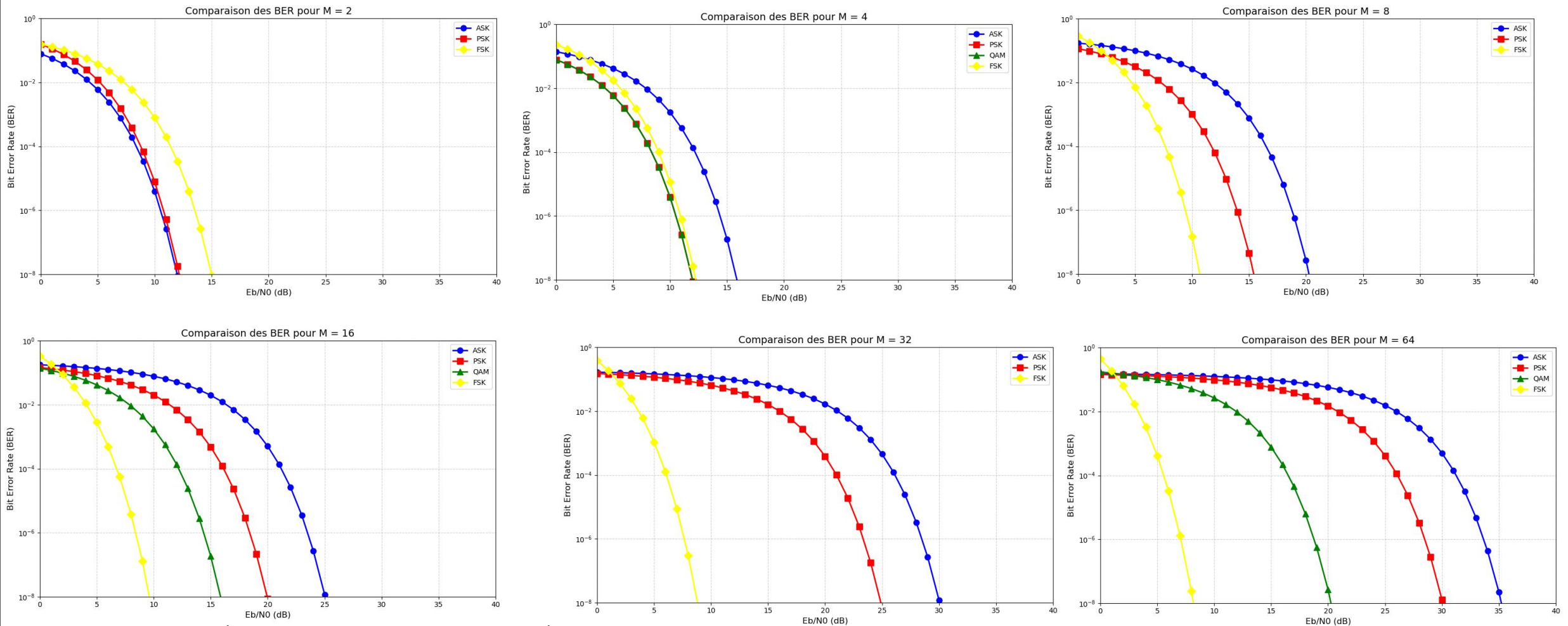


- PSK et ASK sensible aux non-linéarités des circuits qui la réaliseront, très sensible aux multitrajets.
- QAM meilleur efficacité spectrale, TEB diminue pour $Q > 16$)
- FSK (Grande occupation spectrale)

4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Performances des systèmes de Transmission



*M-QAM pour des transmissions haut débit et spectrales denses,
M-PSK pour un compromis entre efficacité et simplicité dans les systèmes sans fil,
M-ASK pour des applications simples et à bas coût,
M-FSK pour des communications robustes en environnements difficiles.*

4. Modulation numérique à bande étroite

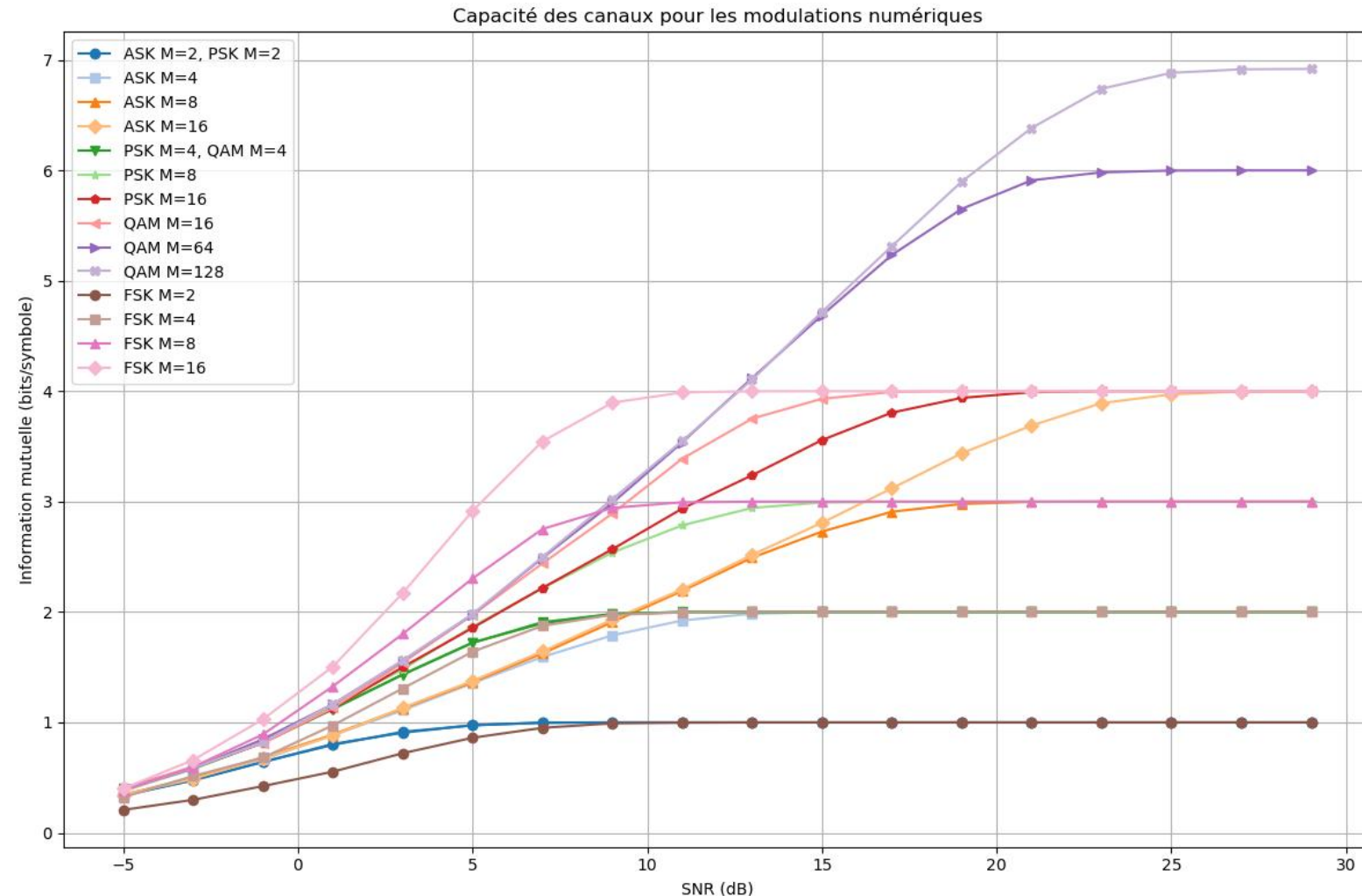
<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Performances des systèmes de Transmission

Les modulations ASK, PSK, QAM sont des modulations linéaires qui peuvent être réalisées au moyen de modulateurs IQ
La FSK est une modulation non linéaire qui présente le désavantage d'une large occupation spectrale (2 porteuses).

Désormais ce sont le MAQ qui sont utilisées
l'ADSL : MAQ-1024 ($=2^{10}$, codage sur 10 bits)
avec un débit de 16-20 Mbit/s
le VDSL MAQ-32768 ($=2^{15}$, codage sur 15 bits)
avec un débit de 56 Mbit/s

$$I(X; Y) = \log_2(M) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{E} \left[\log_2 \frac{\sum_{k=1}^M e^{-\text{SNR} \cdot d(y, s_k)^2}}{e^{-\text{SNR} \cdot d(y, s_i)^2}} \right]$$



4. Modulation numérique à bande étroite

<https://perso.usthb.dz/~akourgli/Communications%20Num%c3%a9riques/>

Performances des systèmes de Transmission

1.Choix de M :

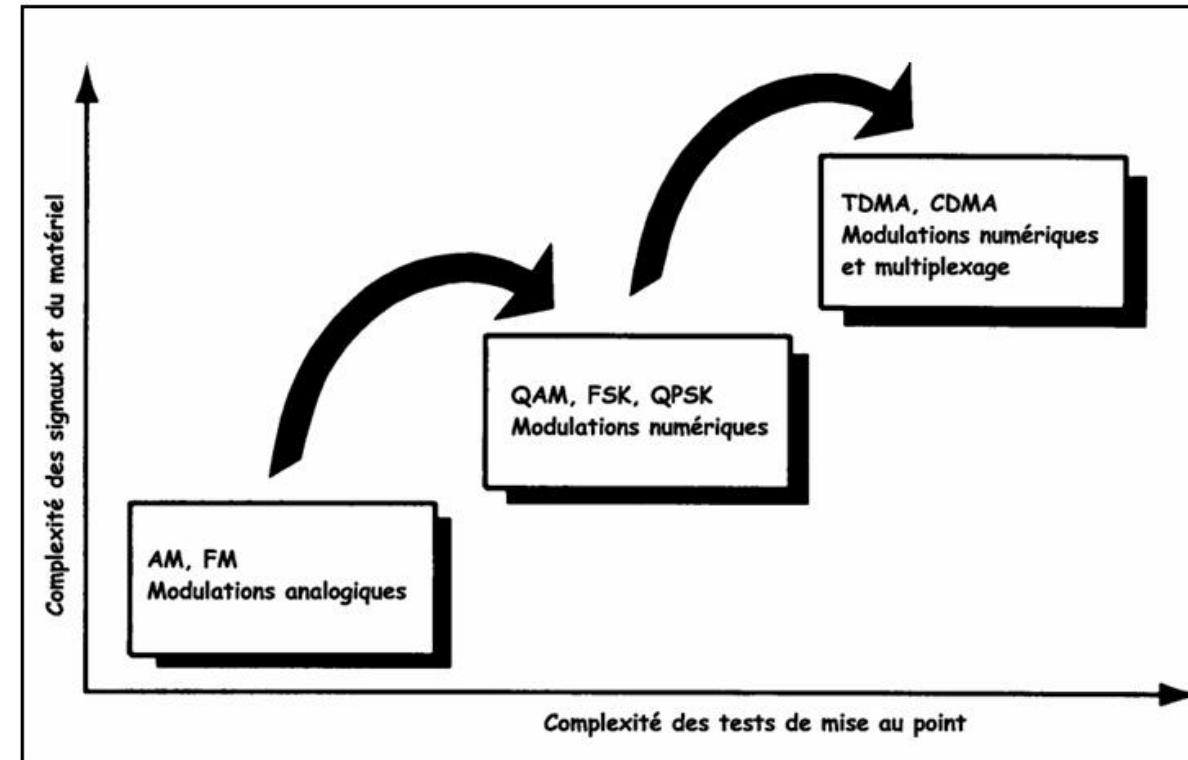
1. **Débit élevé** : Préférer M-QAM (ex. 16-QAM, 64-QAM).
2. **Robustesse** : Opter pour M-FSK ou M-PSK (faible M).
3. **Compromis** : M-ASK pour les canaux à faible distorsion.

2.Impact de E_b/N_0 :

1. M-QAM et M-ASK nécessitent $E_b/N_0 \geq 15$ dB pour $M \geq 16$.
2. M-FSK fonctionne bien même à $E_b/N_0 < 10$ dB.

3.Complexité :

1. Détection cohérente requise pour M-PSK/M-QAM
2. synchronisation de phase critique.
3. M-FSK est plus simple à détecter (non cohérent possible).



Caractéristiques du signal dans un environnement Radio-mobile

En parcourant un trajet entre l'émetteur et le récepteur, le signal transmis est sujet à de nombreux phénomènes dégradant la qualité du signal entraînant des erreurs dans les messages reçus → pertes d'informations pour l'utilisateur ou le système.

- Les pertes de propagation dues à la distance parcourue par l'onde radio, ou l'affaiblissement de parcours (pathloss).
- Les atténuations de puissance du signal dues aux effets de masques (shadowing) provoqués par les obstacles rencontrés par le signal sur le trajet parcouru entre l'émetteur et le récepteur.
- Les atténuations de puissance du signal dues aux effets induits par le phénomène des trajets multiples.
- Les brouillages dus aux interférences créées par d'autres émissions. Ce type de pertes est très important dans les systèmes à réutilisation de fréquences.

Techniques d'accès multiples

Les systèmes d'accès multiple les plus intuitifs sont ceux qui permettent aux différents utilisateurs de transmettre :

- Sur des bandes de fréquence disjointes : Accès Multiple à Répartition en fréquences (AMRF) ou plus communément, Frequency Division Multiple Access (FDMA).
- Pendant des laps de temps différents : Accès Multiple à Répartition en Temps (AMRT) ou plus communément, Time Division Multiple Access (TDMA).
- Par l'utilisation des codes orthogonaux : Accès Multiple par Répartition de Code (AMRC) ou plus communément, Code Division Multiple Access (CDMA)

Digital communications = Communications Numériques

Fourier transform = Transformation de Fourier

Bandwidth = Largeur de bande

Baseband signal = Signal de bande de base

Passband signal = Signal sur fréquence porteuse

Spectrum = Spectre Power Spectral Density (PSD) = Densité Spectrale de Puissance (DSP)

Autocorrelation function = Fonction d'autocorrélation

Autocovariance function = Fonction d'autocovariance

Stochastic process = Processus aléatoire

Stationary process = Processus stationnaire

Wide-sense stationary process = Processus stationnaire au seconde ordre

Additive White Gaussian Noise (AWGN) = Bruit Additif Blanc et Gaussien (BABG)

Pulse Amplitude Modulation (PAM) = Modulation par Impulsions d'Amplitude (MIA)

Modulation order = Ordre de modulation

Pulse shape = Filtre de mise en forme

Sampling theorem = Théorème d'échantillonnage

Binary data rate = Débit binaire

Modulation rate = Rapidité de modulation

Symbol duration = Durée des symboles

Energy per bit = Énergie par bit

Energy per symbol = Énergie par symbole

Roll-off factor = Facteur de Roll off

Excess bandwidth = Largeur de bande en excès

Inter Symbol Interference (ISI) = Interférence Entre Symboles (IES)

Eye diagram = Diagramme de l'oeil

Hypothesis testing = Test d'hypothèses

Maximum Likelihood decoding (ML) = Décodage à Maximum de Vraisemblance (MV)

Maximum A Posteriori decoding (MAP) = Décodage au sens du Maximum A Posteriori (MAP)

Threshold decision = Décision à seuil

Symbol error probability = Probabilité d'erreur par symbole

Bit Error Rate (BER) = Taux d'Erreur Binaire (TEB)

Spectral efficiency = Efficacité spectrale

Signal to Noise Ratio (SNR) = Rapport Signal sur Bruit (PSR)

Contenu de la matière:

Chapitre 1. Transmission numérique en bande de base

(3 Semaines)

Eléments d'une chaîne de transmission numérique, modulation en bande de base. Codes en ligne (Conversion bits/symboles et Mise en forme), Code NRZ Bipolaire, Code NRZ unipolaire, Code RZ unipolaire, Code Biphase/Manchester, Code HDB3 (Haute Densité Bipolaire d'ordre 3), Codes en lignes M-aires (Codes NRZ M-aires), Densité spectrale de puissance des codes en ligne, Critères de choix d'un code en ligne. Notion d'enveloppe complexe.

Chapitre 2. Récepteur optimal

(3 Semaines)

Structure d'un récepteur à M signaux, représentation vectorielle des signaux et du bruit, détection optimal (détecteur MAP pour maximum a posteriori et détecteur ML pour maximum likelihood), Structure du récepteur optimal (autocorrélation ou filtrage adapté sur chacune des voies puis décision).

Chapitre 3. Transmission sans interférence entre symboles

(3 Semaines)

Effet du Canal sur la forme d'onde du code en ligne, Caractéristiques de l'Interférence entre symboles, Diagramme de l'œil, Condition d'absence d'interférence entre symboles, Critère de Nyquist, filtre en cosinus surélevé, Performances en termes de probabilité d'erreur d'un système M-aire avec filtrage de Nyquist, Répartition du filtrage entre l'émission et la réception.

Chapitre 4. Performances pour une transmission en bande de base

(3 Semaines)

Détection d'un signal binaire et test des hypothèses, critère du maximum de vraisemblance, rapport de vraisemblance, récepteur binaire optimal à deux corrélateurs, à un seul corrélateur et à base de filtre adapté. Probabilité d'erreur pour le cas d'un bruit blanc gaussien avec filtre passe bas et filtre adapté.

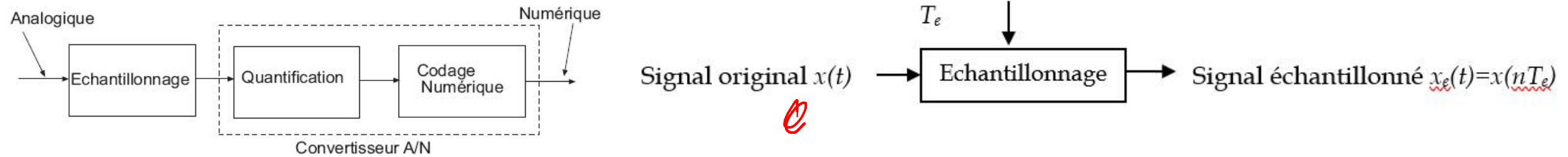
Chapitre 5. Modulations numériques à bande étroite

(3 Semaines)

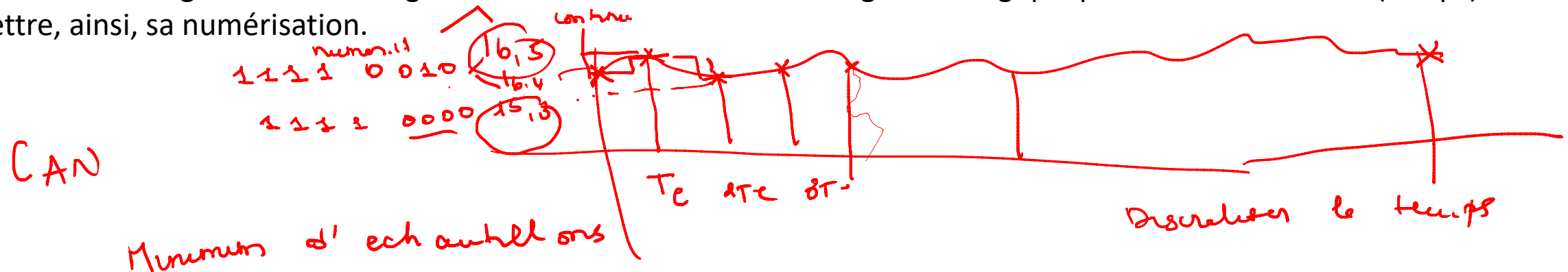
Principe, Modulation à déplacement d'amplitude (ASK), Modulation OOK, Modulations M-ASK symétriques, Réalisation physique et performances, Modulation à déplacement de phase (PSK), Constellations, Modulations M-PSK, Réalisation physique et performances, Modulation à deux porteuses en quadratique (QAM), Réalisation physique et performances, Modulation à déplacement de fréquence (FSK), Modulation MSK, Réalisation physique et performances d'une FSK binaire

Rappels échantillonnage

L'échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).



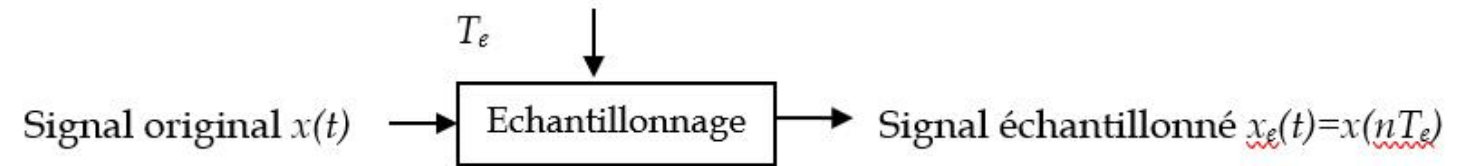
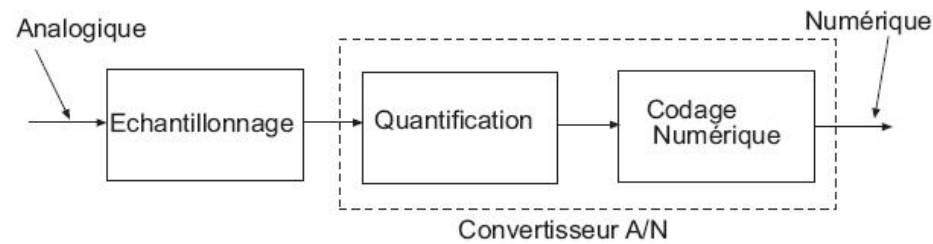
Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.



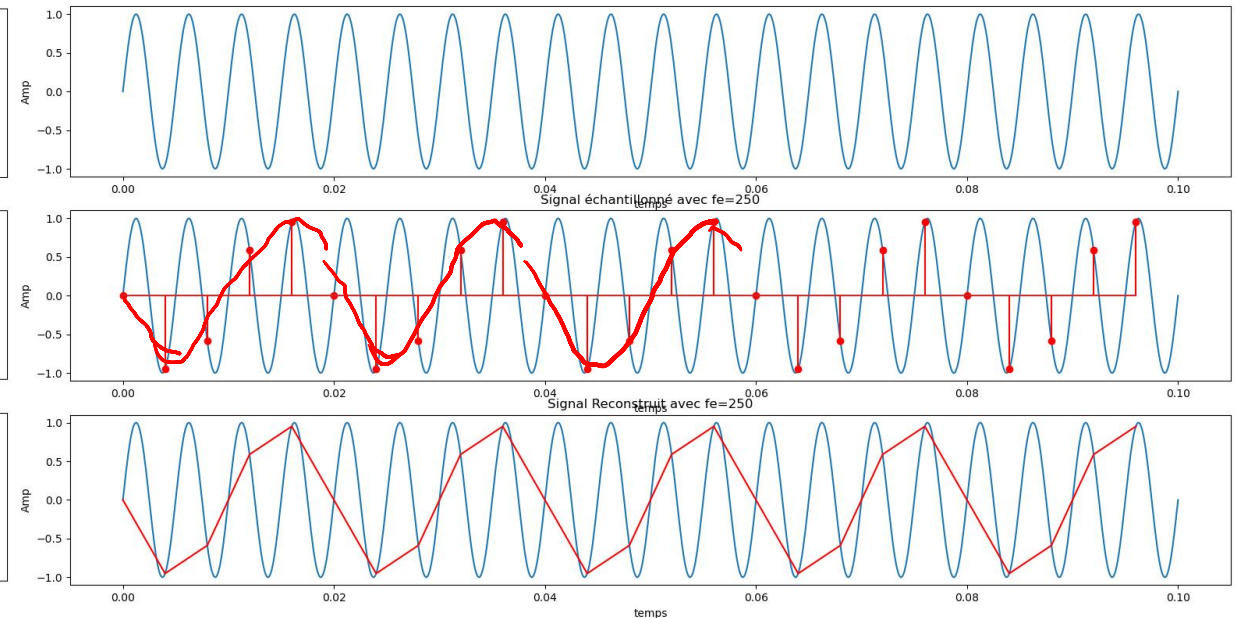
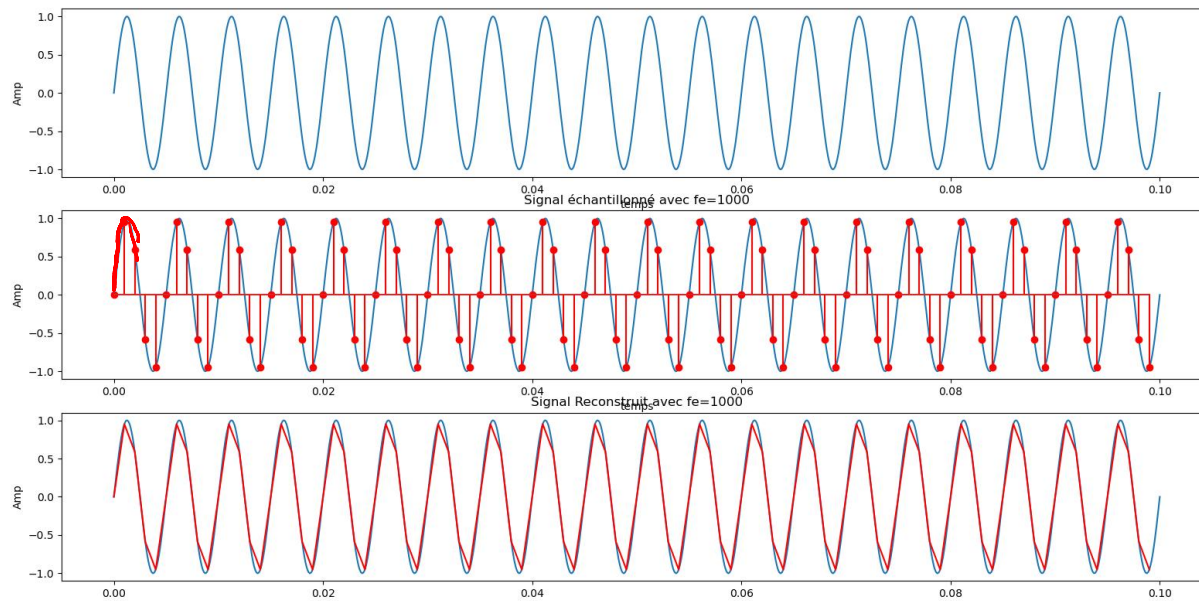
CNA

Rappels échantillonnage

L'échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).



Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.

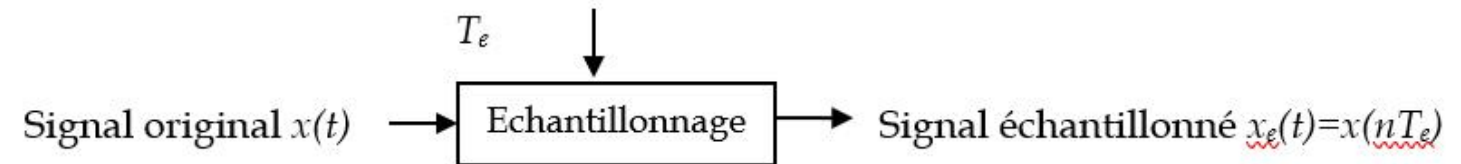
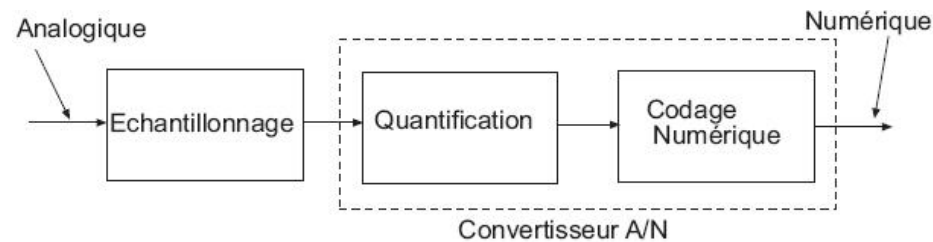


$$f_s = 1/T_s$$

$$f_s = 1/T_s$$

Rappels échantillonnage

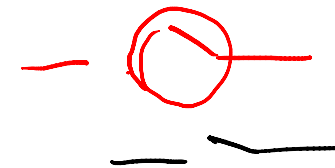
L'échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).



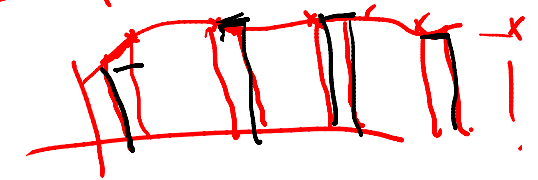
Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.

2 contraintes majeures :

- Ne pas détériorer le signal (conserver l'information utile)
- Limiter l'espace mémoire nécessaire au stockage.



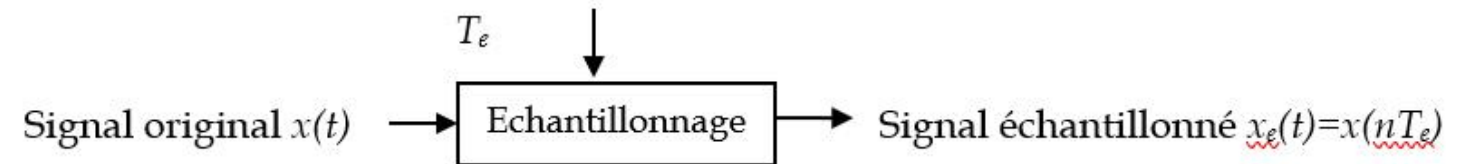
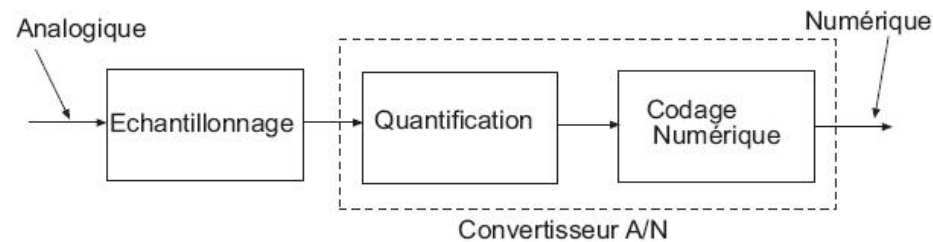
Naturel
Blaque



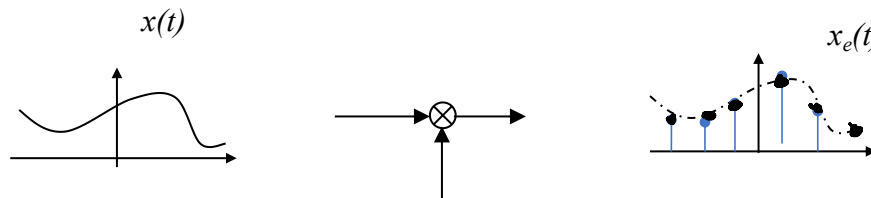
Rappels échantillonnage

$$X_e(f) = \dots + f_e \times (f + k f_e) + f_e \times (f + f_e) + f_e \times (f) + f_e \times (f - f_e) + f_e \times (f - k f_e)$$

L'échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).



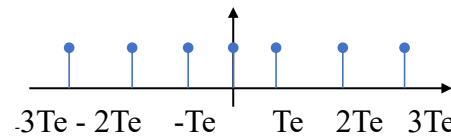
Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.



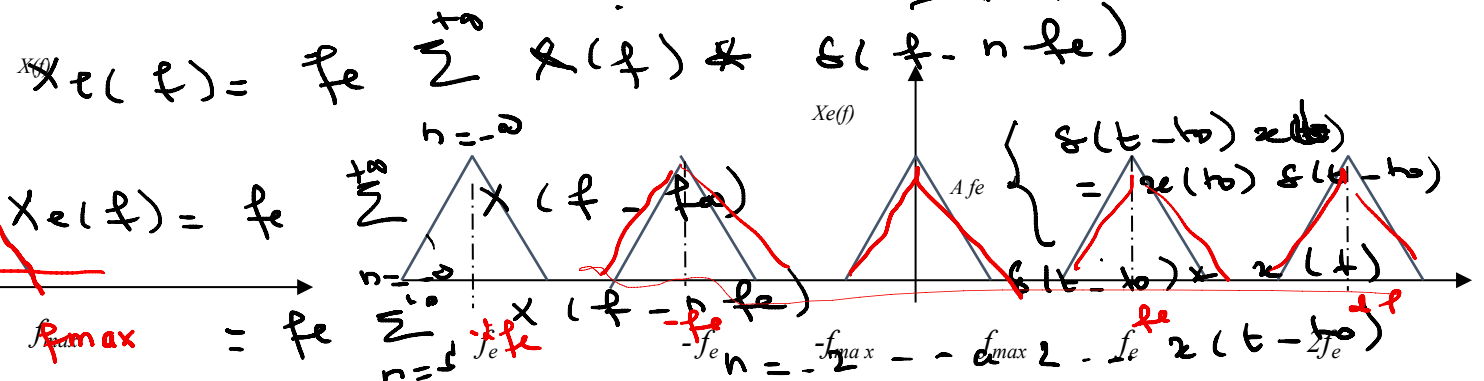
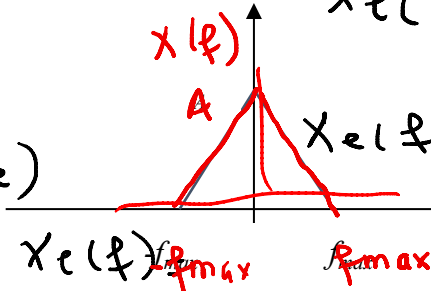
$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

$$X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$



$$TF \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right\} = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$

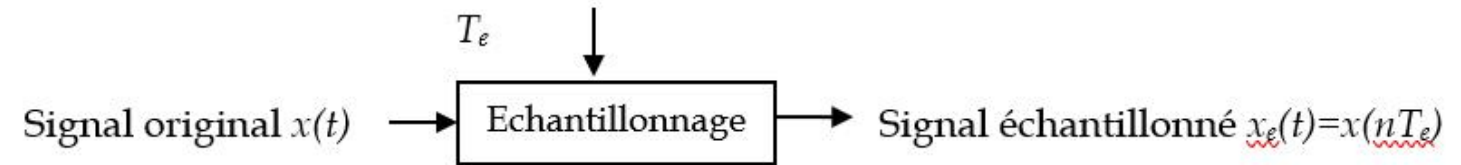
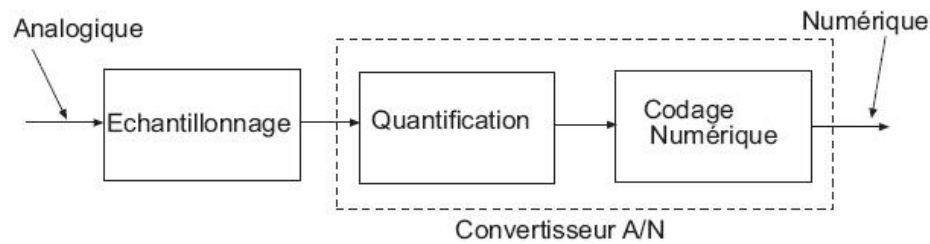


Rappels échantillonnage

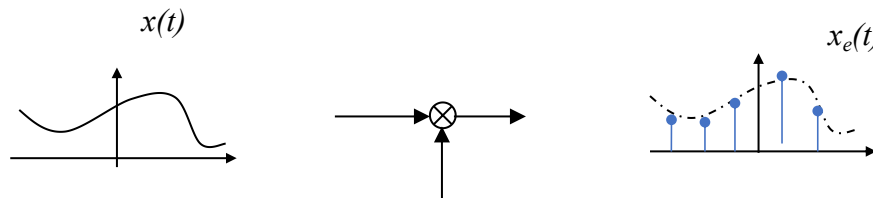
$$f_e - f_{max} > f_{max}$$

$$f_e > 2f_{max}$$

L'échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).

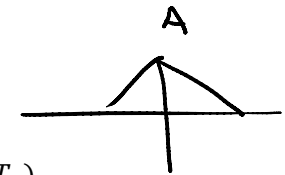


Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.

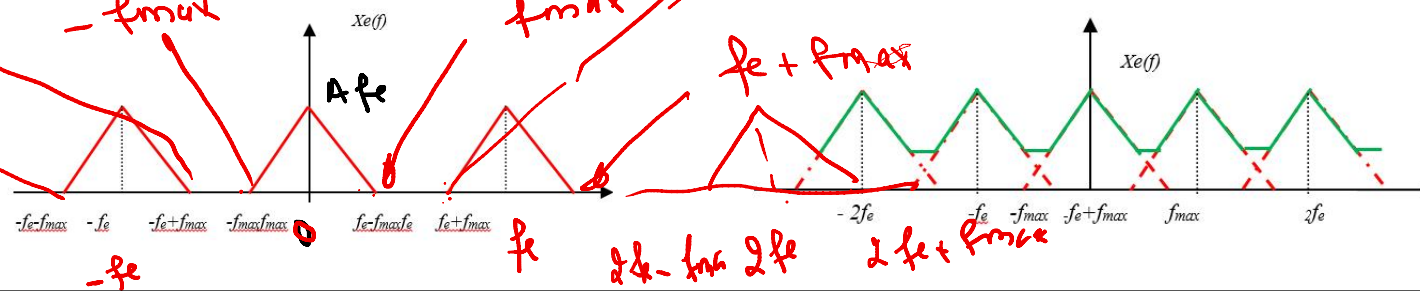
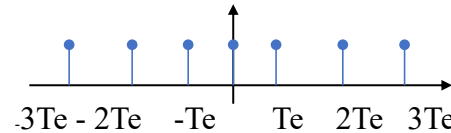


$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_e)$$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$



$$X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$

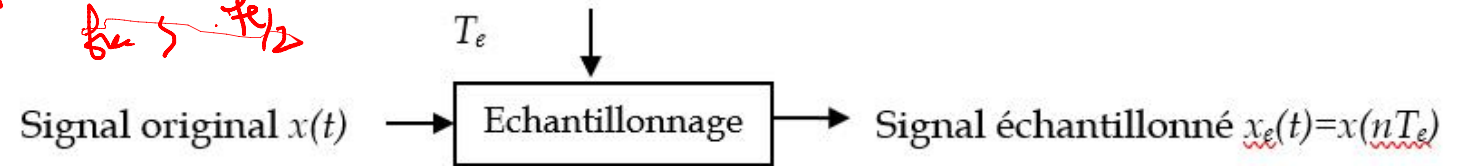
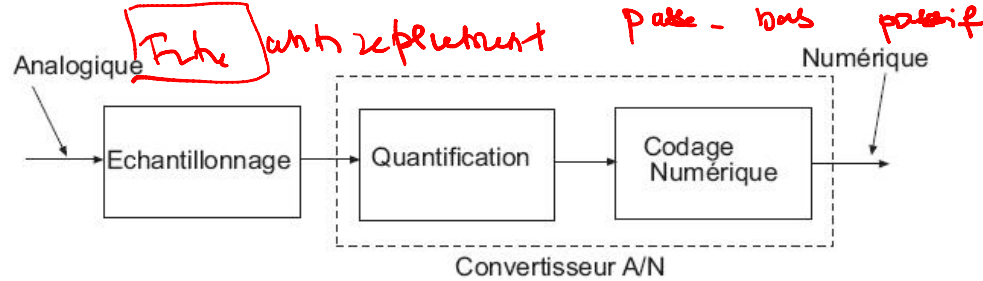


https://youtu.be/6mFzrdoO_pk
<https://youtu.be/jeiBcEJ9Ob0>

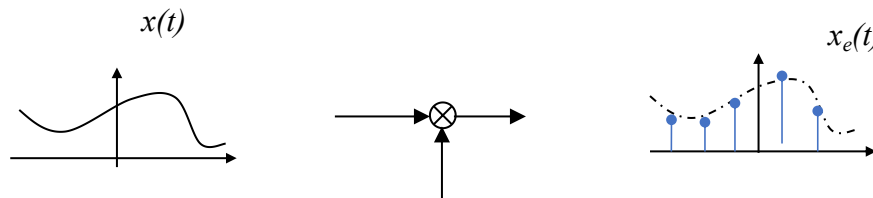
Rappels échantillonnage

$$f_e/2 - (-f_e/2) = f_e/2 + f_e/2 = f_e$$

L'échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).



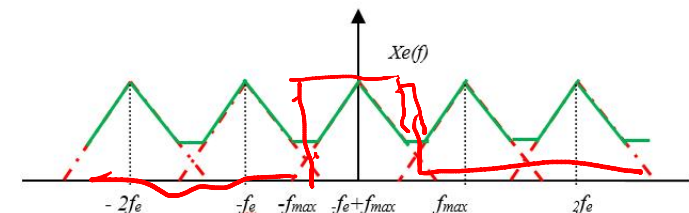
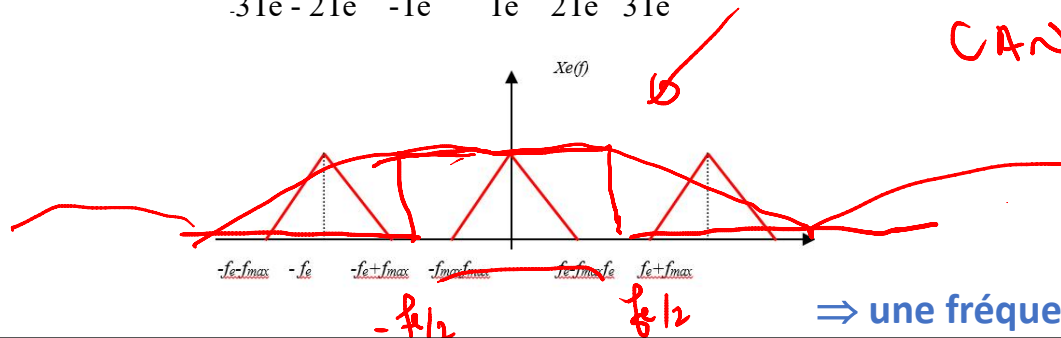
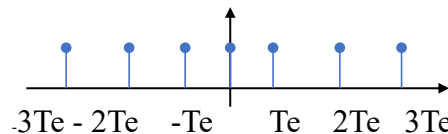
Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.



$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_e)$$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

$$X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$



https://youtu.be/6mFzrdoO_pk
<https://youtu.be/jeiBcEJ9Ob0>

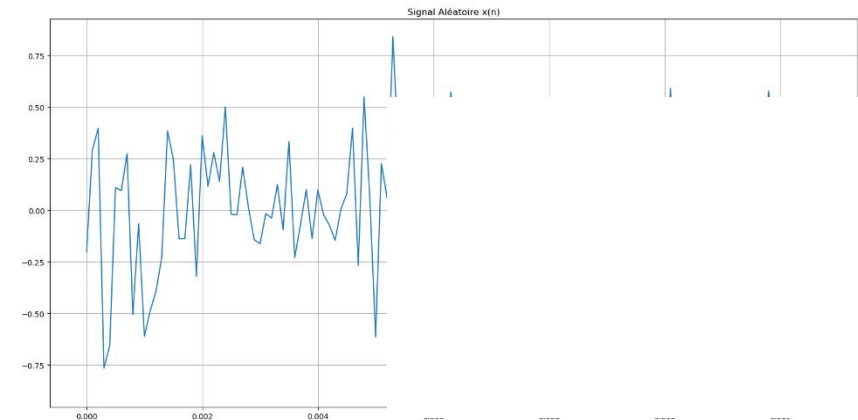
⇒ une fréquence d'échantillonnage égale à la fréquence de Nyquist ($f_e/2 > f_{max}$)

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Tout signal physique comporte une composante aléatoire qu'il s'agisse d'une perturbation externe telle une tension aléatoire aux bornes d'une résistance ou une perturbation atmosphérique.

Le signal utile est lui même aléatoire si l'on considère

- ☐ le lancer de dés,
- ☐ le loto,
- ☐ les résultats de matchs
- ☐ les phénomènes météorologiques,
- ☐ etc., ...



Un signal **déterministe** → une formulation mathématique qui permet de connaître sa valeur à tout instant.

La connaissance de la valeur d'un signal **aléatoire** à l'instant t ne nous permet pas de connaître sa valeur à $t + \tau$.

Faire des prévisions en faisant appel à des **paramètres statistiques** définissant les **possibilités** d'évolution du signal.

Etudier l'évolution des **phénomènes aléatoires**, on a recours à des **modèles probabilistes**.

Une probabilité n'a de sens que si celle-ci est calculée sur un grand nombre. Imaginons que l'on lance un dé 6 fois, on n'obtiendra rarement 6 faces différentes, ni même autant de faces pour 12 ou 60 lancers.

($N \gg$) que les 6 faces apparaîtront avec quasi les mêmes probabilités (1/6)

$$p(A) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{N}$$

Probabilité conjointe $p(A, B) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_{AB}}{N}$

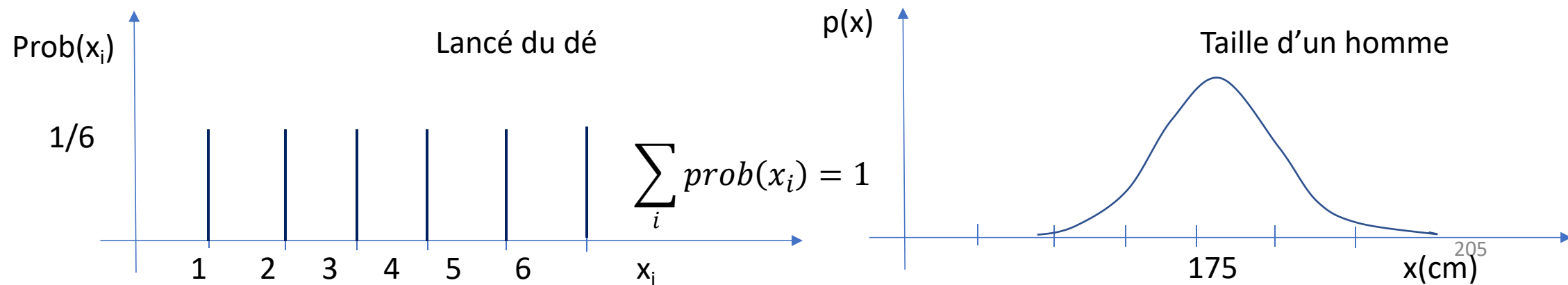
Rappels sur les variables et processus aléatoires

Une VA est discrète ou continue : l'ensemble des valeurs possibles de l'expérience aléatoire est respectivement discret (x_i) ou continu (x) . Rien à voir avec le temps!!.

- Nombre d'étudiants présents aujourd'hui (discrète)
- Température maintenant (continue)

Une variable aléatoire est caractérisée par :

- l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre
- l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs $\text{prob}(x_i)$ ou $p(x)$



Rappels sur les variables et processus aléatoires

Probabilité conjointe

$$p(A, B) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_{AB}}{N}$$

Probabilité conditionnelle

$$p(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \frac{n_A}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_A}{N} \right) \stackrel{\text{déf.}}{=} p(B/A) \cdot p(A)$$

Probabilité
conditionnelle

$$p(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_B} \frac{n_B}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_B} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_B}{N} \right) \stackrel{\text{déf.}}{=} p(A/B) \cdot p(B) = p(B/A) \cdot p(A)$$

Théorème de Bayes

Indépendance

Exemple : Probabilité qu'il pleuve à Alger (Evènement A) sachant qu'il fait beau à Rio (Evènement B) $\rightarrow p(A/B)=p(A)$ de même $p(B/A)=p(B)$ d'où **$p(A, B)=p(A) \cdot p(B)$**

A et B sont indépendants

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Probabilité conjointe

$$p(A, B) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_{AB}}{N}$$

Probabilité conditionnelle

$$p(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \frac{n_A}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_A}{N} \right) \stackrel{\text{déf.}}{=} \overbrace{p(B/A) \cdot p(A)}^{\text{Probabilité conditionnelle}}$$

$$p(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_B} \frac{n_B}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_B} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_B}{N} \right) \stackrel{\text{déf.}}{=} p(A/B) \cdot p(B) = p(B/A) \cdot p(A)$$

Exemple d'application

Dans une population, les individus sont répartis en groupes sanguins: A, B, AB et O et à l'intérieur de chaque groupe en Rhésus + ou – selon le tableau suivant en pourcentages : Un individu est choisi au hasard. Calculer la probabilité :

- qu'il soit du groupe O sachant qu'il a un rhésus –.
- qu'il ait un rhésus – sachant qu'il est du groupe O.

groupe	A	B	AB	O
Rhésus +	38	8	3	36
Rhésus -	7	1	1	6

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Probabilité conjointe

$$p(A, B) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_{AB}}{N}$$

Probabilité conditionnelle

$$p(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \frac{n_A}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_A}{N} \right) \stackrel{\text{déf.}}{=} p(B/A) \cdot p(A)$$

$$p(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_B} \frac{n_B}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_B} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_B}{N} \right) \stackrel{\text{déf.}}{=} p(A/B) \cdot p(B) = p(B/A) \cdot p(A)$$

Probabilité
conditionnelle

$$p(O) = 42 / 100 = 0.42$$

$$p(R^- / O) = \frac{p(R^-, O)}{p(O)} = \frac{6 / 100}{42 / 100} = \frac{6}{42}$$

$$6 / 42$$

Exemple d'application

Dans une population, les individus sont répartis en groupes sanguins: A, B, AB et O et à l'intérieur de chaque groupe en Rhésus + ou - selon le tableau suivant en pourcentages : Un individu est choisi au hasard. Calculer la probabilité :

- qu'il soit du groupe O sachant qu'il a un rhésus -.
- qu'il ait un rhésus - sachant qu'il est du groupe O.

$$p(O / R^-) = \frac{p(O, R^-)}{p(R^-)} = \frac{0.06}{0.15} = 0.4$$

$$p(R^- / O) = \frac{p(O, R^-)}{p(O)} = \frac{0.06}{0.42} = 0.14$$

groupe	A	B	AB	O
Rhésus +	38	8	3	36
Rhésus -	7	1	1	6

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Moments statistiques

- Densité de probabilité **insuffisante**
- Quantifier **dispersion** de la variable aléatoire à travers :
 - moyenne
 - écart par rapport à moyenne,
 - etc.

Exemple 1 : Suivi du poids d'un nourrisson

Poids de 3 enfants d'un 1 an :

- 11 kg
- 15 kg
- 6 kg

Exemple 2 : Choix d'une résistance (tolérance sur sa valeur $\pm 10\%$, $\pm 5\%$, $\pm 2\%$,)

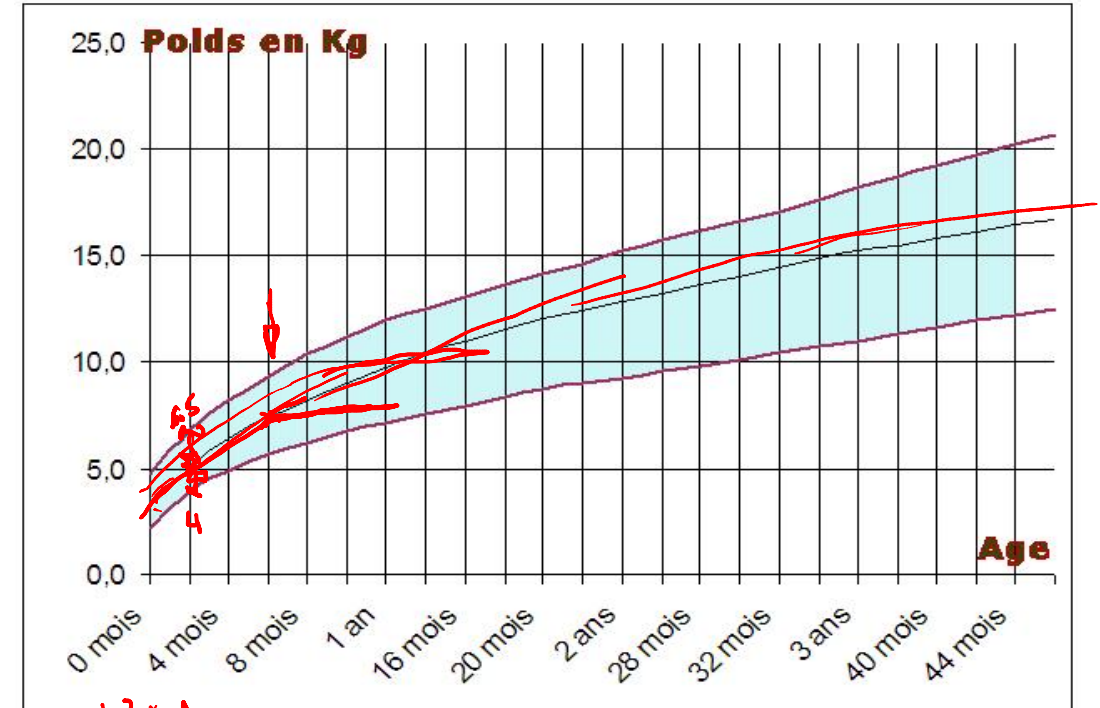
- une v. a. discrète $m = \overline{\mu_x} = \sum_i x_i p(x_i)$

- une v.a continue définie sur $[a, b]$

$$m = \mu_x = E\{x\} = \int_a^b x \cdot p(x) dx$$

- Notation

$$\mu_x = E\{x\} \quad \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\}$$



$$Var = \sigma_x^2 = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 p(x_i) = \sum_i x_i^2 p(x_i) - \mu_x^2$$

$$Var = \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = \int_a^b (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \int_a^b x^2 p(x) dx - \mu_x^2$$

$E\{x^2\} = \int x^2 p(x) dx$

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Moments statistiques

- Densité de probabilité **insuffisante**
- Quantifier **dispersion** de la variable aléatoire à travers :
 - moyenne
 - écart par rapport à moyenne,
 - etc.

Exemple 1 : Suivi du poids d'un nourrisson

Poids de 3 enfants d'un 1 an :

- 11 kg
- 15 kg
- 6 kg

Exemple 2 : Choix d'une résistance (tolérance sur sa valeur $\pm 10\%$, $\pm 5\%$, , $\pm 2\%$,)

- une v. a. discrète $m = \mu_x = \sum_i^N x_i p(x_i)$

$$Var = \sigma_x^2 = \sum_i^N (x_i - \mu_x)^2 p(x_i) = \sum_i^N x_i^2 p(x_i) - \mu_x^2$$

- une v.a continue définie sur $[a, b]$

$$m = \mu_x = E\{x\} = \int_a^b x \cdot p(x) dx$$

$$Var = \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = \int_a^b (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \int_a^b x^2 p(x) dx - \mu_x^2$$

Mesure de Corrélation

$$C_{x_1 x_2} = \sigma_{x_1 x_2} = E\{(x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})^*\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} - \mu_{x_1} \mu_{x_2}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \mu_{x_1} \cdot \mu_{x_2}^*$$



Rappels sur les variables et processus aléatoires

Moments statistiques

○ une v. a. discrète $m = \mu_x = \sum_i^N x_i p(x_i)$

○ une v.a continue définie sur $[a,b]$

$$m = \mu_x = E\{x\} = \int_a^b x \cdot p(x) dx$$

$$Var = \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = \int_a^b (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \int_a^b x^2 p(x) - \mu_x^2$$

○ Mesure de Corrélation

$$C_{x_1 x_2} = \sigma_{x_1 x_2} = E\{(x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})^*\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} - \mu_{x_1} \mu_{x_2}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \mu_{x_1} \mu_{x_2}^*$$

Si X_1 et X_2 sont indépendants $C_{x_1 x_2} = 0$.

Exemples d'application

Envoi de symboles $a_k = \{1, 0\}$ équiprobables $\rightarrow$ avec $p(a_k = 1) = p(a_k = 0) = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \mu_a = 1/2, \sigma_a^2 = 1/4$

$$\mu_a = \sum a \cdot p(a) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sum p(a) = 1$$

$$0.5 \quad 0.5$$

Envoi de symboles $a_k = \{1, -1\}$ équiprobables $\rightarrow$ avec $p(a_k = 1) = p(a_k = -1) = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1$

$$\mu_a = \sum a \cdot p(a) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\sigma_a^2 = \sum a^2 p(a) - \mu_a^2 = \sum (a - \mu_a)^2 p(a)$$

$$= \left(1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Moments statistiques

○ une v. a. discrète $m = \mu_x = \sum_i^N x_i p(x_i)$

$$Var = \sigma_x^2 = \sum_i^N (x_i - \mu_x)^2 p(x_i) = \sum_i^N x_i^2 p(x_i) - \mu_x^2$$

○ une v.a continue définie sur [a,b]

$$m = \mu_x = E\{x\} = \int_a^b x \cdot p(x) dx$$

$$Var = \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = \int_a^b (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \int_a^b x^2 p(x) dx - \mu_x^2$$

○ Mesure de Corrélation

$$C_{x_1 x_2} = \sigma_{x_1 x_2} = E\{(x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})^*\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} - \mu_{x_1} \mu_{x_2}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \mu_{x_1} \cdot \mu_{x_2}^*$$

Si X_1 et X_2 sont indépendants $C_{x_1 x_2} = 0$.

Exemples d'application

Envoi de symboles $a_k = \{1, 0\}$ équiprobables $\rightarrow a$

$$\rightarrow \mu_a = 1/2, \sigma_a^2 = 1/4$$

Envoi de symboles $a_k = \{1, -1\}$ équiprobables $\rightarrow$ avec $p(a_k = 1) = p(a_k = -1) = \frac{1}{2}$

$$\rightarrow \mu_a = 0, \sigma_a^2 = 1$$

$$P = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Rappels sur les variables et processus aléatoires

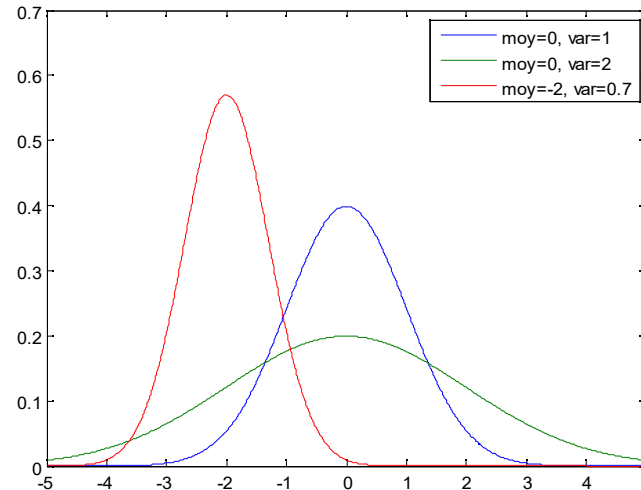
Quelques Loïs de probabilité usuelles

Gaussienne

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

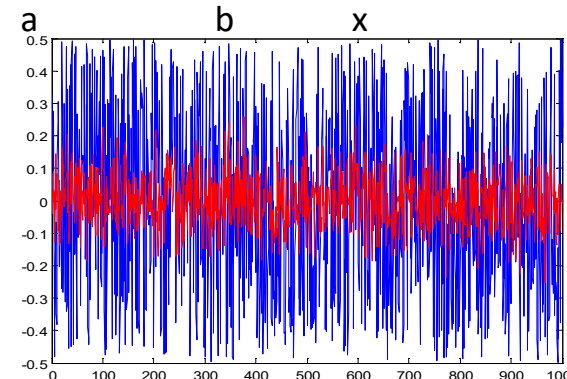
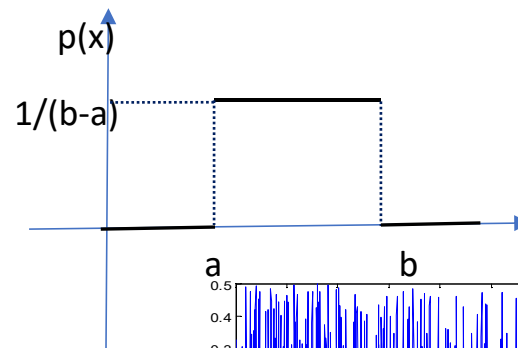
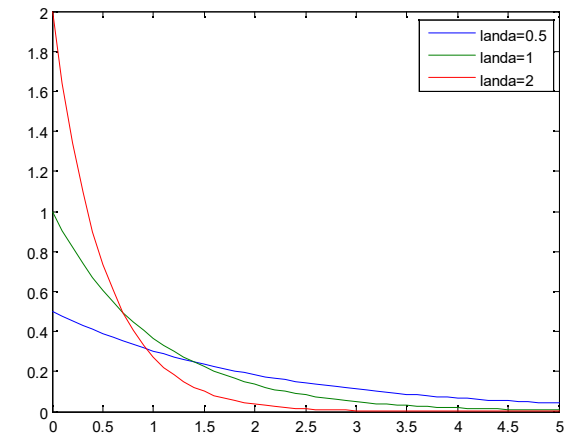
Uniforme

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad \begin{aligned} \mu_x &= (b+a)/2, \\ \sigma_x^2 &= (b-a)^2/12 \end{aligned}$$



Exponentielle

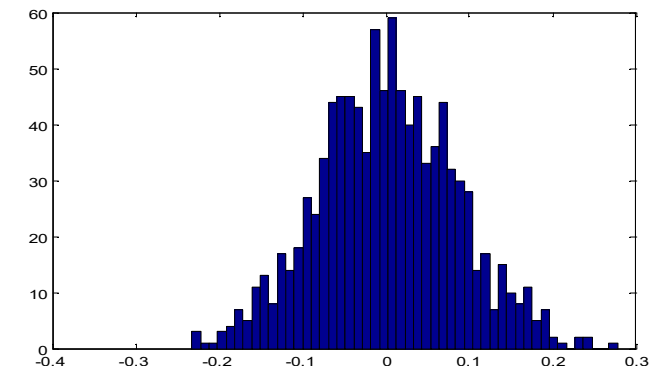
$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$



<https://youtu.be/kmmZG9ZOXIA>

Théorème central limite :

- La distribution statistique de la somme de n V.A indépendantes et de même loi tend vers la loi Normale quand n tend vers l'infini.



Rappels sur les variables et processus aléatoires

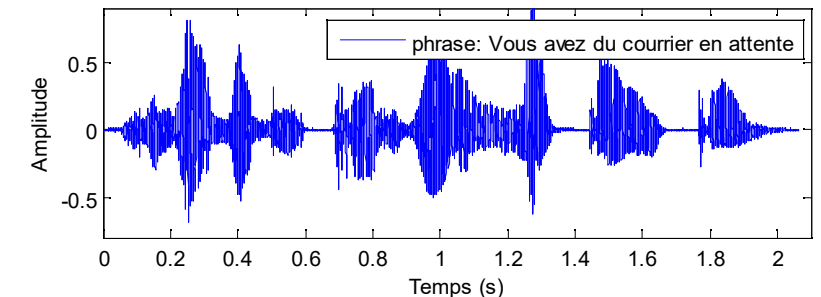
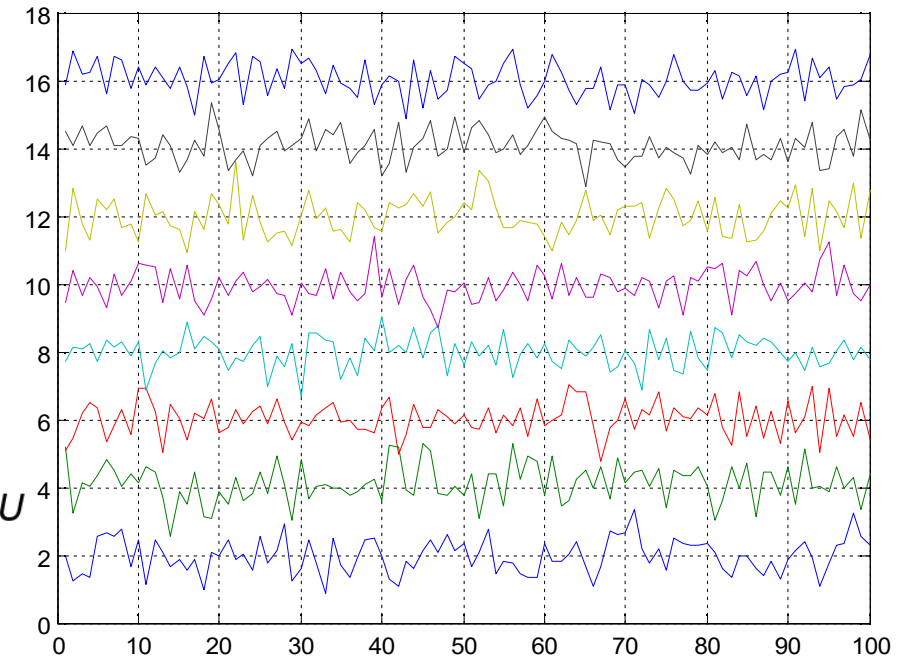
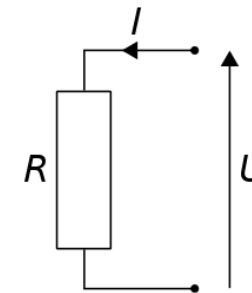
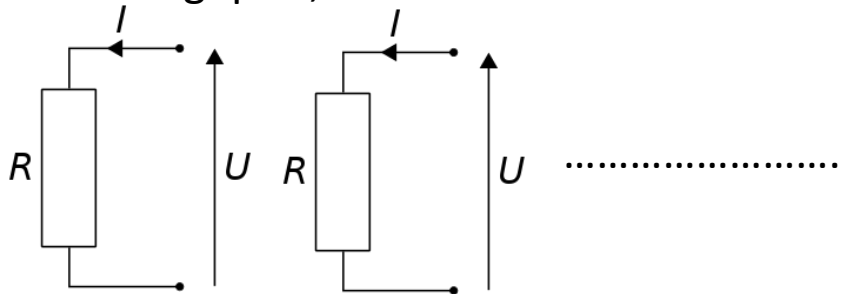
Processus aléatoires

Tout signal physique comporte une composante aléatoire qu'il s'agisse d'une perturbation externe telle une tension aléatoire aux bornes d'une résistance ou une perturbation atmosphérique.

Le signal utile est lui même aléatoire si l'on considère

- le lancer de dés,
- le loto,
- les résultats de matchs
- les phénomènes météorologiques,
- etc., ...

Exemples :



<https://youtu.be/OVWFTuXxqhk>

Rappels sur les variables et processus aléatoires

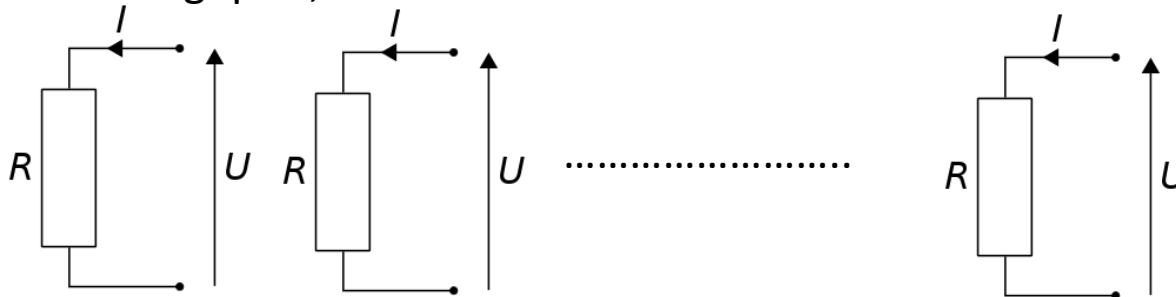
Processus aléatoires

Tout signal physique comporte une composante aléatoire qu'il s'agisse d'une perturbation externe telle une tension aléatoire aux bornes d'une résistance ou une perturbation atmosphérique.

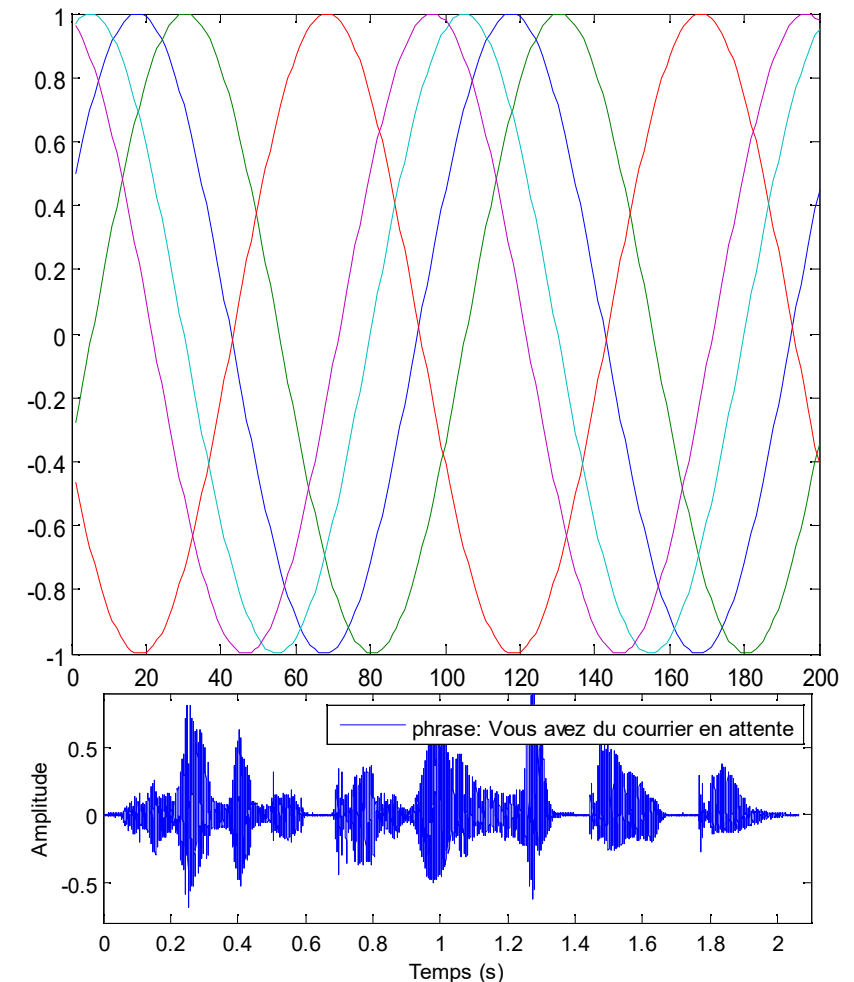
Le signal utile est lui même aléatoire si l'on considère

- le lancer de dés,
- le loto,
- les résultats de matchs
- les phénomènes météorologiques,
- etc., ...

Exemples :



<https://youtu.be/OVWFTuXxqhk>



Rappels sur les variables et processus aléatoires

Processus aléatoires

Tout signal physique comporte une composante aléatoire qu'il s'agisse d'une perturbation externe telle une tension aléatoire aux bornes d'une résistance ou une perturbation atmosphérique.

Le signal utile est lui même aléatoire si l'on considère

- le lancer de dés,
- le loto,
- les résultats de matchs
- les phénomènes météorologiques,
- etc., ...

Exemples :

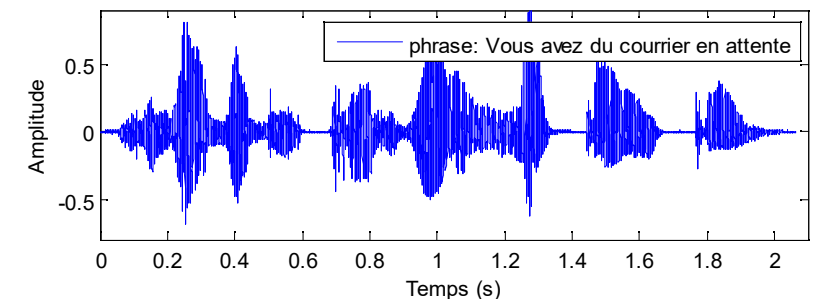
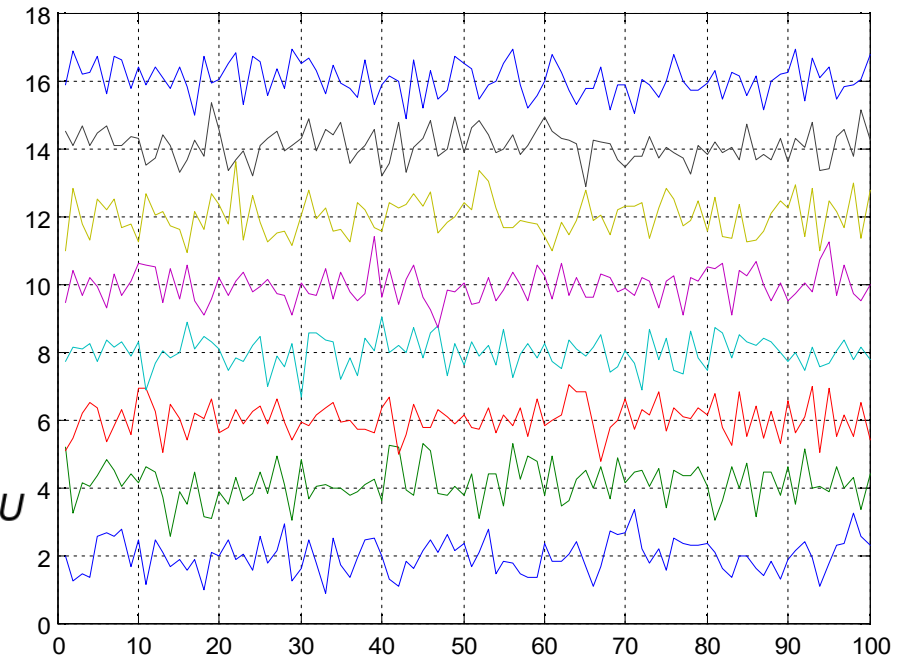
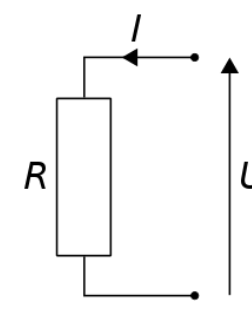
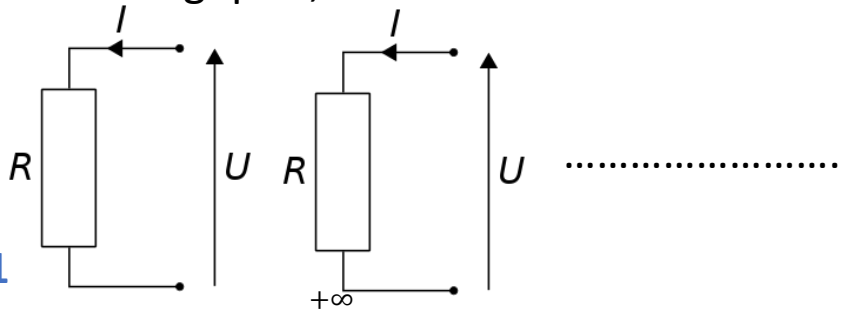
Statistiques d'ordre 1

Moyenne

$$\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i) \cdot p(x, t_i) dx$$

Variance

$$\sigma_x^2(t_i) = E\{x(t_i) - \mu_x(t_i)\}^2 = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$$



Rappels sur les variables et processus aléatoires

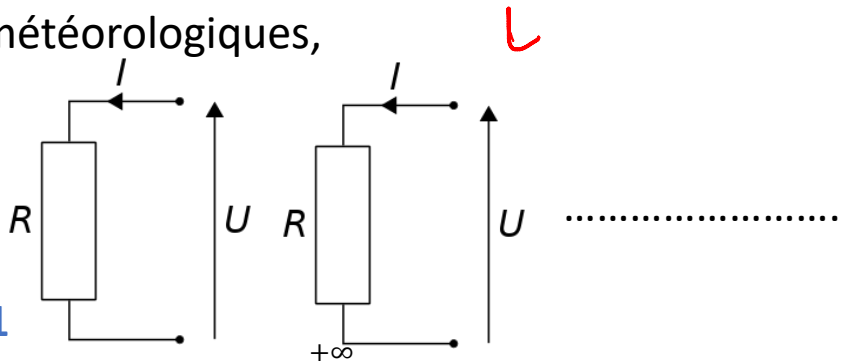
Processus aléatoires

Tout signal physique comporte une composante aléatoire qu'il s'agisse d'une perturbation externe telle une tension aléatoire aux bornes d'une résistance ou une perturbation atmosphérique.

Le signal utile est lui même aléatoire si l'on considère

- le lancer de dés,
- le loto,
- les résultats de matchs
- les phénomènes météorologiques,
- etc., ...

Exemples :



Statistiques d'ordre 1

Moyenne

$$\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int x(t_i) \cdot p(x, t_i) dx$$

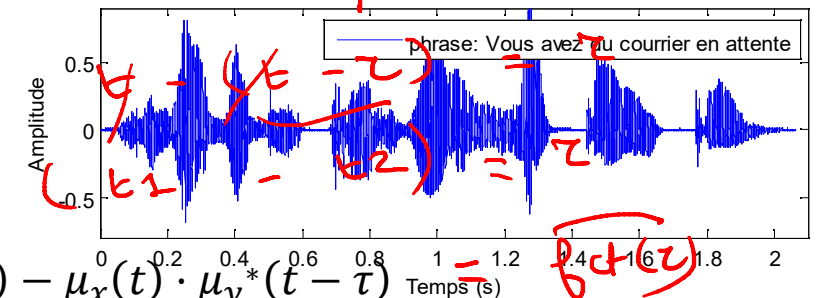
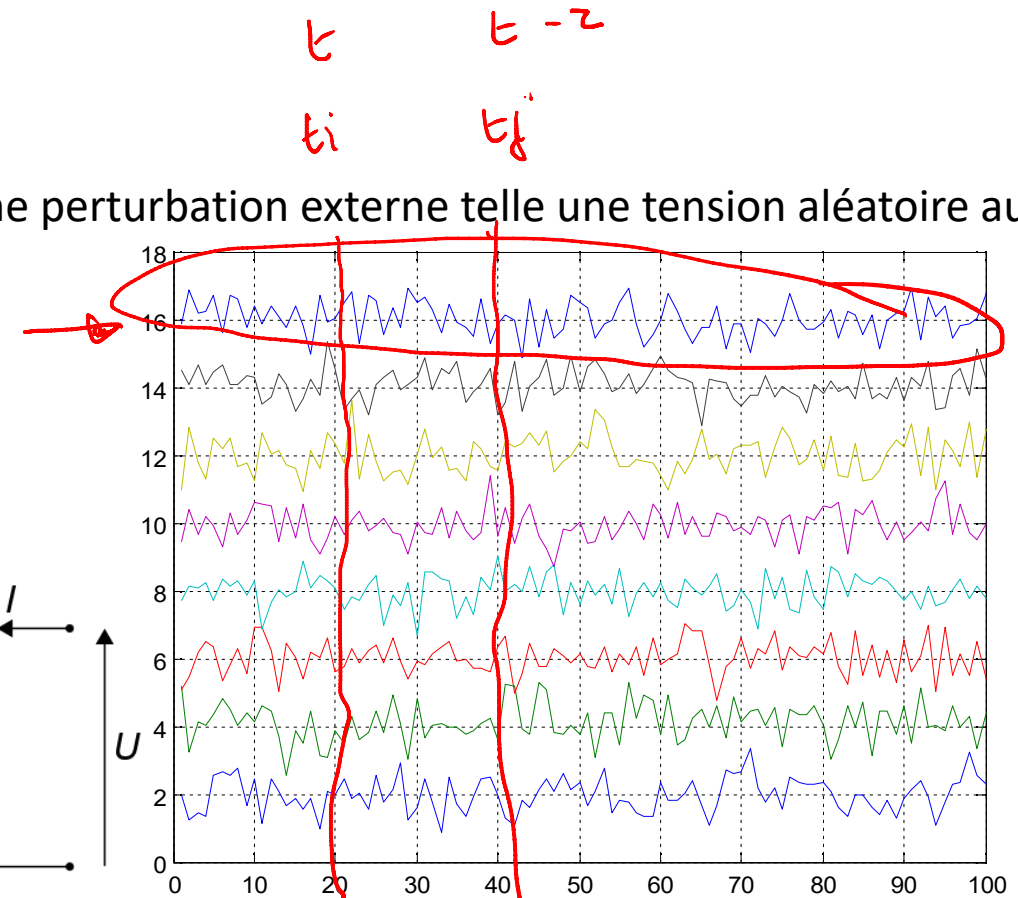
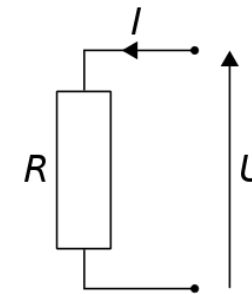
Variance

$$\sigma_x^2(t_i) = E\{x(t_i) - \mu_x(t_i)\}^2 = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$$

Statistiques d'ordre 2

$$R_{xy}(t, t - \tau) = E\{x(t) \cdot y^*(t - \tau)\}$$

$$C_{xy}(t, t - \tau) = R_{xy}(t, t - \tau) - \mu_x(t) \cdot \mu_y^*(t - \tau)$$



Rappels sur les variables et processus aléatoires

Processus aléatoires Statistiques d'ordre 1

Moyenne $\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i) \cdot p(x, t_i) dx$

Variance $\sigma_x^2(t_i) = E\{x(t_i) - \mu_x(t_i)\}^2 = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$

Statistiques d'ordre 2

$R_{xy}(t, t - \tau) = E\{x(t) \cdot y^*(t - \tau)\}$

Puissance

$P_X = E(x(t)^2) = R_x(0) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$

Exemple d'application

Soit le processus stochastique $x(t)$ défini par : $x(t) = a + b \cdot t$ où a et b sont des v.a. indépendantes de moyennes nulles et de variance 1. $x(t)$ est-il stationnaire d'ordre 1

$\sigma_x^2(t) = E\{x(t)^2\} = E\{a^2 + b^2 t^2 + 2ab t\}$

$E\{x a b t\}$

$\sigma_x^2 = E\{a^2\} + E\{b^2 t^2\} + E\{2ab t\}$
 $= \cancel{\mu_a^2} + \sigma_a^2 + t^2 (\cancel{\mu_b^2} + \sigma_b^2) + 2t \cancel{E\{ab\}} = \sigma_a^2 + t^2 \sigma_b^2$
 $= 1 + t^2 = f(t)$

Stationnarité d'ordre 1 :

$\mu_x(t) = \mu_x = cste$

$\sigma_x^2(t_i) = \sigma_x^2$

Stationnarité d'ordre 2 :

$R_x(t, t - \tau) = R_x(\tau)$

$R_x(t, t - \tau) = E\{x(t) \cdot x^*(t - \tau)\}$
 $R_x(0) = E\{|x(t)|^2\}$

<https://youtu.be/EC7acWTbE-o>

$\mu_x(t) = E\{a\} + t \cdot E\{b\}$
 $= \cancel{\mu_a} + t \cdot \cancel{\mu_b} = 0$

$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = E\{a + b t\} = E\{a\} + E\{b t\}$

$\sigma_x^2(t) = E\{(x(t) - \mu_x)^2\} = E\{x(t)^2\} - \mu_x^2$

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Processus aléatoires

Statistiques d'ordre 1

Moyenne $\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i) \cdot p(x, t_i) dx$

Variance $\sigma_x^2(t_i) = E\{x(t_i) - \mu_x(t_i)\}^2 = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$

Stationnarité d'ordre 1 : $\mu_x(t) = \mu_x = cste$
 $\sigma_x^2(t_i) = \sigma_x^2$

Statistiques d'ordre 2

$$R_{xy}(t, t - \tau) = E\{x(t) \cdot y^*(t - \tau)\}$$

Stationnarité d'ordre 2 : $R_x(t, t - \tau) = R_x(\tau)$

Puissance

$$P_X = E(x(t)^2) = R_x(0) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

<https://youtu.be/EC7acWTbE-o>

DSP : Densité spectrale de puissance

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

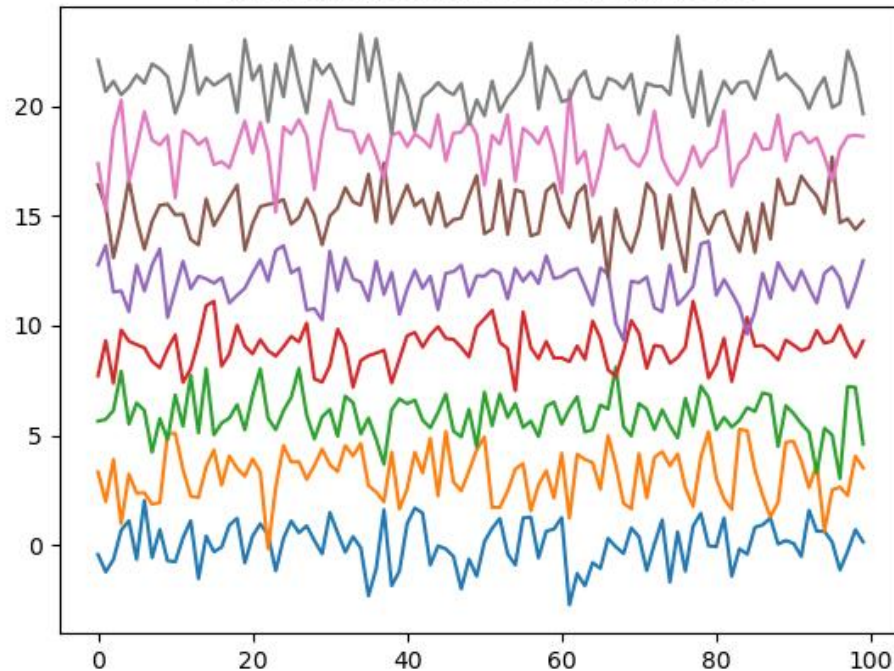
$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = R_x(0)$$

Rappels sur les variables et processus aléatoires

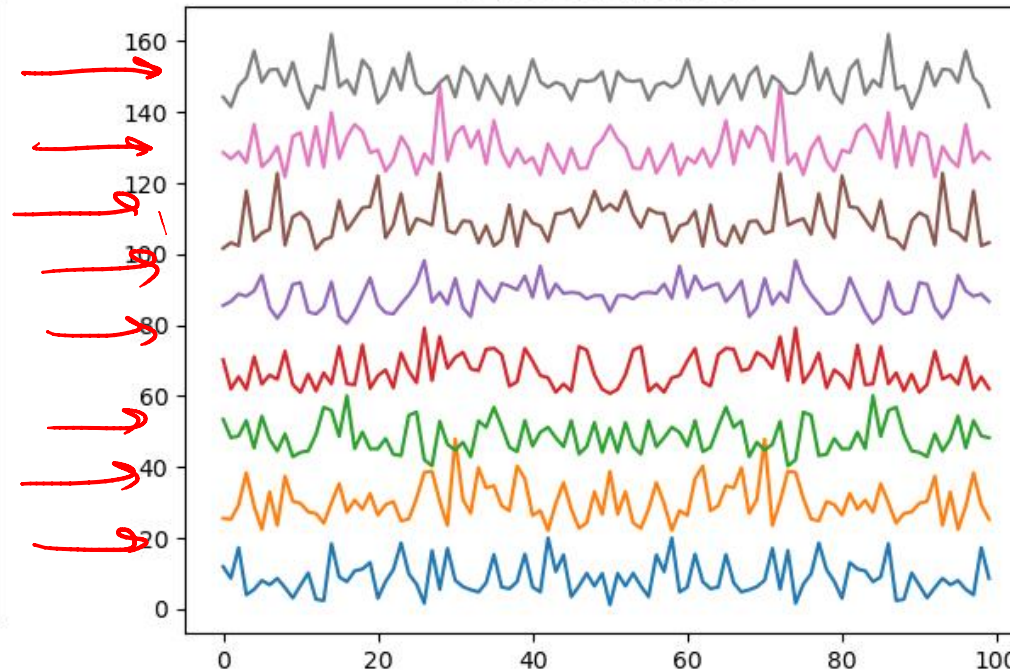
$$S_x(f) = |x(f)|^2$$

$$= \text{TF} \{ R_x(\tau) \}$$

8 Réalisations d'un Processus Aléatoire



TF des 8 Réalisations



[e/EC7acWTbE-o](#)

$$R_x(t, \tau) = R_x(\tau) \quad \text{Stationnaire} \quad \xrightarrow{\text{TF}}$$

DSP : Densité spectrale de puissance

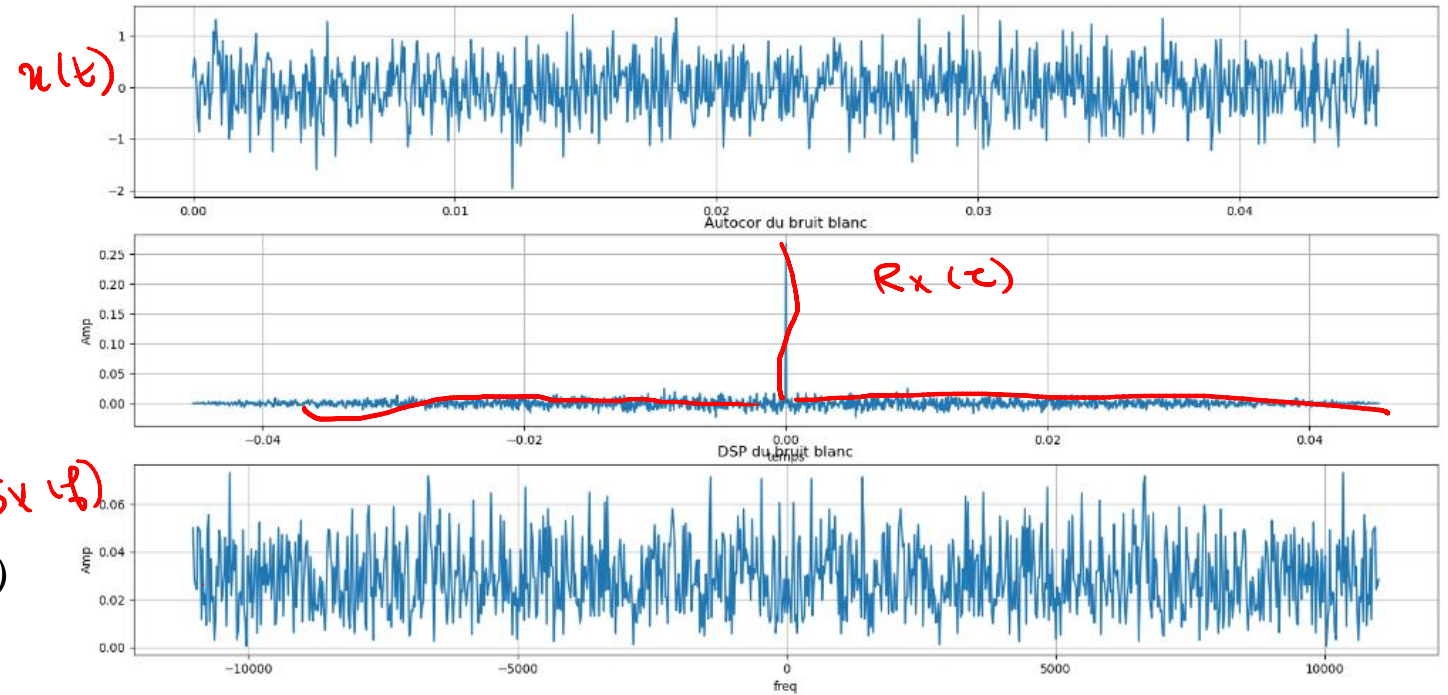
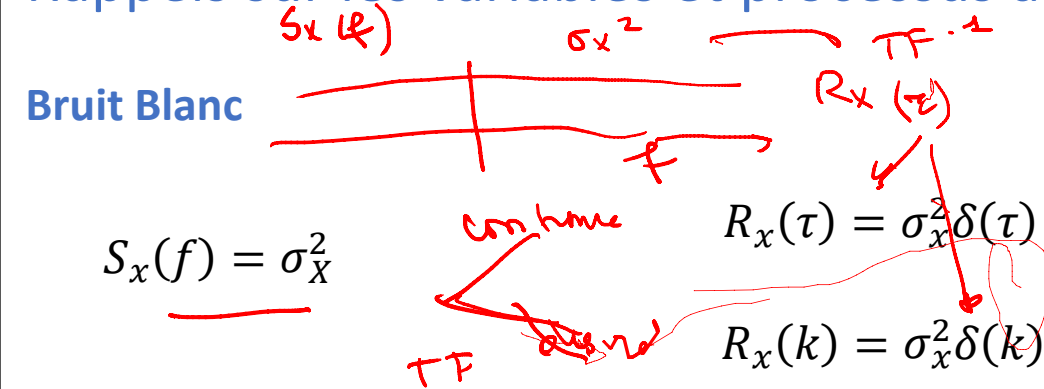
$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{R_x(\tau)} e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = R_x(0)$$

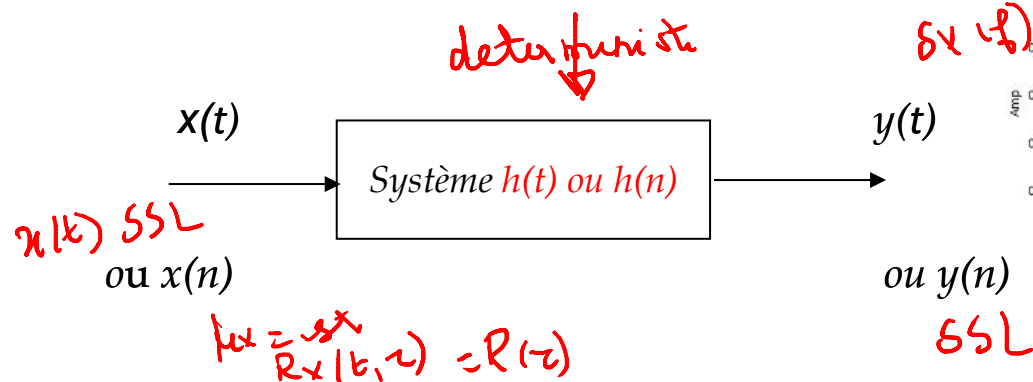
$$S_x(f, \tau) = \int R_x(t, \tau) e^{-2\pi j f t} dt \quad \text{SSL} \quad \begin{cases} \mu_x = \text{conste} \\ R_x(t, \tau) = f(\tau) \end{cases}$$

Stationnaire ou non
→ DSP

Rappels sur les variables et processus aléatoires



Processus aléatoires et Filtrage



Si $x(t)$ es SSL alors $y(t)$ est SSL

$$\mu_y(t) = \mu_x H(f = 0)$$

Handwritten notes: $H(f) = \int h(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau$, $H(f=0) = \int h(\tau) d\tau$, $\mu_y = \mu_x$, $R_y(k, \tau) = R_y(\tau)$.

<https://youtu.be/dy32QCqEd-k>

Handwritten notes: $y(t) = x(t) * h(t)$, $y(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau$, $E\{y(t)y(t)\} = E\{\int x(\tau) h(t-\tau) d\tau \int x(\tau') h(t-\tau') d\tau'\}$.

$$S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Exercice 6

Soit le processus aléatoire $\mathbf{Z}(t) = X \cdot \cos(2f_0 t) - Y \sin(2f_0 t)$, où X, Y sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes à moyennes nulles et de variances $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$; f_0 est une constante.

- Calculer la valeur moyenne $E\{Z(t)\}$ et la variance σ_Z^2
- Calculer la fonction d'autocorrélation $R_Z(t, \tau)$ et examiner si le processus est SSL.
- Si oui, calculer la DSP.

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Rappels sur les variables et processus aléatoires

Exercice 7

L'entrée $x(t)$ du circuit ci-contre est un bruit blanc de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau)$

- Déterminer la densité spectrale de la sortie $y(t)$, notée $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de la sortie $y(t)$, notée $R_y(\tau)$.

